

Séries de Fourier



1 Introduction

Les séries de Fourier ont été introduites pour résoudre l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = \partial_{xx} u(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, \pi], \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in [0, \pi]. \end{cases} \quad (1.1)$$

L'idée est de combiner des solutions élémentaires. Si u_0 est une fonction de la forme $x \mapsto \sin(nx)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors la fonction

$$(t, x) \mapsto e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

est solution. Par linéarité de l'équation, si u_0 est combinaison linéaire de telles fonctions sinus, alors on sait également résoudre l'équation. Joseph Fourier affirme alors que toute fonction u_0 qui s'annule en 0 et π s'écrit comme somme infinie de fonctions sinus,

$$u_0(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} b_n \sin(nx),$$

et que la solution de (1.1) est alors donnée par

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} b_n \sin(nx) e^{-n^2 t}.$$

Les fonctions $\sigma_n : x \mapsto \sin(nx)$ jouent un rôle particulier dans cette histoire car ce sont, en quelque sorte, des fonctions propres pour l'opérateur ∂_{xx} :

$$\sigma_n'' = -n^2 \sigma_n.$$

Elles vérifient en outre pour tout $t > 0$ la condition au bord $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ contenue dans (1.1). La valeur propre correspondante $-n^2$ apparaît alors naturellement dans le facteur exponentiel en temps.

La question qui est alors soulevée est celle de la « diagonalisation » de l'opérateur ∂_{xx} . Peut-on effectivement, comme l'affirme Fourier, écrire toute fonction comme « somme » de fonctions propres ?

Même si Fourier a été un peu rapide en affirmant que c'était bien le cas, son observation occupe à double titre une place capitale dans l'histoire de l'analyse. D'une part, l'idée fonctionne, et les séries de Fourier (et la transformée de Fourier, adaptée aux problèmes sur tout \mathbb{R}) est un outil absolument crucial en analyse (pour l'étude des équations aux dérivées partielles, le traitement du signal, . . .). D'autre part, la nécessité de justifier l'observation de Fourier a obligé les mathématiciens à mieux formaliser des concepts fondamentaux, tels que la notion de fonction elle-même. Cela a par exemple été un tournant dans le développement du calcul intégral, qui intervient dans la définition des coefficients de Fourier (en particulier, l'intégrale devient un outil d'analyse, et n'est plus seulement destinée à calculer des aires).

2 Polynômes trigonométriques

2.1 Fonctions périodiques

On a motivé l'introduction des séries de Fourier par un problème sur un intervalle avec une condition au bord, mais le cadre naturel est plutôt celui des fonctions périodiques. On commence par en rappeler la définition.

Définition 2.1. Soient $T > 0$ et f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On dit que f est T -périodique si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f(x + T) = f(x).$$

Dans ces notes on se concentrera sur les fonctions 2π -périodiques. On remarque que si f est T -périodique pour un certain $T > 0$, alors la fonction

$$x \mapsto f\left(\frac{xT}{2\pi}\right)$$

est 2π -périodique. Ainsi, tous les résultats obtenus pour des fonctions 2π -périodiques s'étendront sans difficulté aux fonctions T -périodiques (voir la section 7).

D'autre part, une fonction 2π -périodique définit par passage au quotient une fonction sur le tore (ou cercle, en dimension 1)

$$\mathbb{T} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}).$$

Inversement, une fonction sur le cercle définit une fonction 2π -périodique sur \mathbb{R} . Il est donc équivalent de s'intéresser aux fonctions 2π -périodiques sur \mathbb{R} ou aux fonctions sur le tore.

Enfin, une fonction f sur $] -\pi, \pi]$ (ou sur n'importe quel intervalle de longueur 2π) s'étend par périodicité en une fonction \tilde{f} définie sur \mathbb{R} et 2π -périodique. Étant donné $x \in \mathbb{R}$ il existe un unique couple $(x_0, k) \in] -\pi, \pi] \times \mathbb{Z}$ tel que $x = x_0 + 2k\pi$. On pose alors $\tilde{f}(x) = f(x_0)$, ce qui définit une fonction \tilde{f} sur \mathbb{R} qui est bien 2π -périodique.

Il est important de noter que si f est continue sur $]-\pi, \pi]$, alors \tilde{f} ne l'est pas forcément sur \mathbb{R} . La remarque vaut pour tous les niveaux de régularité (fonctions de classe C^1 , de classe C^∞ , etc.).

De même, une fonction sur $[0, \pi]$ (comme en (1.1)) peut d'abord être prolongée par imparité (ou parité) sur $]-\pi, \pi]$ avant d'être prolongée par 2π -périodicité.

2.2 Polynômes trigonométriques

Dans l'esprit de la résolution de l'équation de la chaleur (1.1), on cherche à écrire toute fonction 2π -périodique comme somme (éventuellement infinie) de fonctions 2π -périodiques u telles que $u' = \lambda u$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$ (fonctions propres pour l'opérateur de dérivation). Les fonctions candidates sont les fonctions de la forme $x \mapsto \alpha e^{\lambda x}$. Et pour qu'une telle fonction soit 2π -périodique, λ doit être de la forme in pour un certain $n \in \mathbb{Z}$.

Pour $n \in \mathbb{Z}$ on note e_n la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} définie par

$$e_n(x) = e^{inx}.$$

Par un simple calcul on obtient le résultat suivant :

Lemme 2.2. *Pour $n, m \in \mathbb{Z}$ on a*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_n(x) \overline{e_m(x)} dx = \delta_{n,m} := \begin{cases} 1 & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

On peut montrer par une preuve directe que la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est libre, ou utiliser déjà la structure Hilbertienne, caché dans le lemme 2.2 et que l'on formalisera plus tard.

Proposition 2.3. *La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$.*

Démonstration. Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{Z}$ (deux-à-deux distincts) et $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^m \lambda_k e^{in_k x} = 0. \quad (2.1)$$

Soit $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$. On a

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j e_{n_j}(x) \right) \overline{e_{n_k}(x)} dx = \sum_{j=1}^m \lambda_j \int_{-\pi}^{\pi} e_{n_j}(x) \overline{e_{n_k}(x)} dx = \lambda_k.$$

Cela prouve que la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est libre. □

On commence par s'intéresser au cas simple des combinaisons linéaires des fonctions e_n , $n \in \mathbb{Z}$.

Définition 2.4. On appelle *polynôme trigonométrique* une combinaison linéaire des fonctions e_n , $n \in \mathbb{Z}$. Un polynôme trigonométrique est donc une fonction de la forme

$$x \mapsto \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx},$$

avec $N \in \mathbb{N}$ et $c_{-N}, \dots, c_N \in \mathbb{C}$.

Pour $N \in \mathbb{N}$ on note $E_N = \text{vect}((e_n)_{-N \leq n \leq N})$.

Proposition 2.5. (i) La famille $(e_n)_{-N \leq n \leq N}$ est une base de E_N . En particulier, E_N est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ de dimension $2N + 1$.

(ii) Soit $f \in E_N$. Alors f s'écrit de façon unique sous la forme

$$f = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n, \quad (2.2)$$

et pour tout $n \in \llbracket -N, N \rrbracket$ on a

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx. \quad (2.3)$$

Démonstration. La famille $(e_n)_{-N \leq n \leq N}$ est libre d'après la proposition 2.3 et elle engendre E_N par définition. C'est donc une base de E_N . En outre elle a $(2N + 1)$ éléments, donc E_N est de dimension $(2N + 1)$.

Soit maintenant $f \in E_N$. Il existe une unique famille complexe $(c_n(f))_{-N \leq n \leq N}$ vérifiant (2.2). D'après le lemme 2.2 on a alors pour tout $n \in \llbracket -N, N \rrbracket$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=-N}^N c_k(f) e_k(x) \right) \overline{e_n(x)} dx \\ &= \sum_{k=-N}^N \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c_k(f) e_k(x) \overline{e_n(x)} dx \right) \\ &= c_n(f). \end{aligned}$$

D'où (2.3). □

On introduit maintenant une autre écriture pour les polynômes trigonométriques. On rappelle que pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on a

$$e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx),$$

et que cela donne les formules d'Euler :

$$\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}.$$

Proposition 2.6. La famille

$$\mathcal{F}_{\text{trigo}} = \left(\frac{1}{2}, \cos(x), \cos(2x), \dots, \cos(Nx), \sin(x), \sin(2x), \dots, \sin(Nx) \right)$$

(où $\cos(nx)$ est un abus de notation pour la fonction $x \mapsto \cos(nx)$) est une base de E_N . En outre, pour $a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N \in \mathbb{C}$ et $c_{-N}, \dots, c_N \in \mathbb{C}$ on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^N b_n \sin(nx)$$

si et seulement si

$$\forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad a_n = c_n + c_{-n} \quad \text{et} \quad \forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

ou encore si et seulement si

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

Remarque 2.7. Comme cela pourrait être utile, on rappelle les formules donnant les produits de fonctions trigonométriques :

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2},$$

$$\sin(a) \sin(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2},$$

$$\sin(a) \cos(b) = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}.$$

Ainsi les polynômes trigonométriques de E_N sont exactement les fonctions de la forme

$$f : x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad (2.4)$$

avec pour $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx, \quad (2.5)$$

et pour $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx. \quad (2.6)$$

On note que le choix de noter $a_0/2$ le coefficient constant dans (2.4) est arbitraire, mais cela permet d'avoir une expression uniforme pour les a_n , $n \in \mathbb{N}$.

