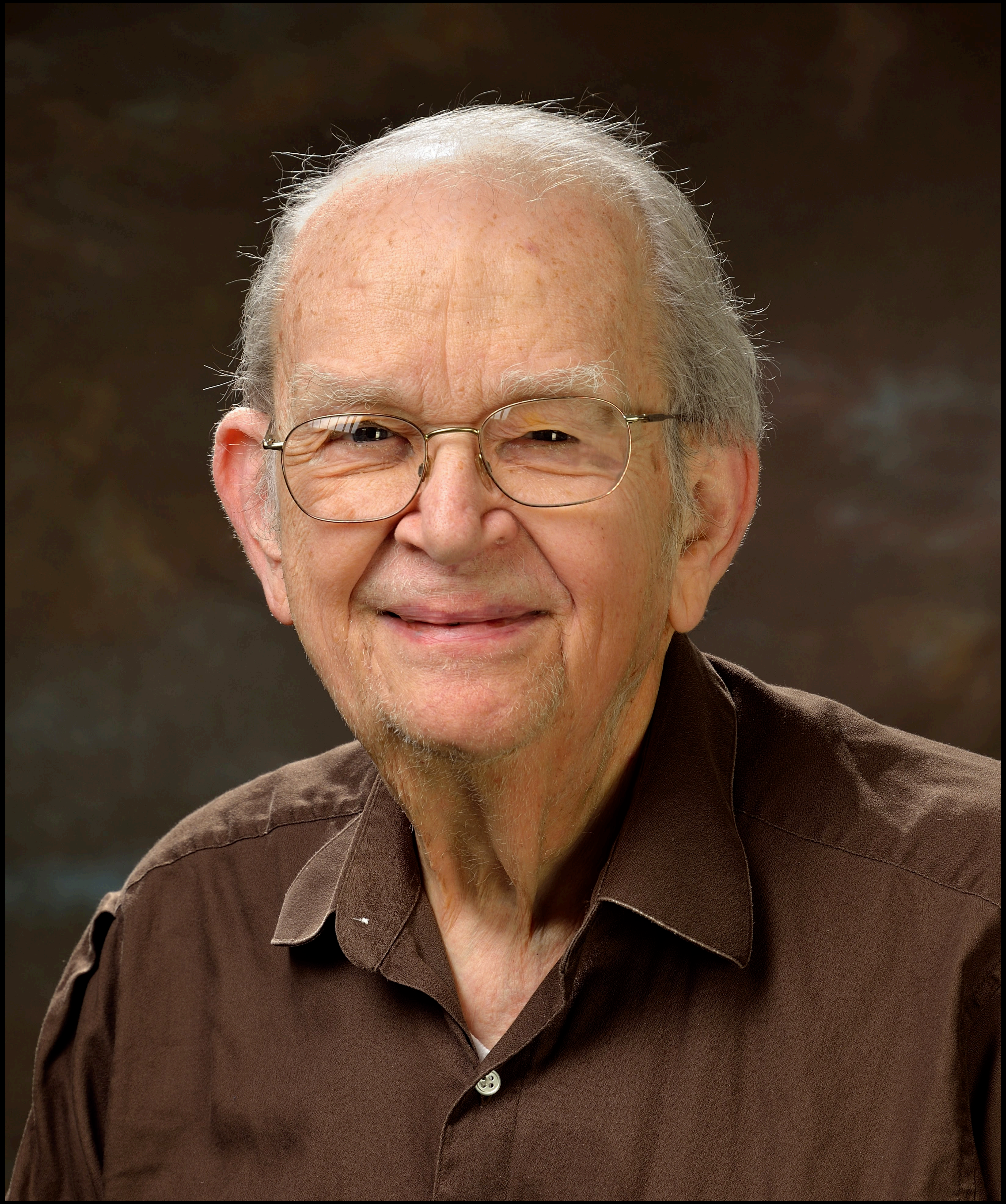
Quand l'algèbre rencontre la topologie

« Cette super créature fait son entrée. »

Je dis à Amanda :
« Tu vois ce mec, je te parie que je l'épouserai… »

