Retour sur la correction de la question 3.1 du partiel de T.E.I.

(à regarder avec la correction déjà donnée)

On commence par fixer un $\varepsilon > 0$. En effet pour montrer qu'une propriété est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on ne la montre pas (en général) pour tous les ε d'un seul coup. On en fixe un (n'importe lequel) et on montre que la propriété est vraie pour celui-là. Car si la propriété est vraie pour n'importe quel $\varepsilon > 0$, elle est vraie pour tout $\varepsilon > 0$ (y réfléchir...)

ε étant fixé, la propriété que l'on doit montrer est la suivante :

$$\bigcup_{a \in \overline{B}(0,1)} B(a, \varepsilon) = B(0, 1+\varepsilon) \qquad (*)$$

Il s'agit d'une égalité entre deux parties de $\mathbb{R}^2$. Cela revient à :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \qquad x \in \bigcup_{a \in \overline{B}(0,1)} B(a,\varepsilon) \iff x \in B(0, 1+\varepsilon)$$

De même que pour montrer une équivalence il vaut mieux montrer les deux implications séparément, pour montrer l'égalité de deux ensembles, il vaut mieux montrer les deux inclusions séparément :

$$\bigcup_{a \in \overline{B}(0,1)} B(a, \varepsilon) \subset B(0, 1+\varepsilon) \qquad (1)$$

$$B(0, 1+\varepsilon) \subset \bigcup_{a \in \overline{B}(0,1)} B(a, \varepsilon) \qquad (2)$$

Montrons donc (1). Il faut montrer :

pour tout $x \in \bigcup_{a \in \overline{B}(0,1)} B(a, \varepsilon)$, on a $x \in B(0, 1+\varepsilon)$, c'est-à-dire : $\|x\| < 1+\varepsilon$

Comme pour ε, on ne le montre pas pour tous les $x \in \bigcup_{a \in \overline{B}(0,1)} B(a,\varepsilon)$ en même temps, mais pour n'importe lequel d'entre eux.

On fixe donc $x \in \bigcup_{a \in \overline{B}(0,1)} B(a,\varepsilon)$

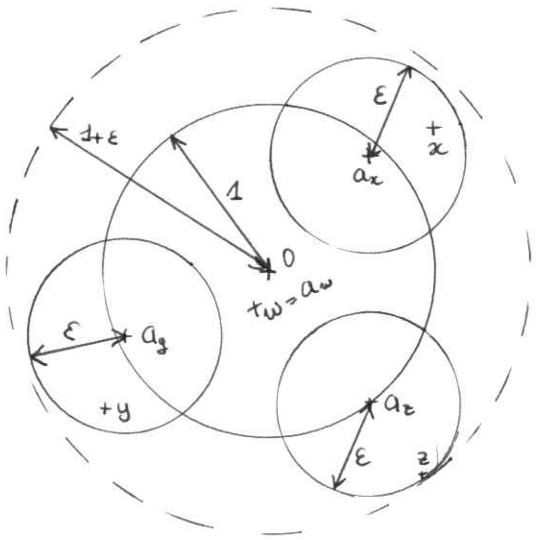
Par définition de l'union, il existe un $a_x \in \overline{B}(0,1)$ tel que $x \in B(a_x, \varepsilon)$ (a_x dépend de x, c'est pour cela qu'on ne peut pas s'occuper de tous les x en même temps).

Ainsi on a a_x tel que : $\|a_x - 0_{\mathbb{R}^2}\| \leq 1$ et $\|a_x - x\| < \varepsilon$

Il ne reste plus qu'à utiliser l'inégalité triangulaire :

$$\|x\| = \|x - 0_{\mathbb{R}^2}\| = \|(x - a_x) + (a_x - 0_{\mathbb{R}^2})\| \leq \underbrace{\|x - a_x\|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\|a_x - 0_{\mathbb{R}^2}\|}_{\leq 1} < 1+\varepsilon$$

D'où $x \in B(0_{\mathbb{R}^2}, 1+\varepsilon)$



Il reste à montrer (2).

Cette fois on considère $x \in B(0_{\mathbb{R}^2}, 1+\varepsilon)$, c'est-à-dire n'importe quel $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|x\| < 1+\varepsilon$. Il faut trouver $a_x \in \overline{B}(0,1)$ tel que $\|a_x - x\| < \varepsilon$ (à nouveau a_x dépend de x)

La méthode donnée dans la correction est sûrement la plus rapide

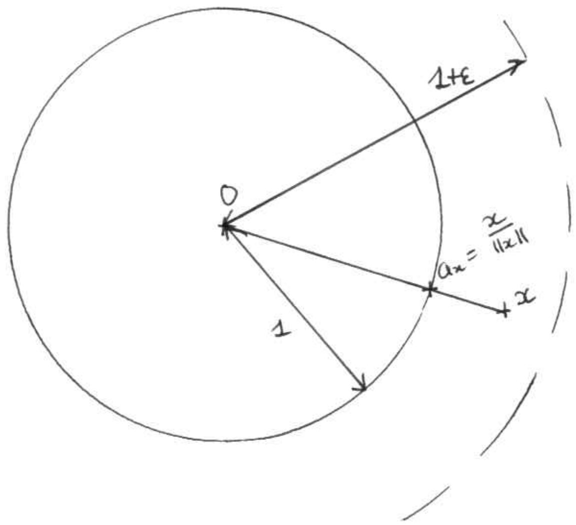
En voici une autre, peut-être plus simple à comprendre

On distingue deux cas :

- Si $\|x\| \leq 1$, alors on peut prendre $a_x = x$. En effet, on a bien $\|a_x\| = \|x\| \leq 1$ donc $a_x \in \overline{B}(0,1)$ et $\|a_x - x\| = 0 < \varepsilon$ donc $x \in B(a_x, x)$

- Sinon $1 < \|x\| < 1+\varepsilon$. On ne peut pas prendre $a_x = x$.

On va prendre pour a_x le point de $\overline{B}(0,1)$ le plus proche de x, c'est-à-dire $a_x = \frac{x}{\|x\|}$



(si $x = (x_1, x_2)$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ donc $a_x = \frac{x}{\|x\|} = \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1 + x_2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1 + x_2}} \right)$)

On a alors :

$$\|a_x\|^2 = \frac{x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)} + \frac{x^2}{(x_1^2 + x_2^2)} = 1 \text{ , donc } \|a_x\| = 1 \text{ donc } a_x \in \overline{B}(0,1)$$

et :

$$x - a_x = \left(x_1 - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, x_2 - \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) = \left(x_1 - \frac{x_1}{\|x\|}, x_2 - \frac{x_2}{\|x\|} \right)$$

donc :

$$\|x - a_x\| = \sqrt{x_2^2 \left(1 - \frac{1}{\|x\|}\right)^2 + x_2^2 \left(1 - \frac{1}{\|x\|}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)\left(1 - \frac{1}{\|x\|}\right)^2} = \|x\| \left(1 - \frac{1}{\|x\|}\right)$$

$$= \|x\| - 1$$

$$< 1 + \varepsilon - 1 = \varepsilon$$

c'est-à-dire : $x \in B(a_x, \varepsilon)$

On a donc prouvé (2)

D'après (1) et (2), on a bien (*)