En général, on utilise l'écriture (2.4) quand f est à valeurs réelles, auquel cas les coefficients a_n et b_n sont réels (contrairement aux $c_n(f)$).

2.3 Structure d'espace hermitien

Pour $f, g \in E_N$ on pose

$$\langle f, g \rangle_{2,\text{per}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} \, dx,$$

puis

$$\|f\|_{2,\text{per}} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{2,\text{per}}}.$$

Proposition 2.8. (i) L'application $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$ définit un produit scalaire hermitien sur E_N .

(ii) La base $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthonormée.

(iii) Pour $f \in E_N$ et $n \in \llbracket -N, N \rrbracket$ on a

$$c_n(f) = \langle f, e_n \rangle_{2,\text{per}}.$$

(iv) Pour $f \in E_N$ on a

$$\|f\|_{2,\text{per}}^2 = \sum_{n=-N}^N |c_n(f)|^2.$$

Remarque 2.9. On a une structure d'espace euclidien si on considère des fonctions à valeurs réelles.

2.4 Lien avec la résolution d'équations différentielles

On a choisi de considérer les fonctions e_n , $n \in \mathbb{Z}$, car ce sont des fonctions périodiques qui sont des vecteurs propres pour la dérivation. On vérifie que l'objectif est bien atteint.

Proposition 2.10. (i) *Les fonctions de E_N sont de classe C^∞ (et même analytiques) sur \mathbb{R} .*

(ii) *La famille $(e_n)_{-N \leq n \leq N}$ est une base de fonctions propres pour l'opérateur de dérivation sur E_N . Plus précisément, pour $n \in \llbracket -N, N \rrbracket$ on a*

$$e'_n = ine_n.$$

On revient maintenant rapidement sur l'équation de la chaleur évoquée en introduction. On considère le problème

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = \partial_{xx} u(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times [-\pi, \pi], \\ u(t, -\pi) = u(t, \pi), & t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in [-\pi, \pi]. \end{cases} \quad (2.7)$$

Par rapport à (1.1), on n'impose pas que la fonction s'annule au bord de l'intervalle, mais on cherche une solution 2π -périodique. Il n'est pas difficile de voir que si u_0 est un polynôme trigonométrique, c'est-à-dire s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $c_{-N}, \dots, c_N \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad u_0(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx},$$

alors on obtient une solution de (2.7) en posant, pour tous $t \geq 0$ et $x \in [-\pi, \pi]$,

$$u(t, x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx - n^2 t}.$$

Ainsi, les polynômes trigonométriques sont des fonctions agréables quand il s'agit de résoudre des équations différentielles sur le cercle. Mais c'est évidemment un cadre beaucoup trop restrictif en pratique. Plutôt que de se restreindre aux combinaisons linéaires des e_n , $n \in \mathbb{Z}$, on va donc considérer des sommes infinies.

3 Série de Fourier d'une fonction périodique

3.1 Série de Fourier d'une fonction périodique

On cherche maintenant à étendre les observations de la section précédente à des fonctions 2π -périodiques les plus générales possibles. L'idée assez naturelle est de chercher à approcher une fonction f par des polynômes trigonométriques. Et pour cela on va bien évidemment s'inspirer de l'écriture (2.2)-(2.3).

La définition (2.3) des coefficients de Fourier peut être étendue à n'importe quelle fonction 2π -périodique telle que l'intégrale sur un intervalle de longueur 2π de la fonction $f\overline{e_n}$ est bien définie. Selon les fonctions que l'on souhaite considérer, et la théorie de l'intégration dont on dispose, on peut donc travailler dans l'espace $E^1 = C_{m,per}^0$ des fonctions 2π -périodiques et continues par morceaux, ou bien dans l'espace $E^1 = L_{per}^1$ des fonctions 2π -périodiques et localement intégrables au sens de Lebesgue (on pourrait également considérer les fonctions localement intégrables au sens de Riemann). Dans tous les cas, la définition suivante est bien licite.

Définition 3.1. Soit $f \in E^1$. On définit les coefficients de Fourier (exponentiels) de f par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy. \quad (3.1)$$

La N -ième somme de Fourier de f est alors

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n \in E_N.$$

On note que dans la définition de $c_n(f)$, on peut remplacer l'intégrale sur $[-\pi, \pi]$ par une intégrale sur n'importe quel intervalle de longueur 2π .

Puisque notre but est d'approcher notre fonction f par des polynômes trigonométriques, une idée immédiate est de considérer la limite pour N grand de $S_N(f)$.

Définition 3.2. On appelle série de Fourier de f la série de fonction définie par

$$S(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n. \quad (3.2)$$

À ce stade on ne sait rien sur cette série de fonctions, ni sur son lien avec la fonction f qui nous intéresse. Les questions qui se posent alors sont alors les suivantes.

- (i) La série de Fourier de f converge-t-elle? En quel sens?
- (ii) Si la série de Fourier de f converge, la limite est-elle f ?

On prendra garde à la notation (3.2) pour la série de Fourier de f . En général, on dit qu'une série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n$ est convergente (quel que soit le sens considéré) si les séries $\sum_{n \geq 0} g_n$ et $\sum_{n < 0} g_n$ sont toutes les deux convergentes, ce qui est a priori plus fort que la convergence de la fonction $\sum_{n=-N}^N g_n$ pour $N \rightarrow +\infty$. Dans le cas présent, on dit que la série de Fourier $S(f)$ de f converge (en un sens à préciser) si la suite de fonctions $S_N(f)$ converge quand N tend vers $+\infty$. Dans ce cas, et malgré l'ambiguïté,

on notera bien $S(f)(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx}$.

Ce problème ne se pose pas avec les notations réelles. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f), \quad b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)). \quad (3.3)$$

Les $a_n(f)$, $n \in \mathbb{N}$ et $b_n(f)$, $n \in \mathbb{N}^*$, sont appelés coefficients de Fourier (trigonométriques) de f . Pour tous $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on a alors

$$S_N(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)),$$

et la série de Fourier de f s'écrit

$$S(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)). \quad (3.4)$$

Comme pour les polynômes trigonométriques, si on connaît les coefficients trigonométriques de f on peut retrouver les coefficients exponentiels. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2} \quad \text{et} \quad c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}.$$

Et on peut calculer directement ces coefficients trigonométriques. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx,$$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx.$$

Dans ces notes, on a choisi de privilégier la représentation (3.2) plutôt que (3.4) pour la série de Fourier de f . C'est un choix arbitraire, il est tout à fait possible de faire l'inverse. Typiquement, si on ne s'intéresse qu'à des fonctions à valeurs réelles.

3.2 Propriétés des coefficients de Fourier

Dans ce paragraphe on donne les propriétés de base des coefficients de Fourier définis précédemment. La proposition suivante se montre avec de simples calculs :

Proposition 3.3. (i) *L'application $f \in E^1 \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est linéaire. En outre pour $f \in E^1$ et $n \in \mathbb{Z}$ on a*

$$|c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \, dx.$$

(ii) *Si $f \in E^1$ est à valeurs réelles alors $a_0(f) = 2c_0(f)$ est réel et pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a*

$$c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}, \quad a_n(f) \in \mathbb{R}, \quad b_n(f) \in \mathbb{R}.$$

(iii) Si $f \in E^1$ est paire alors $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) \, dx.$$

Si $f \in E^1$ est impaire alors $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx) \, dx.$$

(iv) Soient $f \in E^1$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On considère $f_{x_0} : x \mapsto f(x + x_0)$. Alors $f_{x_0} \in E^1$ et pour $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$c_n(f_{x_0}) = e^{inx_0} c_n(f).$$

On a déjà discuté à la proposition 2.10 le bon comportement des vecteurs de base e_n vis-à-vis de la dérivation. Cela se répercute sur les coefficients de Fourier de la façon suivante.