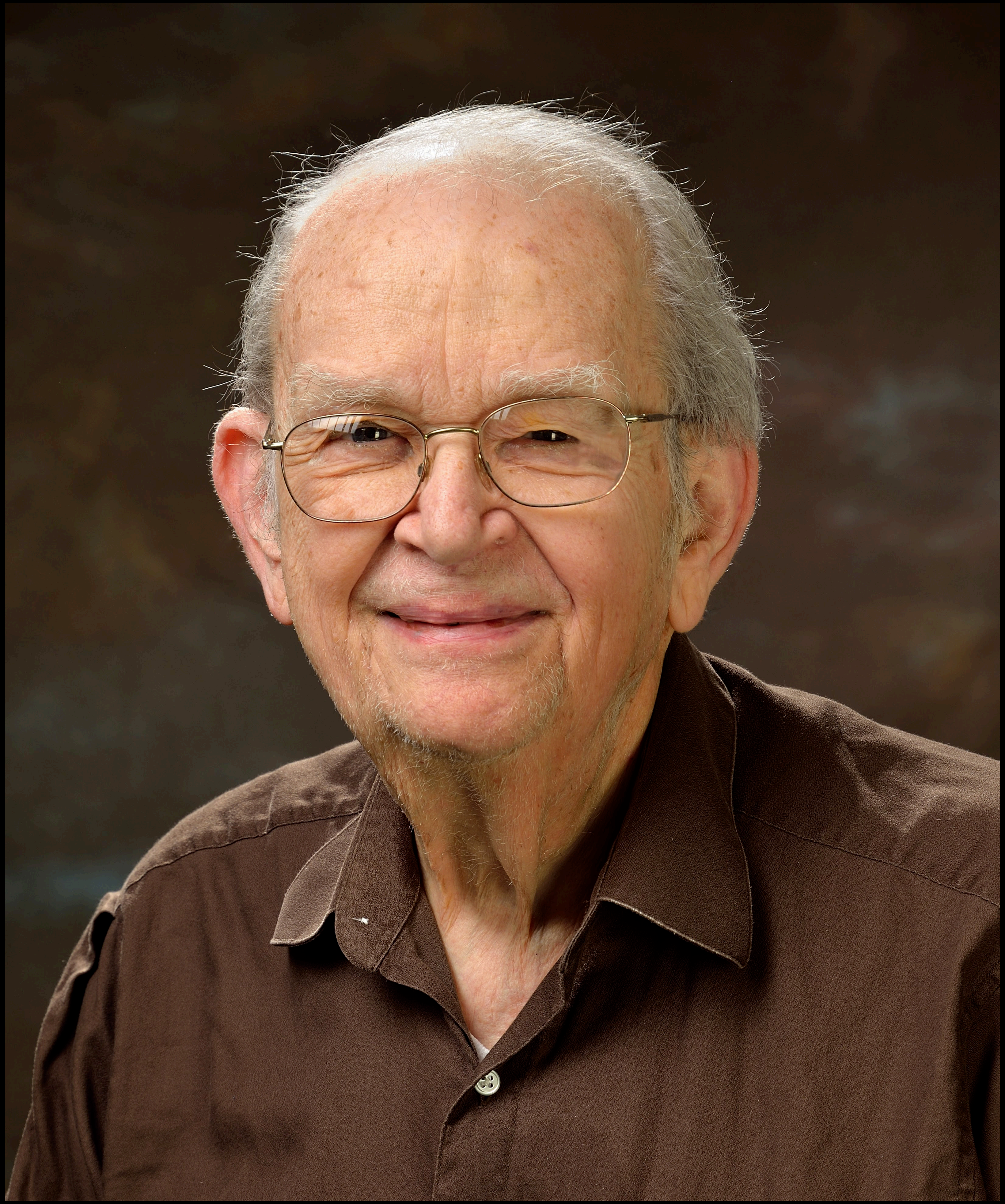


$\boxed{1963}$

Thèse de Jim Stasheff

| Homotopy associativity of H-spaces

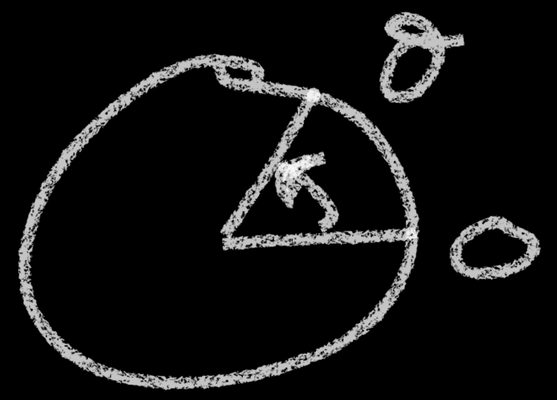
[Étude des espaces munis d'une multiplication tels que le cercle = ○]



H-espace = espace X avec une opération

$m : X \times X \longrightarrow X$ et une unité $e : * \to X$.

