TD 2

Les exercices marqués avec un (♡) sont à travailler en priorité et les exercices avec un (♢) sont des compléments intéressants.

Dans cette feuille de TD, nous désignerons par E un espace vectoriel. La notation $\langle -,-\rangle : E\times E\to E$ décrit quant à elle un produit scalaire. Nous allons travailler sur l'orthogonalité qui est au coeur de la géométrie euclidienne et qui permet par exemple de calculer des distances.

1 Orthogonalité et bases orthonormales

Une famille $(e_1,\dots,e_m)$ de E est dite *orthogonale pour* $\langle -,-\rangle$ lorsque

$$\forall i,j\in\{1,\dots,m\},\quad i\neq j \implies \langle e_i,e_j\rangle = 0.$$

Une telle famille est dite *orthonormée* si elle vérifie de plus $\langle e_i,e_i\rangle = 1$ pour tout $i\in\{1,\dots,m\}$. Dans le même état d'esprit, si F est un sous-espace vectoriel de E, on définit son *orthogonal pour* $\langle -,-\rangle$ par

$$F^\perp := \{v\in E,\ \forall w\in F,\ \langle v,w\rangle = 0\}.$$

Exercice 1 (♡) Soit $E=\mathbf{R}_n[X]$ et on se donne $a\in\mathbf{R}$. On considère l'application φ définie sur E^2 par :

$$\varphi(P,Q)=\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a).$$

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.
2. Pour $i\in\mathbf{N}$, on pose $P_i(X)=(X-a)^i$.
   a) Pour $k\in\mathbf{N}$, calculer $P_i^{(k)}(a)$.
   b) Montrer que $(P_0,\dots,P_n)$ est une famille orthogonale de E.
   c) En déduire une base $\mathcal{B}$ orthonormale de E.
3. Exprimer les coordonnées d'un polynôme Q de E dans la base $\mathcal{B}$. Retrouver de cette manière la formule de Taylor pour les polynômes.

Exercice 2 (♢) On considère $E=C^0([0,1],\mathbf{R})$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)g(t)dt$. Soit $F=\{f\in E/f(0)=0\}$.

1. Montrer que $F^\perp=\{0\}$.
2. En déduire que F n'admet pas de supplémentaire orthogonal.

Exercice 3 (♡) Pour chaque espace euclidien E muni d'un produit scalaire φ, appliquer la méthode de Gram-Schmidt à la famille libre F afin de produire une base orthonormée pour l'espace vectoriel engendré $\mathrm{Vect}(F)$:

1. $E=\mathbf{R}^3$, φ le produit scalaire usuel, $F=((1,0,-1),(1,-1,0))$.
2. $E=\mathbf{R}_3[X]$, $\varphi(P,Q)=\int_0^1 P(X)Q(X)dX$, $F=(1,X,X^2)$.

Exercice 4 1. On considère l'espace euclidien $E = \mathbf{R}^4$ muni de son produit scalaire usuel. Donner une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(F)$ pour $F = ((1,1,0,0),(1,0,-1,1),(0,1,1,1))$.

2. On considère l'espace euclidien $E = \mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire défini pour tout (x_1,x_2,x_3), $(y_1,y_2,y_3) \in E$ par

$$\varphi((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) \coloneqq 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2 + 3x_3y_3.$$

Donner une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(F)$ pour $F = ((1,0,0),(0,1,0))$.

Exercice 5 (♡) Soient a un nombre réel et q l'application définie sur $\mathbf{R}^3$ par :

$$q(x,y,z) = x^2 + (1+a)y^2 + (1+a+a^2)z^2 + 2xy - 2ayz.$$

1. Déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles q est le carré de la norme associée à un produit scalaire.
2. On pose $a = 2$. Donner une base orthonormale pour q en utilisant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Exercice 6 Soient E un espace euclidien de dimension n et une famille $(e_1,\dots,e_p)$ de vecteurs unitaires de E vérifiant :

$$\forall v \in E, \quad \|v\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \langle e_k, v\rangle^2.$$

1. Montrer que $(e_1,\dots,e_p)$ est une famille orthonormée de E.
2. Montrer que $p = n$ et en déduire que $(e_1,\dots,e_p)$ est une base orthonormée de E.

2 Projection orthogonale et distance

Un endomorphisme $p : E \to E$ est un *projecteur* si $p^2 = p$. Il est de plus *orthogonal* si $\ker p = (\mathrm{Im} p)^\perp$ (on parle aussi de *projection orthogonale*).
Soit F un sous-espace vectoriel de E et $(e_1,\dots,e_m)$ une base orthonormée de F. Il est possible de calculer la projection orthogonale $p_F(v)$ d'un vecteur v de E sur F à l'aide de la formule

$$p_F(v) = \sum_{i=1}^{m} \langle v, e_i\rangle e_i.$$

Nous pouvons alors montrer que $v - p_F(v)$ minimise la distance de v à tous les vecteurs de F, c'est-à-dire

$$d(v,F) = \inf_{w\in F} \|v-w\| = \|v - p_F(v)\|, \text{ où } \|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot,\cdot\rangle}.$$

Exercice 7 (♡) On reprend les données de l'exercice 3. Dans chaque cas, calculer la projection orthogonale du vecteur v de E sur $\mathrm{Vect}(F)$ et donner les équations de $\mathrm{Vect}(F)$.