Proposition 3.4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique de classe C^k . Alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f).$$

Démonstration. Le cas où $k = 1$ est une simple intégration par parties. On a

$$\begin{aligned} c_n(f') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{-inx} f'(x) \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} [e^{-inx} f(x)]_{-\pi}^\pi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi ine^{-inx} f(x) \, dx \\ &= inc_n(f). \end{aligned}$$

Le cas général suit alors par récurrence. □

En vue d'étudier la convergence de la série (3.2), la décroissance de la suite des coefficients $c_n(f)$ sera évidemment un élément important.

Corollaire 3.5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique de classe C^k . Alors

$$c_n(f) = O_{n \rightarrow \pm\infty}(|n|^{-k}).$$

Démonstration. D'après les propositions 3.4 puis 3.3 on a pour $n \neq 0$

$$|c_n(f)| = \frac{|c_n(f^{(k)})|}{|n|^k} \leq \frac{1}{2\pi |n|^k} \int_{-\pi}^\pi |f^{(k)}(x)| \, dx = O_{n \rightarrow \pm\infty}(|n|^{-k}). \quad \square$$

On a un résultat analogue au cas $k = 1$ si f n'est pas vraiment C^1 mais seulement continue et C^1 par morceaux.

Proposition 3.6. Soit f une fonction 2π -périodique, continue et C^1 par morceaux. Alors la dérivée de f est bien définie sauf en un nombre fini de points, et quitte à lui attribuer une valeur quelconque en ces points, elle définit une fonction de E^1 qu'on note f' . Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a alors

$$c_n(f') = inc_n(f).$$

En particulier,

$$c_n(f) = O_{n \rightarrow \pm\infty}(|n|^{-1}).$$

Démonstration. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_k \in [-\pi, \pi]$ tels que $-\pi = a_0 < a_1 < \dots < a_k = \pi$ et pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ la restriction de f à $]a_{j-1}, a_j[$ s'étend par continuité en une fonction C^1 sur $[a_{j-1}, a_j]$. Pour $n \in \mathbb{Z}$ on a alors

$$\begin{aligned} c_n(f') &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^k \int_{a_{j-1}}^{a_j} e^{-inx} f'(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^k (e^{-ina_j} f(a_j) - e^{-ina_{j-1}} f(a_{j-1})) + \frac{in}{2\pi} \sum_{j=1}^k \int_{a_{j-1}}^{a_j} e^{-inx} f(x) dx \\ &= \frac{in}{2\pi} \sum_{j=1}^k \int_{a_{j-1}}^{a_j} e^{-inx} f(x) dx \\ &= inc(f). \end{aligned}$$

La deuxième assertion est similaire au corollaire 3.5. □

Les résultats précédents montrent que plus la fonction f est régulière et plus la suite de ses coefficients de Fourier décroît rapidement. Le résultat minimal est que même sans aucune hypothèse sur f , cette suite est *a minima* décroissante.

Lemme 3.7 (Lemme de Riemann-Lebesgue). *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit f une fonction continue par morceaux (respectivement Lebesgue intégrable) sur $[a, b]$. Alors on a*

$$\int_a^b e^{i\kappa x} f(x) dx \xrightarrow{\kappa \rightarrow \pm\infty} 0.$$

On a la même conclusion en remplaçant $e^{i\kappa x}$ par $\cos(\kappa x)$ ou $\sin(\kappa x)$.

Démonstration pour une fonction continue par morceaux. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction g en escalier sur $[-\pi, \pi]$ telle que

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tout $\kappa \in \mathbb{R}$ on a alors

$$\left| \int_a^b e^{i\kappa x} f(x) dx - \int_a^b e^{i\kappa x} g(x) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il existe $k \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_k \in [a, b]$ tels que $a = a_0 < a_1 < \dots < a_k = b$ et β_1, \dots, β_k tels que

$$\forall x \in [a, b] \setminus \{a_0, \dots, a_k\}, \quad g(x) = \sum_{j=1}^k \beta_j \mathbb{1}_{[a_{j-1}, a_j]}(x).$$

Pour $\kappa \neq 0$ on a alors

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{i\kappa x} g(x) dx &= \sum_{j=1}^k \beta_j \int_{a_{j-1}}^{a_j} e^{i\kappa x} dx \\ &= \sum_{j=1}^k \beta_j \frac{e^{i\kappa a_j} - e^{-i\kappa a_{j-1}}}{i\kappa} \\ &\xrightarrow{\kappa \rightarrow \pm\infty} 0. \end{aligned}$$

Ainsi il existe $\kappa_0 > 0$ tel que si $|\kappa| \geq \kappa_0$ alors on a

$$\left| \int_a^b e^{i\kappa x} g(x) \, dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dans ce cas on a alors

$$\left| \int_a^b e^{i\kappa x} f(x) \, dx \right| \leq \varepsilon,$$

ce qui donne le résultat annoncé. \square

Démonstration pour une fonction L^1 . Soit $\varepsilon > 0$. Comme l'ensemble des fonctions C^1 à supports compacts dans $]a, b[$ est dense dans $L^1(a, b)$, il existe g de classe C^1 et à support compact dans $]a, b[$ telle que

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme le résultat est connu pour une fonction C^1 , il existe $\kappa_0 > 0$ tel que pour tout $\kappa \in \mathbb{R}$ vérifiant $|\kappa| \geq \kappa_0$ on a

$$\left| \int_a^b e^{i\kappa x} g(x) \, dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On conclut alors comme précédemment. \square

Comme conséquence directe du lemme 3.7, on obtient alors le résultat de décroissance suivant pour les coefficients de Fourier :

Proposition 3.8. *Soit $f \in E^1$. Alors on a*

$$c_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} 0.$$

Bien entendu, via (3.3) ou par des preuves analogues, on obtient des résultats de décroissance analogues pour les coefficients trigonométriques $a_n(f)$ et $b_n(f)$.

3.3 Interprétation (pré-)Hilbertienne

On s'intéresse dans ce paragraphe aux fonctions de carrés intégrables. On notera E^2 soit pour l'espace des fonctions 2π -périodiques et continues par morceaux, soit pour l'espace des fonctions 2π -périodiques et de carré localement intégrable (quotienté par la relation d'égalité presque partout).

Définition 3.9. Pour $f, g \in E^2$ on pose

$$\langle f, g \rangle_{2,\text{per}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} \, dx,$$

puis

$$\|f\|_{2,\text{per}} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{2,\text{per}}}.$$

On observe que $E_N \subset E^2$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ et que la définition 3.9 étend la définition de la section 2.3.

Proposition 3.10. *L'application $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$ définit un produit scalaire hermitien sur E^2 .*

Proposition 3.11. *Soit $f \in E^2$. Alors $S_N(f)$ est le projeté orthogonal de f sur E_N (on a $S_N(f) \in E_N$ et $\langle f - S_N(f), g \rangle = 0$ pour tout $g \in E_N$). En particulier,*

$$\|f\|_{2,\text{per}}^2 = \|S_N(f)\|_{2,\text{per}}^2 + \|f - S_N(f)\|_{2,\text{per}}^2.$$

Démonstration. Pour $n \in \llbracket -N, N \rrbracket$ on a

$$\langle f - S_N(f), e_n \rangle_{2,\text{per}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_N(f)(x)) e^{-inx} dx = c_n(f) - c_n(f) = 0.$$

Par linéarité, on obtient que $\langle f - S_N(f), g \rangle = 0$ pour tout $g \in E_N$. En particulier, avec $g = S_N(f)$ on obtient

$$\begin{aligned} \|f\|_{2,\text{per}}^2 &= \|(f - S_N(f)) + S_N(f)\|_{2,\text{per}}^2 \\ &= \|f - S_N(f)\|_{2,\text{per}}^2 + \|S_N(f)\|_{2,\text{per}}^2 + 2 \operatorname{Re} \langle f - S_N(f), S_N(f) \rangle_{2,\text{per}} \\ &= \|f - S_N(f)\|_{2,\text{per}}^2 + \|S_N(f)\|_{2,\text{per}}^2. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Proposition 3.12 (Inégalité de Bessel). *Soit $f \in E^2$. Alors on a*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leq \|f\|_{2,\text{per}}^2.$$

Démonstration. D'après les propositions 2.8 et 3.11 on a pour $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=-N}^N |c_n(f)|^2 = \|S_N(f)\|_{2,\text{per}}^2 \leq \|f\|_{2,\text{per}}^2.$$

On conclut en prenant la limite $N \rightarrow \infty$. □

3.4 Exemples de calculs de coefficients de Fourier

Dans ce paragraphe on donne quelques premiers exemples de calculs explicites de séries de Fourier. D'autres exemples apparaîtront dans la suite du chapitre ou pourront être calculés en exercices.