↳ $m(e,x) = x = m(x,e)$

Exemple: S^1 = cercle = 

$$\begin{cases} m(\theta,\theta') = \theta+\theta' \\ e(*) = 0 \end{cases}$$

Un peu d'algèbre

Opération binaire

↳ 2 entrées, 1 sortie

Exemples : somme

$$+ : \text{Entiers}^{\times 2} \longrightarrow \text{Entiers}$$

$$(a, b) \longmapsto a + b$$

mulplication

$$\times : \text{Entiers}^{\times 2} \longrightarrow \text{Entiers}$$

$$(a, b) \longmapsto a \times b$$

Quelques propriétés de la somme

Zéro : $a + 0 = a = 0 + a$

Associativité : $(a+b)+c = a+(b+c)$

Commutativité : $a+b = b+a$

Opposé : $a+(-a) = 0 = (-a)+a$

(dans les entiers relatifs)

Quelques propriétés de la multiplication

Unité : $a \times 1 = a = 1 \times a$

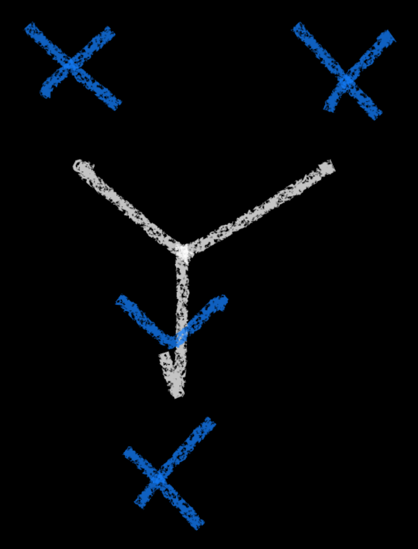
Associativité : $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

Commutativité : $a \times b = b \times a$

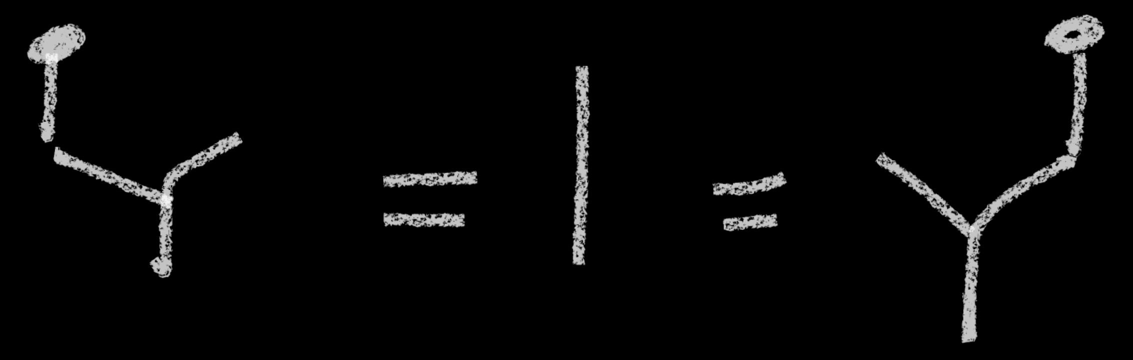
Inverse : $a \times \left(\frac{1}{a}\right) = 1 = \left(\frac{1}{a}\right) \times a$ si $a \neq 0$

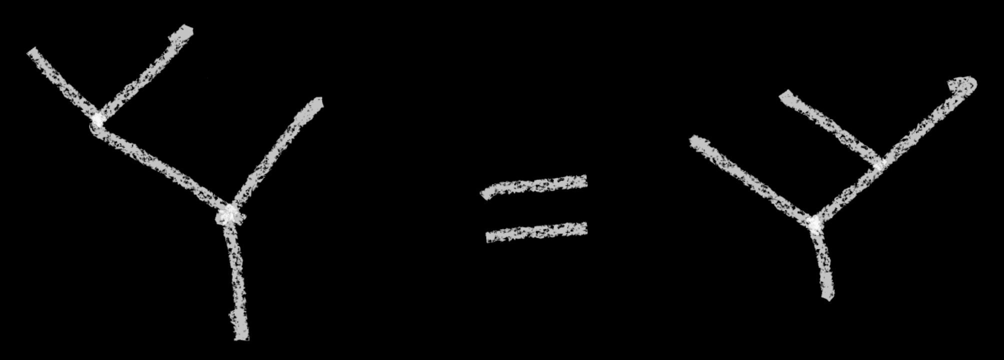
(dans les nombres rationnels)