1. Traiter le cas de $v = (1,1,1)$.
2. Traiter le cas de $v = X^3$.

Exercice 8 Mêmes questions qu'à l'exercice 7 avec les données de l'exercice 4 cette fois-ci.

1. Traiter le cas de $v = (1,1,1,1)$.
2. Traiter le cas de $v = (0,0,1)$.

Exercice 9 (♡) On se place dans $E = \mathbf{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique. Soit p l'endomorphisme décrit par la matrice

$$M = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Montrer que p est une projection orthogonale et préciser $\mathrm{Im}(p)$.

Exercice 10 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien E. Soit F l'hyperplan de E d'équation $x + 2y - z = 0$ dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que la projection orthogonale p sur F a pour matrice dans la base $\mathcal{B}$

$$M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11 (♡) On se place dans $\mathbf{R}^4$ muni de son produit scalaire standard et de sa base canonique. On considère le sous-espace vectoriel

$$G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \,/\, x_1 + x_2 = 0 \quad \text{et} \quad x_3 + x_4 = 0\}.$$

1. Donner une base orthonormale de G.
2. Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$ de la projection orthogonale sur G.
3. Si $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, donner la distance de x à G.

Exercice 12 (♡) Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E dans E. Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si : $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Exercice 13 On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(X)Q(X)dX$. Soit $D \in E$ un polynôme de degré d, avec $0 < d \leq n$. Pour tout $P \in E$, on note $f(P)$ le reste de la division de P par D.

1. Montrer que f est un projecteur de E. Déterminer son noyau et son image.
2. On suppose que $d < n$ et que f est une projection orthogonale. Montrer que pour tout $i \leq n - d$ et pour tout $j < d$, on a $\varphi(DX^i, X^j) = 0$. En déduire que $\varphi(D, D) = 0$ et donc $D = 0$.
3. On suppose que $d = n$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit une projection orthogonale.

Exercice 14 Soit $E = \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\varphi(P, Q) = \frac{1}{4}\mathrm{trace}({}^tPQ)$. Soient

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad F = \mathrm{Vect}(I, U, U^2, U^3), \qquad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que (I, U, U^2, U^3) est une base orthonormale de F.
2. Déterminer la projection orthogonale de V sur F.
3. En déduire la distance de V à F.

Exercice 15 (♡) Calculer

$$\inf_{a,b\in\mathbf{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx.$$

3 Adjoint

Étant donné un endomorphisme u de E, on appelle *adjoint de* u un endomorphisme u^* de E vérifiant

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle.$$

Dans un espace euclidien, on peut montrer qu'un tel adjoint existe toujours et qu'il est unique.

Exercice 16 Soit $E = \mathbf{R}_1[X]$, et soit u l'endomorphisme de E défini par $u(P) = P - P'$. Déterminer l'adjoint de u pour les produits scalaires

$$\varphi(P,Q) = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) \qquad \text{et} \qquad \psi(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

Exercice 17 ($\heartsuit$) Soient E un espace euclidien, u un vecteur non nul de E, et $f : E \to E$ définie par

$$\forall v \in E \quad f(v) = \langle v, u\rangle u.$$

1. Calculer l'adjoint de f.
2. Déterminer $\mathrm{Im} f$ et $\ker f$.
3. Déterminer le spectre de f et montrer que f est diagonalisable.

Exercice 18 Soient $(E, \langle , \rangle_E)$ et $(E', \langle , \rangle_{E'})$ deux espaces euclidiens, $f : E \to E'$ une application linéaire.

1. Rappeler pourquoi il existe une application linéaire unique $f^* : E' \to E$ telle que
$$\forall x \in E, y \in E' \quad \langle f(x), y\rangle_{E'} = \langle x, f^*(y)\rangle_E.$$
2. On suppose, dans la suite, que $q = \dim E \leq \dim E' = n$ et que f est injective. Montrer que $\det(f^* \circ f) \neq 0$.
3. Si p désigne la projection orthogonale de E' sur $\mathrm{Im} f$, montrer que $p = f \circ (f^* \circ f)^{-1} \circ f^*$.
4. On note $f' : E' \to E$ l'application définie par $f' := (f^* \circ f)^{-1} \circ f^*$. Soit le système linéaire $f(x) = b$ avec $b \in E'$ et f injective. On appelle solution des moindres carrés le vecteur $x_0 \in E$ tel que $\|f(x_0) - b\| = \inf_{x \in E} \|f(x) - b\|$. Montrer que la solution des moindres carrés du système $f(x) = b$ est donnée par $x_0 = f'(b)$.
5. Application : soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ donnée par $f(x,y) = (2x + y, x - y, x + 3y)$.
   a) Calculer f'.
   b) On considère le système :
   $$(S) \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 2 \\ x + 3y = a. \end{cases}$$
   où a désigne un paramètre réel.
   i) Pour quelles valeurs de a, (S) admet-il une solution ?
   ii) Donner, dans tous les cas, la solution des moindres carrés.