On commence par remarquer que si f est un polynôme trigonométrique, alors on a $S(f) = f$.

Exemple 3.13. On considère la fonction 2π -périodique f qui vaut 1 sur $[0, \pi[$ et -1 sur $[-\pi, 0[$. Si on omet les multiples de π (qui ne jouent pas de rôle pour le calcul des coefficients de Fourier), f est impaire. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a alors $a_n = 0$ et

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Ainsi on a

$$S(f)(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{m \in \mathbb{N}} \frac{\sin((2m+1)x)}{(2m+1)}.$$

Exemple 3.14. On considère la fonction 2π -périodique f telle que $f(x) = x$ pour tout $x \in]-\pi, \pi]$. Alors f est (presque partout égale à une fonction) impaire. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a alors $a_n = 0$ et

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin(nx) \, dx = \frac{2}{\pi} \left[-x \frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^\pi + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{n} \, dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Ainsi on a

$$S(f)(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2(-1)^{n+1} \sin(nx)}{n}.$$

On observe que pour ces exemples avec des fonctions à valeurs réelles, on est finalement revenu aux coefficients trigonométriques pour les calculs.

4 Convergences ponctuelle de la série de Fourier

Dans cette section et dans les suivantes, on cherche dans quelle mesure le polynôme trigonométrique $S_N(f)$ est une bonne approximation de f quand N devient grand.

4.1 Noyau de Dirichlet

Pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on définit le noyau de Dirichlet par

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx}.$$

La raison pour laquelle on introduit cette quantité est qu'on a

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) &= \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx} = \sum_{n=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{in(x-y)} f(y) \, dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi D_N(x-y) f(y) \, dy. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Les propriétés de base de ce noyau de Dirichlet sont les suivantes.

Proposition 4.1. *Soit $N \in \mathbb{N}$.*

- (i) *La fonction D_N est paire.*
- (ii) *On a*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi D_N(x) \, dx = 1. \tag{4.2}$$

- (iii) *Pour $x \in \mathbb{R}$ on a*

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{(2N+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ 2N+1 & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases} \tag{4.3}$$

Démonstration. Le premier point est clair. Le second résulte de la proposition 2.5 appliquée avec $f = D_N$ et $n = 0$ (en fait, il est plus rapide de refaire le calcul direct). La troisième propriété est claire pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$. Sinon on a

$$\begin{aligned} D_N(x) &= e^{-iNx} \sum_{n=0}^{2N} (e^{ix})^n = e^{-iNx} \frac{e^{i(2N+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \\ &= \frac{e^{-iNx} e^{\frac{i(2N+1)x}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}} \frac{e^{\frac{i(2N+1)x}{2}} - e^{-\frac{i(2N+1)x}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{(2N+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}. \end{aligned} \quad \square$$

N.B. : cette astuce de factoriser par l'angle moitié est à retenir...

Définition 4.2. Soient f et g deux fonctions périodiques sur \mathbb{R} . Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est 2π -périodique. Si cette fonction appartient à E^1 on pose

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y) dy.$$

La définition est inchangée si on intègre sur n'importe quel autre intervalle de longueur 2π de \mathbb{R} .

Remarque 4.3. En faisant le changement de variables $\eta = x - y$, $d\eta = -dy$, on note que le produit de convolution $(f * g)(x)$ est bien défini si et seulement si $(g * f)(x)$ l'est, et dans ce cas leurs valeurs coïncident.

Dans le contexte présent, (4.1) dit que $S_N(f)$ est le produit de convolution de D_N avec f .

4.2 Convergence ponctuelle

En utilisant les propriétés du noyau de Dirichlet, on peut maintenant montrer la convergence ponctuelle de la série de Fourier d'une fonction C^1 par morceaux.

Théorème 4.4 (Théorème de Dirichlet). *Soit f une fonction 2π -périodique et C^1 par morceaux. Alors la suite de fonctions $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a*

$$S_N(f)(x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2},$$

où $f(x^-)$ et $f(x^+)$ désignent les limites à gauche et à droite de f en x . En particulier, si f est continue et C^1 par morceaux alors $S_N(f)$ converge simplement vers f quand N tend vers $+\infty$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$S_n(f)(x) - \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(y) f(x-y) dy - \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

Puisque D_N est paire on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 D_N(y) dy = \frac{1}{2},$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 D_N(y) f(x-y) dy - \frac{f(x^+)}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 D_N(y) (f(x-y) - f(x^+)) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi D_N(y) (f(x+y) - f(x^+)) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin\left(\frac{(2N+1)y}{2}\right) \frac{f(x+y) - f(x^+)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)} dy. \end{aligned}$$

La fonction

$$y \mapsto \frac{f(x+y) - f(x^+)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}$$

est continue par morceaux sur $]0, \pi]$ et admet une limite finie en 0, donc elle s'étend en une fonction continue par morceaux sur $[0, \pi]$. D'après le lemme de Riemann-Lebesgue (proposition ??), on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin\left(\frac{(2N+1)y}{2}\right) \frac{f(x+y) - f(x^+)}{\sin\left(\frac{y}{2}\right)} dy \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

On obtient de la même façon que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi D_N(y) f(x-y) dy - \frac{f(x^-)}{2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

D'où le résultat. □

Remarque 4.5. Attention, il existe des fonctions continues dont la série de Fourier n'a pas de limite simple. Voir par exemple l'exercice 4 p. 264 de [Gourdon].

4.3 Exemples d'applications pour des calculs de séries

Au delà de son intérêt évident pour la théorie des séries de Fourier, le théorème de Dirichlet a déjà des applications pour le calcul de sommes de séries numériques.

Exemple 4.6. On considère sur \mathbb{R} la fonction 2π -périodique f telle que

$$\forall x \in]-\pi, \pi], \quad f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}.$$

On note que f est paire, donc $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) dx = \frac{4}{3}$$

et, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(nx) \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) dx \\ &= -\frac{2}{\pi^3} \int_0^\pi \cos(nx) x^2 dx \\ &= \dots \quad (\text{double intégration par parties}) \\ &= \frac{(-1)^{n+1} 4}{\pi^2 n^2}. \end{aligned}$$

Comme f est continue et C^1 par morceaux, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$1 - \frac{x^2}{\pi^2} = \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos(nx).$$

Appliqué en $x = \pi$ cela prouve que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Appliqué en $x = 0$ cela donne

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Ces deux résultats donnent également

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} - \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^2} \right) = \frac{\pi^2}{8}.$$

4.4 Phénomène de Gibbs

On revient dans ce paragraphe sur l'exemple 3.13. Pour $M \in \mathbb{N}$ on a

$$S_{2M}(f) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\sin((2m+1)x)}{2m+1}.$$

D'après le théorème 4.4 on a

$$S_{2M}(f) \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & \text{if } x \in]0, \pi[+ 2\pi\mathbb{Z}, \\ -1 & \text{if } x \in]-\pi, 0[+ 2\pi\mathbb{Z}, \\ 0 & \text{if } x \equiv 0 \pmod{\pi}. \end{cases} \quad (4.4)$$

En particulier, la limite de $S_{2M}(x)$ est dans $[-1, 1]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On observe pourtant (voir figure 1) que

$$\liminf_{M \rightarrow +\infty} \|S_{2M}(f)\|_{\infty} > 1.$$

En effet, on peut calculer

$$\begin{aligned} S_{2M}\left(\frac{\pi}{2M}\right) &= \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{M} + \frac{\pi}{2M}\right)}{2m+1} \\ &= \frac{4}{\pi M} \sum_{m=0}^{M-1} \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{M}\right)}{\frac{2m}{M}} + \mathcal{O}_{M \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{M}\right) \\ &\xrightarrow{M \rightarrow +\infty} \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin(s\pi)}{2s} ds = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt. \end{aligned}$$

Or on peut vérifier (par exemple par approximation numérique) que

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt > \frac{\pi}{2}.$$

Ce phénomène, qui n'est absolument pas en contradiction avec la convergence simple rappelée en (4.4), est appelé *phénomène de Gibbs*, et doit être pris en compte en traitement du signal.