Représentation graphique

Opération binaire : 

Zéro / unité :  , Relation :



Associativité : 

Interlude sur l'amitié

La topologie : « Tu sais bien sûr qu'on ne pourra jamais être amis. »

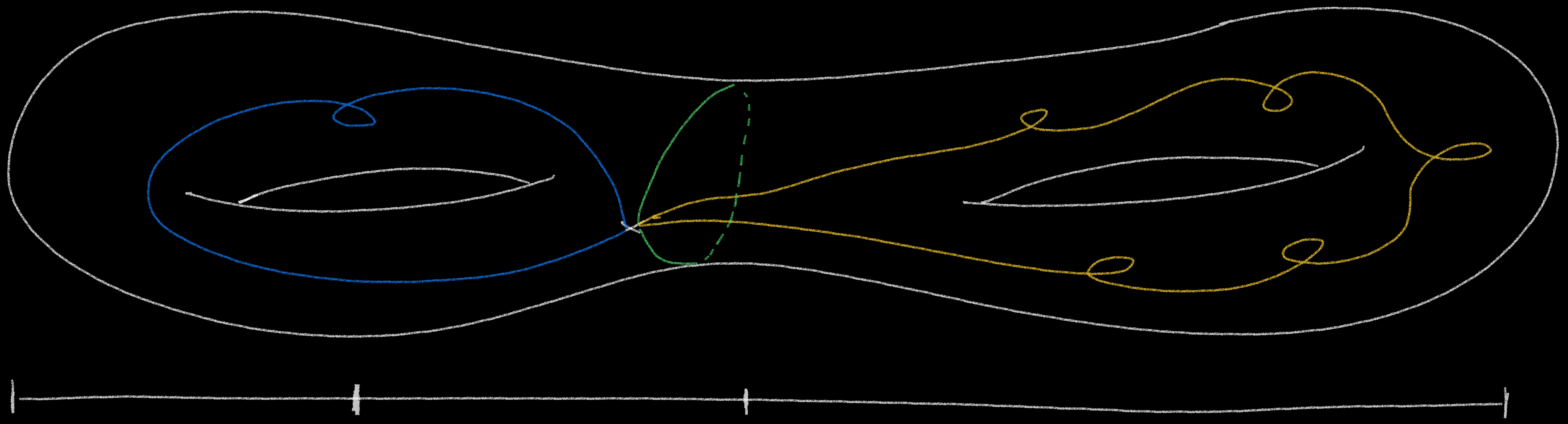
L'algèbre : « Pourquoi pas ? »

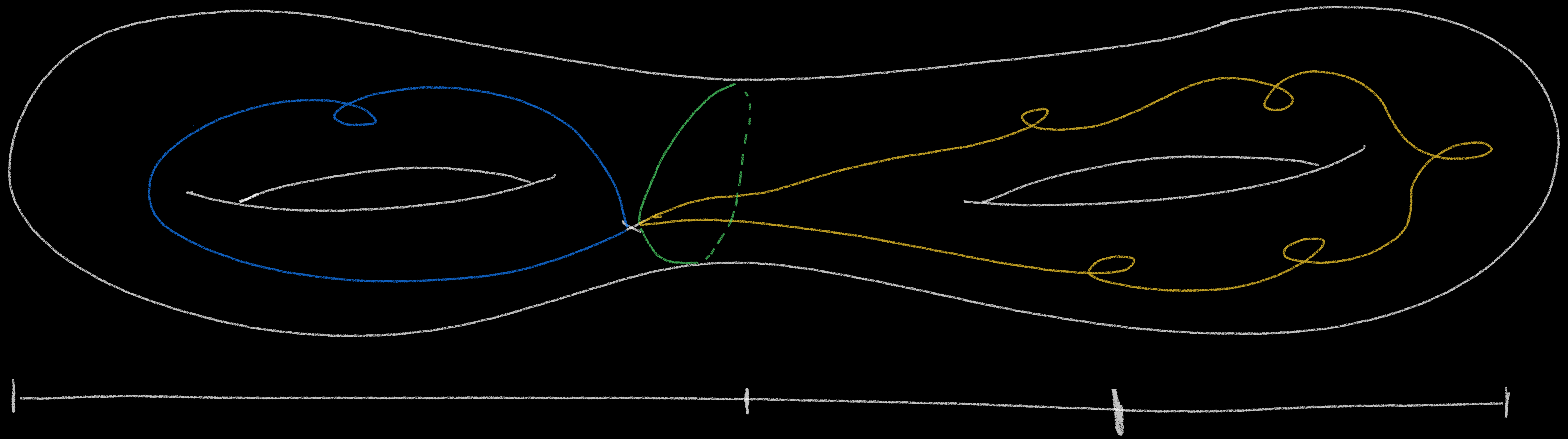
La topologie : « Entre la souplesse et la rigidité, il ne peut pas y avoir d'amitié parce que le langage fait toujours barrage. »

