Topologie-Extrema-Intégrales

Contrôle Continu n°2 - 18 décembre 2007

1h20 - Documents et calculatrices interdits

Exercice 1.

On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que la fonction f admet des dérivées partielles que l'on calculera en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2.

On considère l'application g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = \ln(2+x^2)(y^3 - 3y + 3)$$

1. a) Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}^2$.
b) Montrer que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.
2. a) Calculer les dérivées partielles de g en tout point de $\mathbb{R}^2$ et déterminer les éventuels points critiques.
b) Déterminer les éventuels extréma locaux de g sur $\mathbb{R}^2$.
c) Déterminer les éventuels extréma globaux de g sur $\mathbb{R}^2$.
3. On considère le point $M = (2, 1, \ln 6) \in \mathbb{R}^3$.
a) Montrer que le point M appartient à la surface $\mathcal{S}$ d'équation $z = g(x,y)$.
b) Donner l'équation du plan tangent $\mathcal{T}$ à la surface $\mathcal{S}$ au point M.
c) Décrire l'allure de $\mathcal{S}$ par rapport à $\mathcal{T}$ au voisinage du point M.

Exercice 3.
1. Donner un exemple de suite réelle strictement croissante et bornée.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n \geqslant \delta$$

Montrer que :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$