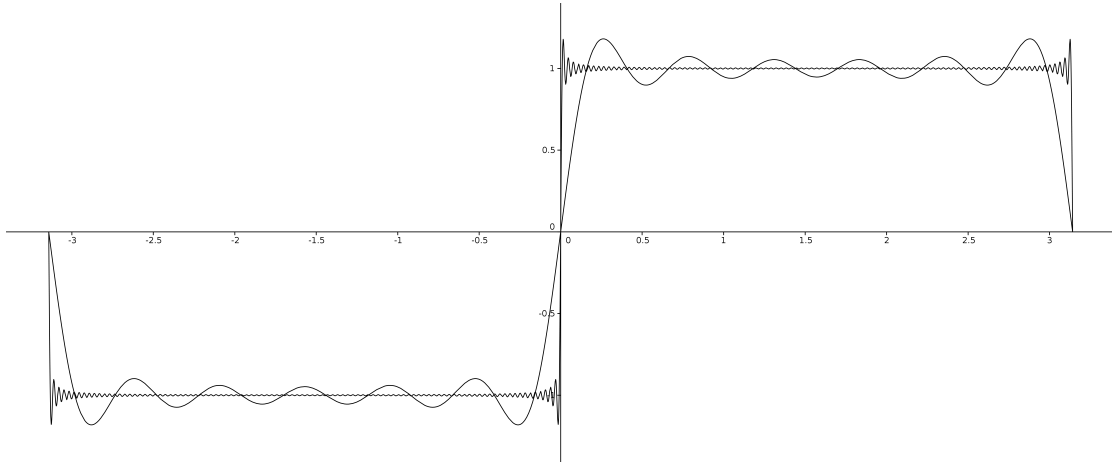


FIGURE 1 – $S_{10}(f)$ et $S_{200}(f)$

4.5 Convergence normale pour les fonctions continues et C^1 par morceaux

On a vu que la série de Fourier d'une fonction C^1 par morceaux converge ponctuellement, mais qu'il peut y avoir quelques subtilités si la fonction n'est pas continue. Si on suppose de plus que la fonction considérée est bien continue, alors il n'y a plus aucun problème et la convergence est valable en un sens très favorable.

Théorème 4.7. *Soit f une fonction 2π -périodique, continue, et C^1 par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge normalement vers f .*

Démonstration. On note f' une fonction 2π -périodique qui coïncident avec la dérivée de f . D'après la proposition 3.6, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Bessel (proposition 3.12) on a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |c_n(f)| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{|c_n(f')|}{|n|} \leq \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |c_n(f')|^2} \leq \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2}} \|f'\|_{2,\text{per}}.$$

Cela prouve que la série de Fourier de f converge normalement. Comme $S(f)$ converge simplement vers f d'après le théorème de Dirichlet (théorème 4.4), on obtient que $S(f)$ converge normalement vers f . \square

5 Convergence quadratique - Identité de Parseval

On s'intéresse dans cette section à la convergence d'une série de Fourier au sens de la norme quadratique (voir la définition 3.9). On commence par le cas simple d'une fonction pour laquelle on a déjà convergence uniforme.

Proposition 5.1. *Soit f une fonction continue, C^1 par morceaux et 2π -périodique. Alors on a*

$$\|f - S_N(f)\|_{2,\text{per}}^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Démonstration. D'après le théorème 4.7 on a

$$\|f - S_N(f)\|_{2,\text{per}}^2 \leq \|f - S_N(f)\|_{\infty} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

D'où le résultat. □

Pour généraliser ce résultat à toute fonction de E^2 , on montre que les fonctions considérées à la proposition 5.1 sont denses dans E^2 pour la norme quadratique.

Proposition 5.2. *Soient $f \in E^2$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe une fonction g continue, C^1 par morceaux et 2π -périodique telle que*

$$\|f - g\|_{2,\text{per}} \leq \varepsilon.$$

Démonstration. • On commence par supposer que f est continue. Elle est alors uniformément continue. Il existe donc $m \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x_1 - x_2| \leq \frac{2\pi}{m}$ on a

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$ on note alors $x_k = -\pi + \frac{2k\pi}{m}$ et on note g l'unique fonction 2π -périodique telle que g coïncide avec f en x_k pour tout $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$ et est affine sur $[x_{k-1}, x_k]$ pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$. Ainsi g est continue, C^1 par morceaux et 2π -périodique. En outre pour $x \in [-\pi, \pi]$ et $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$ tel que $x \in [x_{k-1}, x_k]$ on a

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f(x_k)| + |g(x) - g(x_k)| \leq \varepsilon.$$

On a alors $\|f - g\|_{2,\text{per}} \leq \varepsilon$, ce qui donne le résultat dans ce cas.

• On suppose maintenant que f est continue par morceaux. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_k \in [-\pi, \pi]$ tels que $-\pi = a_0 < a_1 < \dots < a_k = \pi$ et pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ la restriction de f à $]a_{j-1}, a_j[$ s'étend par continuité en une fonction continue sur $[a_{j-1}, a_j]$. On note $\delta = \min_{1 \leq j \leq k} (a_j - a_{j-1}) > 0$. Pour $\eta \in]0, \delta[$ on considère l'unique fonction 2π -périodique g_η telle que pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$:

- g_η coïncide avec f sur $]a_{j-1}, a_j - \eta]$;
- g_η est égale en a_j à la limite à droite de f ;
- g_η est affine sur $[a_j - \eta, a_j]$.

Ainsi g_η est continue par morceaux. On note maintenant $M = \|f\|_\infty$. On a alors

$$\|f - g_\eta\|_{2,\text{per}}^2 \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^k \int_{a_{j-1}}^{a_j} |f(x) - g_\eta(x)|^2 dx \leq \frac{k\eta(2M)^2}{2\pi}.$$

Pour $\eta > 0$ assez petit on a alors $\|f - g_\eta\|_{2,\text{per}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. D'après la première étape, il existe g continue, C^1 par morceaux et 2π -périodique telle que $\|g - g_\eta\|_{2,\text{per}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, ce qui donne le résultat dans ce cas.

• On suppose enfin que f est dans L^2_{loc} . On sait que l'ensemble des fonctions continues à supports compacts est dense dans $L^2(-\pi, \pi)$. Une telle fonction peut être étendue en une fonction continue et 2π -périodique sur \mathbb{R} . Or on vient de voir qu'une fonction continue peut être approchée pour la norme quadratique par une fonction qui est de plus C^1 par morceaux. Cela prouve qu'on peut approcher une fonction L^2_{loc} par une fonction continue, C^1 par morceaux et 2π -périodique et conclut la démonstration. □

Théorème 5.3. *Soit $f \in E^2$. Alors on a*

$$\|f - S_N(f)\|_{2,\text{per}}^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Soit g donnée par la proposition 5.2. D'après la proposition 5.1, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que pour $N \geq M$ on a

$$\|S_N(g) - g\|_{2,\text{per}} \leq \varepsilon.$$

D'après l'inégalité de Bessel (proposition 3.12) on a également

$$\|S_N(f) - S_N(g)\|_{2,\text{per}} = \|S_N(f - g)\|_{2,\text{per}} \leq \|f - g\|_{2,\text{per}} \leq \varepsilon.$$

D'où

$$\|f - S_N(f)\|_{2,\text{per}} \leq \|f - g\|_{2,\text{per}} + \|g - S_N(g)\|_{2,\text{per}} + \|S_N(g) - S_N(f)\|_{2,\text{per}} \leq 3\varepsilon.$$

Cela prouve que $S_N(f)$ tend vers f au sens de la norme quadratique. \square

Théorème 5.4 (Identité de Parseval). *Pour $f \in \mathbf{E}^2$ on a*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \|f\|_{2,\text{per}}^2.$$

Démonstration. D'après la proposition 2.8 et le théorème 5.3 on a

$$\sum_{n=-N}^N |c_n(f)|^2 = \|S_N(f)\|_{2,\text{per}}^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \|f\|_{2,\text{per}}^2.$$

\square

Remarque 5.5. Avec les coefficients trigonométriques on obtient

$$\|f\|_{2,\text{per}}^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2).$$

Remarque 5.6. Pour $f, g \in \mathbf{E}^2$ on a également

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} \, dx = \langle f, g \rangle_{2,\text{per}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) \overline{c_n(g)}.$$

On observe que l'identité de Parseval redonne dans le cadre L^2 la décroissance des coefficients de Fourier :

Corollaire 5.7. *Pour $f \in \mathbf{E}^2$ on a*

$$|c_n(f)| \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} 0.$$

On note enfin que l'identité de Parseval permet également de calculer des séries numériques.