L'algèbre : « Je crois qu'on ne sera pas amis alors. »

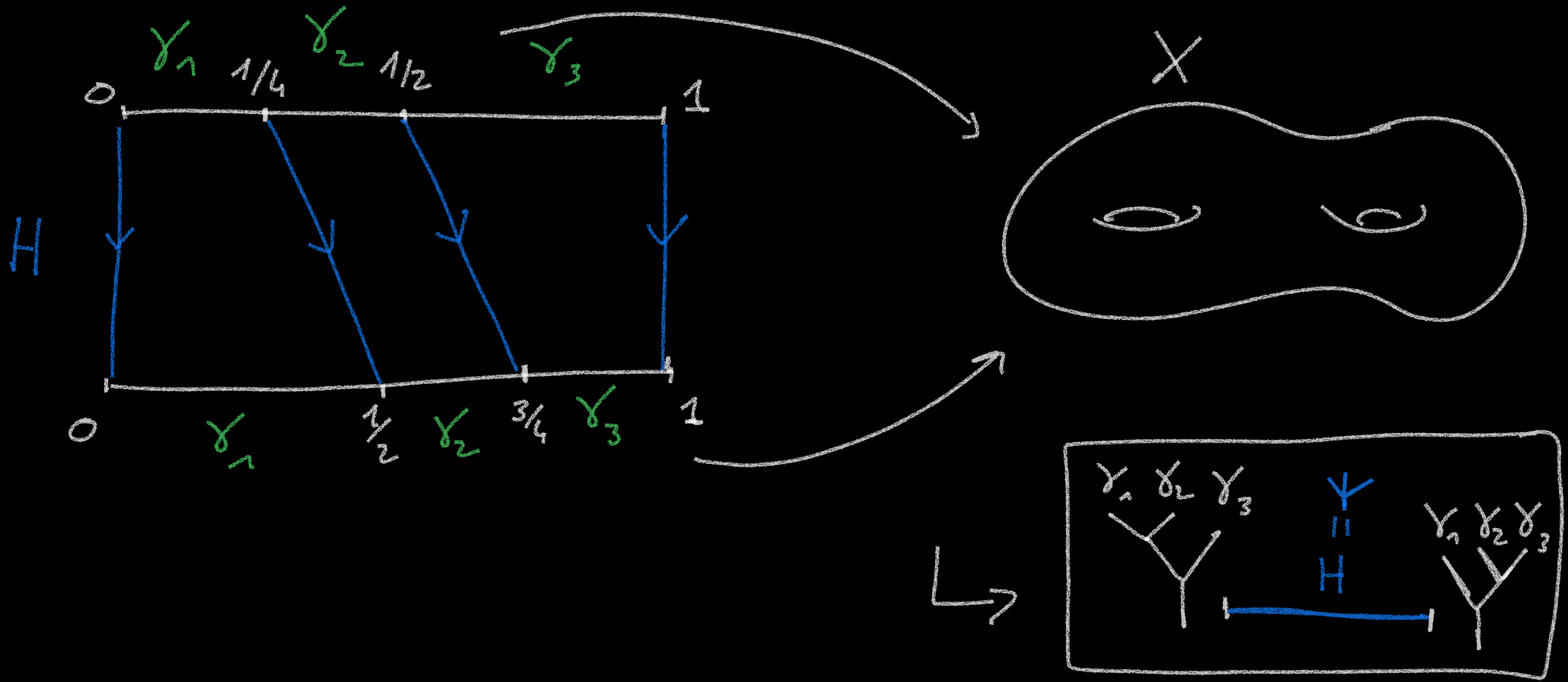
Scannez-moi !

https://www.math.univ-toulouse.fr/~jmilles/cafesimt/index.html

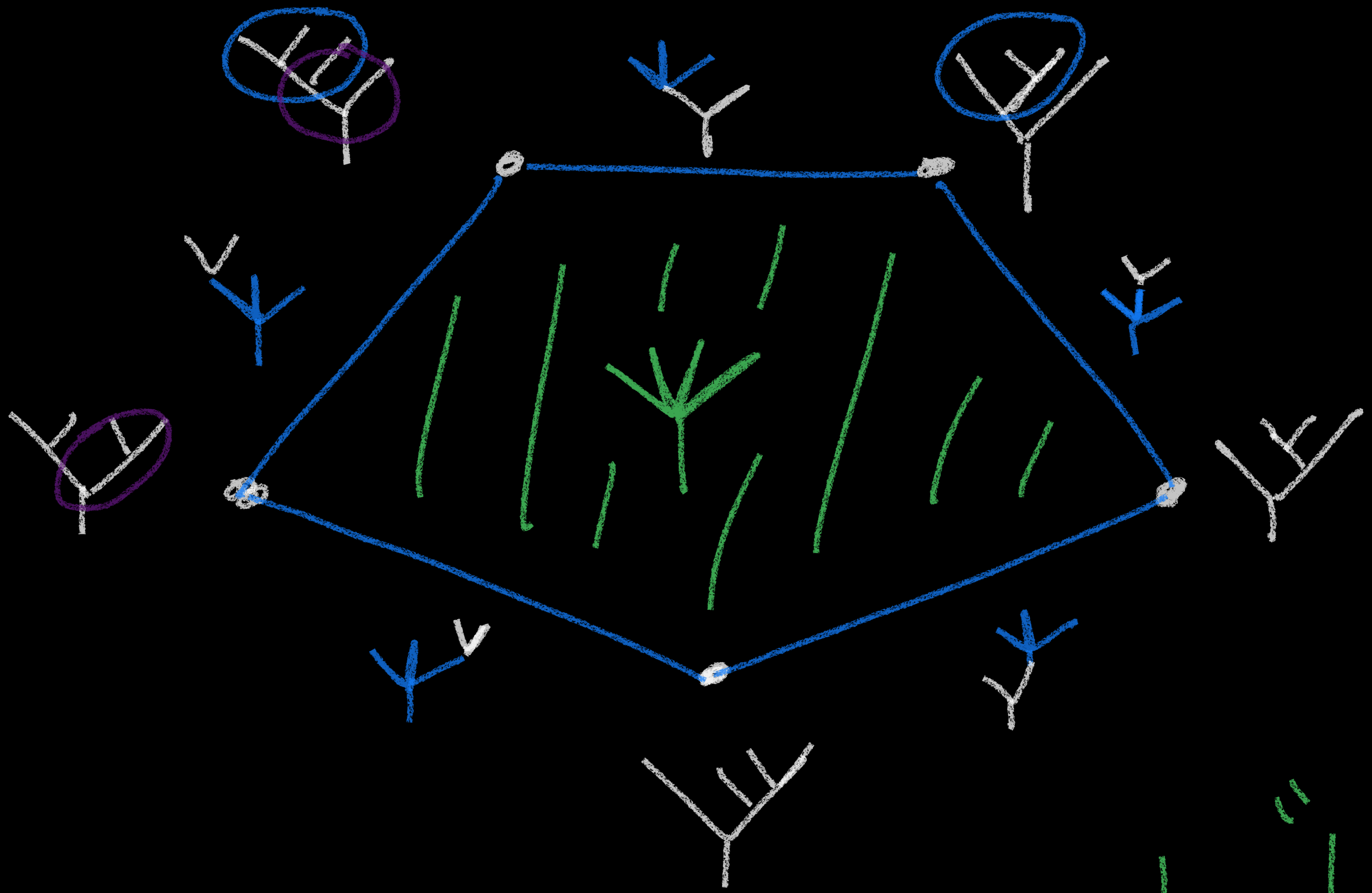




Produit associatif à une homotopie H près



Homotopie entre les homotopies



↳ "homotopie supérieure"

Quiz : les homotopies supérieures

Principe de reconnaissance

La topologie : « Jo, j'étais sûr que c'était toi. J'étais sûr que c'était toi.
En passant par là, je me suis dit que c'était toi et c'est vraiment toi ! »

Jo : « … »

L'algèbre : « Coup de chance, elle ne s'est pas souvenu de moi.
J'me suis tapé Princeton-Oxford avec elle il y a 5 ans. J'ai vécu un véritable enfer ! »

Principe de reconnaissance

Un "bel" espace X ressemble à un espace de lacets $\Omega(Y, y)$ <u>si et seulement si</u> X admet une structure d'algèbre associative avec des homotopies supérieures (Y, Ψ, Ѱ, ⋔, ...).