Exemple 5.8. On reprend les calculs de l'exemple 4.6. Alors l'identité de Parseval donne

$$\frac{8}{15} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \, dx = \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{16}{\pi^4 n^4},$$

et donc

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

6 Convergence au sens de Cesàro d'une série de Fourier

Dans cette section, on revient sur le cas des fonctions continues. On a vu que la série de Fourier d'une fonction f continue ne converge pas forcément. C'est ainsi, et l'on n'y pourra rien. Le but est ici de montrer qu'on peut tout de même approcher uniformément n'importe quelle fonction continue par une suite de polynômes trigonométriques. Cette suite ne sera donc pas donnée directement par la suite des sommes partielles de Fourier. Mais on va tout de même utiliser ces sommes partielles pour construire une nouvelle suite de polynômes trigonométriques ayant de meilleures propriétés. On note que l'hypothèse de continuité sur f est nécessaire pour avoir convergence uniforme vers f d'une suite de polynômes trigonométriques.

6.1 Suite d'approximation de l'unité

Pour définir notre nouvelle suite de polynômes trigonométriques, on va considérer le produit de convolution (voir la définition 4.2) de f avec un noyau ayant de meilleures propriétés que le noyau de Dirichlet. La propriété dont on a besoin est la suivante.

Proposition 6.1. *Soit $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E^1 , vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(x) dx = 1,$$

et pour tout $\varepsilon \in]0, \pi[$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \rho_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1. \quad (6.1)$$

Soit f une fonction continue et 2π -périodique. Alors le produit de convolution

$$(\rho_n * f) : x \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(x-y)f(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(y)f(x-y) dy \quad (6.2)$$

est bien défini sur \mathbb{R} pour tout $n \in \mathbb{N}$, cela définit une fonction continue et 2π -périodique, et on a

$$\|(\rho_n * f) - f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

En outre pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\|\rho_n * f\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$.

Démonstration. • Comme f est continue et 2π -périodique, elle est en particulier bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $y \mapsto \rho(x-y)f(y)$ et $y \mapsto \rho_n(y)f(x-y)$ sont dans E^1 . Ainsi les deux intégrales (6.2) sont bien définies. En outre, par le changement de variable $\eta = x - y$ et par 2π -périodicité, ces deux intégrales sont égales. Ainsi le produit de convolution $(\rho_n * f)$ est bien défini.

• Comme f est continue et 2π -périodique, elle est uniformément continue. Pour $\eta > 0$ on note

$$\omega(\eta) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in \mathbb{R} \\ |x_1 - x_2| \leq \eta}} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

Alors

$$\omega(\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} |(\rho_n * f)(x) - (\rho_n * f)(x_0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(y) |f(x_0 - y) - f(x - y)| \, dy \\ &\leq \frac{\omega(x - x_0)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\rho_n(y)| \, dy \\ &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0. \end{aligned}$$

Cela prouve que la fonction $(\rho_n * f)$ est continue sur \mathbb{R} .

• Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|(\rho_n * f)(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(y) |f(x - y) - f(x)| \, dy.$$

On a d'une part

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\eta}^{\eta} \rho_n(y) |f(x - y) - f(x)| \, dy \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\eta}^{\eta} \rho_n(y) \omega(\eta) \, dy \leq \omega(\eta),$$

et d'autre part

$$\frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi] \setminus [-\eta, \eta]} \rho_n(y) |f(x - y) - f(x)| \, dy \leq \frac{\|f\|_{\infty}}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi] \setminus [-\eta, \eta]} \rho_n(y) \, dy \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta \in]0, \pi[$ tel que $\omega(\eta) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ puis, η étant ainsi fixé, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{\|f\|_{\infty}}{2\pi} \int_{[-\pi, \pi] \setminus [-\eta, \eta]} \rho_n(y) \, dy \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tout cela étant uniforme en x , on a alors pour tout $N \geq N_0$

$$\|(\rho_n * f) - f\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

Cela prouve que $(\rho_n * f)$ converge uniformément vers f . Pour la dernière assertion on observe simplement que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|(\rho_n * f)(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(y) |f(x - y)| \, dy \leq \frac{\|f\|_{\infty}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \rho_n(y) \, dy = \|f\|_{\infty}.$$

□

6.2 Théorème de Fejér

On construit maintenant notre nouvelle suite de polynômes trigonométriques. L'idée est de considérer la moyenne au sens de Cesàro de la suite $(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$. Pour $N \in \mathbb{N}$ on pose

$$\sigma_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f).$$

On observe que $\sigma_N(f)$ est alors le produit de convolution de f avec le noyau

$$K_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n$$

(voir Figure 2).

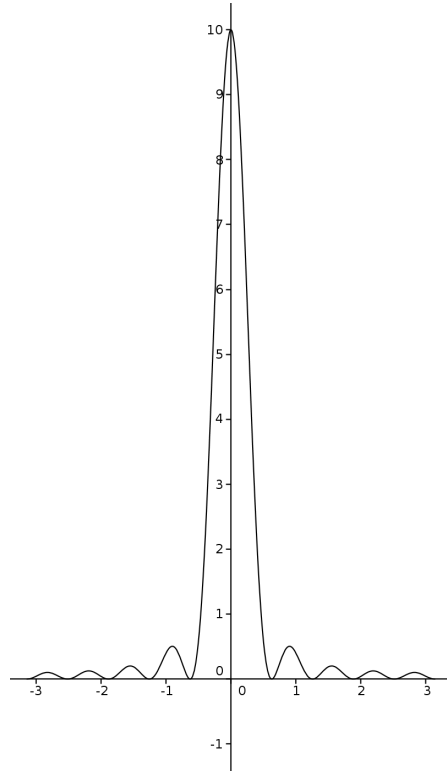


FIGURE 2 – K_{10}

Théorème 6.2 (Théorème de Fejér). *Soit f une fonction 2π -périodique continue. Alors $\sigma_N(f)$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} quand N tend vers $+\infty$.*

Le théorème 6.2 est conséquence de la proposition 6.1 et du résultat suivant.

Proposition 6.3. *La suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'approximation de l'unité 2π -périodique (elle vérifie les hypothèses de la proposition 6.1).*

Démonstration. D'après (4.2) on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = 1. \quad (6.3)$$

D'autre part, d'après (4.3), on obtient pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$K_n(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{N \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{Im}\left(e^{inx} e^{i\frac{x}{2}}\right).$$

Or

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{inx} e^{i\frac{x}{2}} = e^{i\frac{x}{2}} \frac{e^{iNx} - 1}{e^{ix} - 1} = \frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} e^{\frac{iNx}{2}},$$

donc

$$K_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{Nx}{2}\right)^2}{N \sin\left(\frac{x}{2}\right)^2}. \quad (6.4)$$

On observe en particulier que $K_N(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Enfin pour $\varepsilon \in]0, \pi[$ on a

$$\sup_{\varepsilon \leq |x| \leq \pi} K_n(x) \leq \frac{1}{n \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qui assure en particulier que la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la propriété (6.1). \square

Remarque 6.4. D'après la proposition 6.1 on a $\|\sigma_N(f)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. C'est à comparer au phénomène de Gibbs, évoqué au paragraphe 4.4.

Le théorème 6.2 n'est pas à proprement parler un résultat sur la série de Fourier de f . On en déduit tout de même le résultat suivant.

Corollaire 6.5. *Soit f une fonction continue et 2π -périodique. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si la suite $(S_n(f)(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors la limite est nécessairement $f(x)$.*

On rappelle que même pour une fonction continue, la série de Fourier ne converge pas forcément en tout point. Néanmoins, ce que dit ce corollaire est que si elle converge vers quelque chose en un point x , c'est nécessairement vers la limite attendue, à savoir $f(x)$. C'est déjà ça. On note que ce n'est pas le cas pour la série de Taylor d'une fonction régulière au voisinage d'un point, qui peut converger ponctuellement vers autre chose que la fonction de départ.

6.3 Premières conséquences du théorème de Fejér

Le théorème de Fejér montre que toute fonction continue et 2π -périodique peut être approchée uniformément par une suite de polynômes trigonométriques, même si on ne peut pas forcément utiliser la suite $(S_N(f))$ attendue. Ce résultat est analogue au théorème de Weierstrass pour les polynômes usuels sur un segment de \mathbb{R} .

Théorème 6.6 (Théorème de Weierstrass trigonométrique). *Pour toute fonction f continue et 2π -périodique sur \mathbb{R} , il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers f . Autrement dit, l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans l'espace des fonctions continues et 2π -périodiques.*

À ce stade on n'a pas encore établi de correspondance bien claire entre les fonctions et leurs suites de coefficients de Fourier. Le théorème de Fejér assure tout de même qu'une fonction continue et 2π -périodique est complètement caractérisée par ses coefficients de Fourier.

Proposition 6.7. *Soit f une fonction continue et 2π -périodique telle que $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Alors f est nulle.*

Démonstration. On a $\sigma_N(f) = 0$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. Or, d'après le théorème 6.2, $\sigma_N(f)$ converge uniformément vers f . Cela implique que $f = 0$. \square

7 Fonctions T -périodiques

Soit $T > 0$. Si f est une fonction T -périodique, alors la fonction

$$g : x \mapsto f\left(\frac{xT}{2\pi}\right)$$

est 2π -périodique. On pose

$$c_{T,n}(f) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-\frac{2i\pi nx}{T}} f(x) dx, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

$$a_{T,n}(f) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$b_{T,n}(f) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

Ce sont exactement les coefficients de Fourier de g tels qu'on les a définis précédemment. De même, on pose

$$\begin{aligned} S_{T,N}(f)(x) &= \sum_{n=-N}^N c_{T,n}(f) e^{\frac{2i\pi nx}{T}} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_{T,n}(f) \left(\cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) + b_{T,n}(f) \sin\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) \right). \end{aligned}$$

Ainsi, en appliquant à g tous les théorèmes de convergence pour les séries de Fourier, on obtient des résultats analogues pour la convergence de $S_{T,N}(f)$ vers f .

Si une fonction T -périodique f est de carré intégrable sur $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ on pose

$$\|f\|_{2,T}^2 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2 dx.$$

L'identité de Parseval s'écrit alors

$$\|f\|_{L_T^2}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_{T,n}(f)|^2.$$

Pour alléger les notations, on peut éventuellement noter ω la pulsation $\frac{2\pi}{T}$.

8 Exemples d'applications des séries de Fourier

8.1 Équation de la chaleur sur le cercle

On a motivé les séries de Fourier par la résolution d'équations aux dérivées partielles pour des fonctions périodiques (fonctions sur le cercle), et en particulier l'équation de la chaleur. On montre maintenant qu'on a effectivement atteint cet objectif.

Théorème 8.1. Soit $u_0 \in L^2_{\text{per}}$. Alors il existe une unique fonction $u \in C^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$, 2π -périodique par rapport à $x \in \mathbb{R}$, telle que

$$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \partial_t u(t, x) = \partial_{xx} u(t, x) \quad (8.1)$$

et

$$\|u(t, \cdot) - u_0\|_{L^2_{\text{per}}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0. \quad (8.2)$$

En outre, u est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Démonstration. • On suppose que u est une solution. Soit $t > 0$. Puisque $u(t, \cdot)$ est C^2 et 2π -périodique on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx},$$

où pour $n \in \mathbb{Z}$ on a noté

$$c_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} u(t, x) dx.$$

En outre, d'après le théorème 4.7, la convergence de la série est normale. Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $t > 0$. Comme u est de classe C^1 sur le compact $[\frac{t}{2}, 2t] \times [-\pi, \pi]$, on obtient par le théorème de dérivation sous l'intégrale que la fonction c_n est dérivable en t et

$$c'_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} \partial_t u(t, x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} \partial_{xx} u(t, x) dx.$$

D'après la proposition 3.4 on a alors

$$c'_n(t) = -n^2 c_n(t).$$

On en déduit qu'il existe $c_n \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $t > 0$ on a

$$c_n(t) = c_n e^{-n^2 t}.$$

On note $c_n(0)$ les coefficients de Fourier de u_0 . D'après l'identité de Parseval (Théorème 5.4) on a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(t) - c_n(0)|^2 = \|u(t, \cdot) - u_0\|_{L^2_{\text{per}}}^2 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0,$$

donc $c_n = c_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ on a

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in(x-y)} u_0(y) e^{-n^2 t} dy. \quad (8.3)$$

Soient $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Comme

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{in(x-y)} u_0(y) e^{-n^2 t}| dy < +\infty, \quad (8.4)$$

on peut intervertir série et intégrale et écrire

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in(x-y)} e^{-n^2 t} u_0(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(t, x-y) u_0(y) dy,$$

où pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ on a noté

$$K(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx} e^{-n^2 t}.$$

Cela prouve que le problème (8.1)-(8.2) admet au plus une solution.

• Inversement, montrons que la fonction u ainsi définie est bien solution. Pour $n \in \mathbb{Z}$, $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$K_n(t, x) = e^{inx} e^{-n^2 t}.$$

Cela définit une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Soit $a > 0$. Pour $j, k \in \mathbb{N}$ et $(t, x) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}$ on a

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial t^j} \frac{\partial^k}{\partial x^k} K_n(t, x) \right| = n^{2j+k} e^{-n^2 a}.$$

Le majorant ne dépend pas de (t, x) et est le terme général d'une série convergente. D'après le théorème de dérivation terme à terme appliqué sur $[a, +\infty[\times \mathbb{R}$ pour tout $a > 0$, on obtient donc que K est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et pour $j, k \in \mathbb{N}$ et $(t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on a

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j} \frac{\partial^k}{\partial x^k} K(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-n^2)^j (in)^k e^{inx} e^{-n^2 t}.$$

En particulier,

$$\partial_t K = \partial_{xx} K.$$

Pour tout $y \in [-\pi, \pi]$ la fonction $(t, x) \mapsto K(t, x - y)u_0(y)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. En outre, pour $a > 0$ et $j, k \in \mathbb{N}$ il existe $C > 0$ tel que pour tout $t \geq a$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in [-\pi, \pi]$ on a

$$\left| \frac{\partial^j}{\partial t^j} \frac{\partial^k}{\partial x^k} K(t, x - y)u_0(y) \right| \leq C |u_0(y)|.$$

Par le théorème de dérivation sous l'intégrale, on en déduit que u est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et que pour tous $j, k \in \mathbb{N}$ et $(t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on a

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j} \frac{\partial^k}{\partial x^k} u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^{j+k}}{\partial t^j \partial x^k} K(t, x - y)u_0(y) dy.$$

En particulier,

$$\partial_t u = \partial_{xx} u.$$

Il reste à montrer (8.2). Pour $t > 0$ on note $c_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}$, les coefficients de Fourier de $u(t, \cdot)$. On note également $c_n(0)$, $n \in \mathbb{Z}$, ceux de u_0 . Soient $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. On a toujours (8.4). Par interversion série-intégrale on retrouve l'expression (8.3) pour u . On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$c_n(t) = e^{-n^2 t} c_n(0).$$

Par l'identité de Parseval,

$$\|u(t, \cdot) - u_0\|_{L_{\text{per}}^2}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 - e^{-n^2 t})^2 |c_n(0)|^2.$$

Pour tout $t > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$ on a $(1 - e^{-n^2 t})^2 |c_n(0)|^2 \leq |c_n(0)|^2$, et la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(0)|^2$ converge par l'inégalité de Parseval. Par le théorème de convergence dominée on obtient que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|u(t, \cdot) - u_0\|_{L_{\text{per}}^2}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lim_{t \rightarrow 0} (1 - e^{-n^2 t})^2 |c_n(0)|^2 = 0.$$

Cela conclut la démonstration. \square

Remarque 8.2. Avec les notations de la démonstration on observe que pour tout $t > 0$ on a

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^2_{\text{per}}}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2n^2 t} |c_n(0)|^2 \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(0)|^2 = \|u_0\|_{L^2_{\text{per}}}^2.$$

8.2 Inégalité de Wirtinger

Proposition 8.3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit f une fonction de classe C^1 de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On suppose que $f(a) = f(b)$ et $\int_a^b f(x) dx = 0$. Alors on a

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \left(\frac{b-a}{2\pi}\right)^2 \int_a^b |f'(x)|^2 dx.$$

Démonstration. Pour $x \in [0, 2\pi]$ on pose

$$g(x) = f\left(a + \frac{(b-a)x}{2\pi}\right).$$

Cela définit une fonction g de classe C^1 sur $[0, 2\pi]$ telle que $g(0) = g(2\pi)$ et $\int_0^{2\pi} g(x) dx = 0$. g se prolonge alors en une fonction 2π -périodique sur \mathbb{R} , continue et C^1 par morceaux. On note $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ses coefficients de Fourier. D'après la proposition 3.6, les coefficients de Fourier de g' sont les inc_n , $n \in \mathbb{Z}$. D'après l'identité de Parseval on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$$

et

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g'(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n|^2.$$

En outre on a

$$c_0 = \int_0^{2\pi} g(x) dx = 0,$$

donc

$$\int_0^{2\pi} |g(x)|^2 dx \leq \int_0^{2\pi} |g'(x)|^2 dx.$$

D'où le résultat après le changement de variable $x = a + \frac{(b-a)y}{2\pi}$. □

8.3 Inégalité iso-périmétrique

Proposition 8.4. Soit $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 telle que $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ et $|\gamma'(t)| = 1$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$ (γ est une courbe fermée paramétrée par longueur d'arc). On note

$$A = \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} \gamma(t) \overline{\gamma'(t)} dt$$

(A est l'aire algébrique du domaine enlacé par la courbe γ). Alors on a

$$|A| \leq \pi,$$

avec égalité si et seulement si γ décrit un cercle.