$\left[Y : X^2 \longrightarrow X \,,\; Ψ : — \times X^{\times 3} \longrightarrow X \,,\; Ѱ : \right.$  $\left. \times X^{\times 4} \longrightarrow X, \ldots \right]$

C'est un premier lien fort entre l'algèbre et la topologie.

La bêtise

« Ils l'ont fait ! »

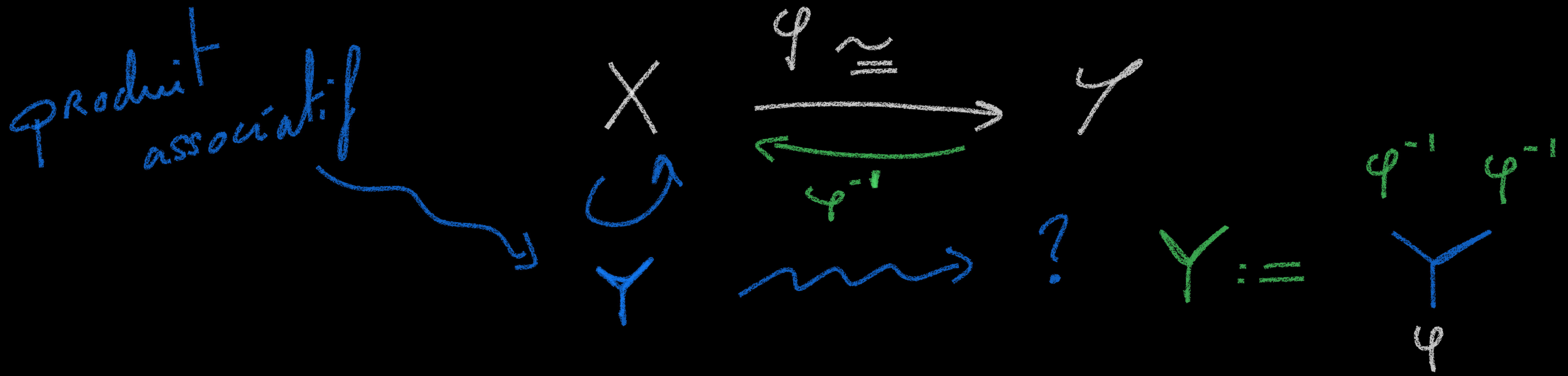
« … »

L'algèbre : « On a fait une bêtise. »

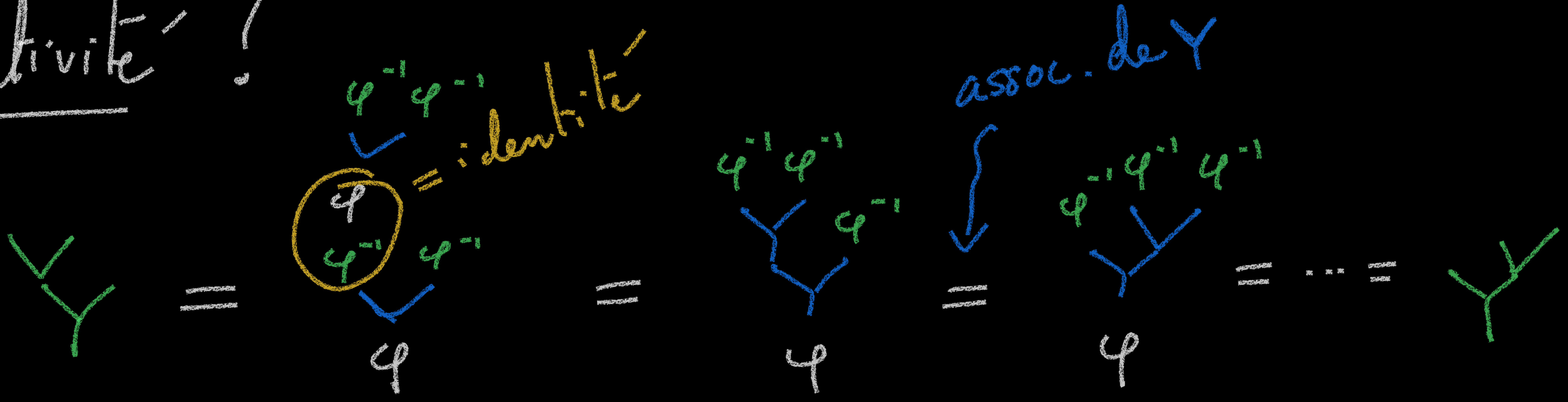
La topologie : « Ça me soulage que tu pense ça toi aussi. »