Évidemment, ce résultat n'a de sens que si on peut interpréter géométriquement les quantités impliquées (voir en particulier le théorème de Green-Riemann).

Démonstration. Quitte à remplacer γ par $t \mapsto \gamma(2\pi - t)$ (ce qui revient à changer le sens de parcours de la courbe), on peut supposer que $A \geq 0$. On étend γ en une fonction 2π -périodique de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , qu'on note encore γ . Alors γ est 2π -périodique, continue et C^1 par morceaux. On note c_n , $n \in \mathbb{Z}$, ses coefficients de Fourier. D'après la proposition 3.6, les coefficients de Fourier de γ' sont alors donnés par inc_n , $n \in \mathbb{Z}$. D'après l'identité de Parseval (voir la remarque 5.5), on a alors

$$A = \frac{\pi}{i} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \overline{inc_n} = \pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} n |c_n|^2.$$

Par ailleurs on a

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n|^2.$$

Cela prouve que $A \leq \pi$. En outre on a égalité si et seulement si

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} n |c_n|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n|^2.$$

Ce n'est possible que si $c_n = 0$ pour $n \notin \{0, 1\}$. Dans ce cas, pour tout $t \in [0, 2\pi]$ on a $\gamma(t) = c_0 + c_1 e^{it}$. Ainsi γ décrit le cercle de centre c_0 et de rayon $|c_1|$ (qui est nécessairement égal à 1 puisque $1 = |\gamma'(t)| = |c_1|$). \square

8.4 Formule sommatoire de Poisson

Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (fonction de classe C^∞ telle que $x \mapsto x^j f^{(k)}(x)$ est bornée pour tous $j, k \in \mathbb{N}$) et $\xi \in \mathbb{R}$ on note

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x) dx$$

(c'est la transformée de Fourier de f).

Proposition 8.5. *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors on a*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

En fait, il est suffisant de supposer que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue, intégrable, qu'il existe $\alpha > 1$ et $C > 0$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|)^\alpha} \tag{8.5}$$

(ce qui assure en particulier que la série du membre de gauche est convergente) et

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty.$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $f_n(x) = f(x + 2\pi n)$. f_n est alors une fonction continue sur \mathbb{R} . Soit $R > 0$. Pour $|n| \geq R$ et $x \in [-R, R]$ on a d'après (8.5)

$$|f_n(x)| \leq \frac{C}{(1 + |x + n|)^\alpha} \leq \frac{C}{(1 + |n| - R)^\alpha}.$$

Comme $\alpha > 1$, la série $\sum_{n \geq R} C(1 + n - R)^\alpha$ converge, donc la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n$ converge normalement sur tout compact de \mathbb{R} . En particulier, sa somme S est continue sur \mathbb{R} . En outre pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$S(x + 2\pi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(x + 2\pi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_{n+1}(x) = S(x),$$

donc S est 2π -périodique. On note $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ses coefficients de Fourier. Pour $n \in \mathbb{Z}$ on a

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(x) dx.$$

Puisque la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$, on peut intervertir série et intégrale, de sorte que

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x + 2\pi n) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-inx} f(x) dx = \frac{\hat{f}(n)}{2\pi}.$$

Enfin, on a $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty$, donc la série de Fourier de S converge normalement (vers S , car S est continue). En particulier on a

$$S(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n).$$

D'où le résultat. □

On donne maintenant une application de la formule sommatoire de Poisson. Pour $t > 0$ on pose

$$\theta(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\pi m^2 t}.$$

La fonction θ est une fonction spéciale qui apparaît dans certains problèmes (par exemple l'étude de la fonction ζ de Riemann).

Proposition 8.6. *Pour $t > 0$ on a*

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right).$$

Démonstration. Soit $t > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$f(x) = e^{-\frac{tx^2}{4\pi}}.$$

Alors f est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ on a (voir le calcul de la transformée de Fourier d'une Gaussienne) :

$$\hat{f}(\xi) = \frac{2\pi}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\pi \xi^2}{t}}.$$

D'après la formule sommatoire de Poisson on a alors

$$\theta(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta\left(\frac{1}{t}\right).$$

□

9 Exercices

Exercice 1. Soit $T > 0$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction T -périodique et continue par morceaux.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que

$$\int_{a+kT}^{b+kT} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

2. Montrer que l'intégrale suivante ne dépend pas de la valeurs de $a \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^{a+T} f(x) dx.$$

3. Pour le cas où f est continue, dériver cette quantité par rapport à α et retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 2. Parmi les fonctions suivantes, identifier celles qui sont des polynômes trigonométriques et, le cas échéant, donner leurs coefficients de Fourier exponentiels et trigonométriques :

$$x \mapsto \sin(2x), \quad x \mapsto \cos(x)^2, \quad x \mapsto e^{ix+x}, \quad x \mapsto \cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

Exercice 3. Donner le développement en série entière de la fonction f impaire et 2π -périodique telle que, pour tout $x \in [0, \pi[$,

1. $f(x) = \sin(2x)$;

2. $f(x) = \cos(2x)$;

3. $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

Exercice 4. Calculer la série de Fourier trigonométrique de la fonction 2π -périodique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \pi - |x|$ sur $] - \pi, \pi]$. La série converge-t-elle vers f ?

Exercice 5. Calculer la série de Fourier trigonométrique de la fonction 2π -périodique $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$ sur $[0, 2\pi[$. La série converge-t-elle vers f ?

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique, impaire, telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, \pi[, \\ 0 & \text{si } x = \pi. \end{cases}$$

1. Calculer les coefficients de Fourier trigonométrique de f .

2. Étudier la convergence (simple, uniforme) de la série de Fourier de f .

3. En déduire la valeur des sommes

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique telle que $f(x) = e^x$ pour tout $x \in] - \pi, \pi]$.

1. Calculer les coefficients de Fourier exponentiels de f .

2. Étudier la convergence (simple, uniforme) de la série de Fourier de f .

3. En déduire la valeur des sommes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique définie par

$$\forall x \in [0, 2\pi[, \quad f(x) = (x - \pi)^2$$

1. Calculer les coefficients de Fourier trigonométrique de f .
2. Étudier la convergence de la série de Fourier de f .
3. En déduire les sommes des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π -périodique continûment différentiable, et soit α un réel non nul. On considère l'équation différentielle

$$x'(t) + \alpha x(t) = f(t).$$

Trouver une solution 2π -périodique de cette équation en écrivant $x(t)$ et $f(t)$ sous forme de séries de Fourier trigonométriques. Appliquer ce résultat au cas où $\alpha = 1$ et

$$f(t) = \begin{cases} (t - \frac{\pi}{2})^2 & \text{si } t \in [0, \pi[, \\ - (t - \frac{3\pi}{2})^2 + \frac{\pi^2}{2} & \text{si } t \in [\pi, 2\pi[. \end{cases}$$

Exercice 10. Fejer

Exercice 11. Soit f une fonction continue et 2π -périodique. Montrer que f est de classe C^∞ si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |c_n(f)| = O(|n|^{-k}).$$

Exercice 12. Soit f une fonction continue et 2π -périodique. On suppose que pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a $\|S_N(f)\|_1 \leq 1$. Montrer que $\|f\|_\infty \leq 1$.

Exercice 13. Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$f(x) = \frac{1}{\alpha - \cos(x)}.$$

1. Donner le développement en série de Fourier de f en calculant le développement en série entière d'une fonction bien choisie.

2. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{\alpha - \cos(t)} dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14. Donner une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(2nx) = x.$$

Exercice 15. Soit f une fonction continue et 2π -périodique. Montrer que si $\|S_n(f)\|_\infty \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $\|f\|_\infty \leq 1$.