<u>Quiz</u> : Retour à l'algèbre

Voyage de structure

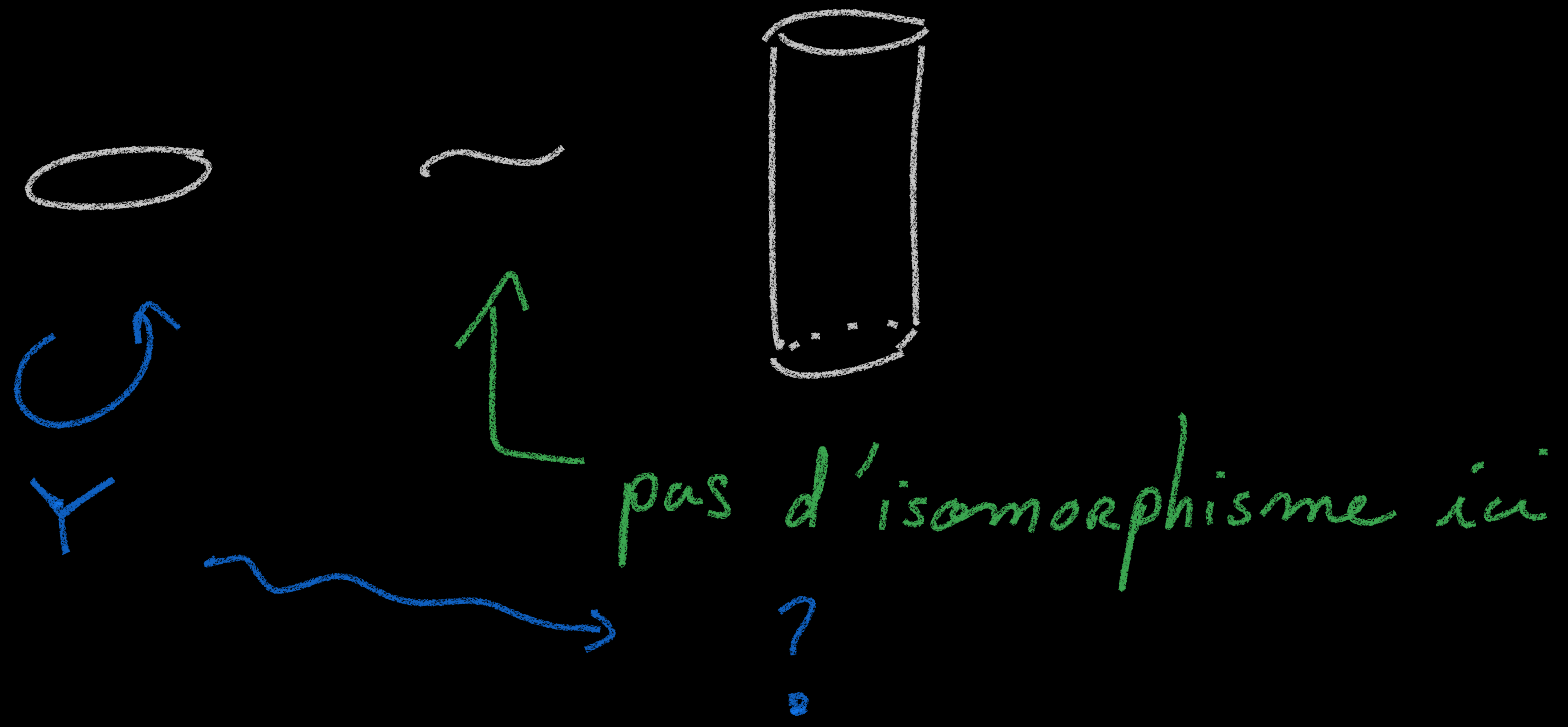


Associativité ?



Question : que se passe-t-il lorsque X peut se déformer en Y ?

Exemple :



« Et puis on est tombés amoureux. Trois mois plus tard, on se mariait. »

« Il ne nous a fallu que trois mois.»

« 12 ans et trois mois oui ! »

1980

Tornike Kadeishvili démontre (dans un contexte algébrique) qu'au cours de son voyage la structure associative devient associative à homotopies près $= A_\infty$

Fim