

# Géométrie différentielle

Vincent GUEDJ

28 janvier 2022



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Courbes de <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>5</b>
1.1	Paramétrisation par longueur d'arc . . . . .	6
1.2	Courbes planes . . . . .	10
1.3	Courbes gauches . . . . .	18
1.4	Isométries euclidiennes . . . . .	26
1.5	Propriétés globales . . . . .	28
1.6	Exercices . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Surfaces de <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>41</b>
2.1	Espaces tangents . . . . .	42
2.2	Première forme fondamentale . . . . .	54
2.3	Deuxième forme fondamentale, courbures . . . . .	59
2.4	<i>Theorema Egregium</i> de Gauss . . . . .	70
2.5	Surfaces à courbure constante . . . . .	75
2.6	Propriétés métriques . . . . .	83
2.7	Théorème de Gauss-Bonnet . . . . .	89
2.8	Exercices . . . . .	95
<b>3</b>	<b>Variétés</b>	<b>103</b>
3.1	Plongements . . . . .	104
3.2	Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	111
3.3	Formes différentielles . . . . .	118
3.4	Variétés abstraites . . . . .	133
3.5	Variétés complexes et groupes de Lie . . . . .	143
3.6	Classifications . . . . .	152
3.7	Exercices . . . . .	155
<b>4</b>	<b>Corrections des exercices</b>	<b>163</b>
4.1	Courbes . . . . .	163
4.2	Surfaces . . . . .	181
4.3	Variétés . . . . .	201
	<b>Bibliographie</b>	<b>225</b>



# Introduction

Ce livre est une invitation à la géométrie différentielle, une discipline mathématique qui se situe au carrefour de nombreux domaines (algèbre, analyse, géométrie, topologie), et qui est devenue un outil de base de la recherche moderne en mathématiques comme dans ses applications.

La théorie des courbes et des surfaces dans l'espace euclidien (bi ou tri-dimensionnel) a constitué la base du développement de la géométrie différentielle au cours des XVIII<sup>e</sup> et XIX<sup>e</sup> siècles. Depuis la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, le domaine s'intéresse plus généralement aux structures géométriques des variétés différentiables. Ces objets sont des ensembles ayant une régularité suffisante pour envisager la notion de dérivation, on peut donc y définir et étudier les fonctions avec les moyens du calcul différentiel.

La géométrie différentielle est étroitement liée à la topologie différentielle et aux aspects géométriques de la théorie des équations différentielles. Elle a de nombreuses applications en physique, notamment dans la théorie de la relativité générale où elle permet de modéliser la courbure de l'espace-temps. Elle joue, plus récemment, un rôle croissant en imagerie médicale (représentation des formes) et en intelligence artificielle (géométrie de l'information).

Le sujet est donc à la fois classique et avec des développements actuels considérables. Il en résulte un nombre important de concepts souvent difficiles à assimiler au premier abord, et un aspect calculatoire un peu ingrat qui rebute souvent les étudiants qui se doivent pourtant d'appréhender cet outil fondamental.

Le but de ce livre, issu d'un support de cours dispensé par l'auteur en Master 1, est modeste. Pour éviter aux étudiants de se noyer dans un flot de concepts nouveaux difficiles à digérer en 24 heures, il progresse pas à pas, en commençant par traiter en détail le cas des courbes et des surfaces. La notion de variétés abstraites constitue le point d'orgue du livre, ainsi qu'une invitation à poursuivre leur étude (géométrique et topologique) dans un second temps.

Le livre contient plus d'une centaine d'exercices corrigés qui constituent une part intégrante de la compréhension, ainsi que de nombreuses pistes d'approfondissement pour les lecteurs les plus curieux.

## Objectifs et prérequis

Ce livre est destiné aux étudiants de Licence (troisième année), de Master (première année), ainsi qu'aux étudiants préparant l'agrégation externe ou interne de mathématiques. Il couvre tout le programme de géométrie différentielle de l'agrégation et contient une centaine d'exercices corrigés.

La géométrie différentielle utilise des techniques du calcul différentiel, ainsi que du calcul intégral, de l'algèbre linéaire et de l'algèbre multilinéaire, pour étudier des problèmes géométriques d'origines variées. Il présuppose notamment une bonne familiarité avec :

- le calcul différentiel classique (niveau L3) ;
- l'algèbre multilinéaire (niveau L2).

L'objectif du livre est d'étudier quelques notions fondamentales à la base de la géométrie moderne. On introduit certains invariants intrinsèques fondamentaux des courbes et des surfaces (longueur, distance intrinsèque, courbure de Gauss). On y explore la notion de sous-variété différentielle de  $\mathbb{R}^n$  et on généralise le calcul différentiel dans ce cadre, en introduisant la notion de forme différentielle et le calcul intégral associé. Ces outils permettent de comparer les objets géométriques selon plusieurs échelles :

- infinitésimale, via l'algèbre (multi)linéaire ;
- locale, via le calcul différentiel ;
- globale, via l'interaction entre géométrie et topologie.

La mise en pratique du calcul différentiel et de l'algèbre multilinéaire de Licence se fait notamment à travers :

- l'utilisation du théorème d'inversion locale pour dégager plusieurs définitions équivalentes des sous-variétés ;
- l'utilisation des formes quadratiques pour comparer la position relative d'une sous-variété avec son espace tangent ;
- le théorème de Stokes qui généralise l'intégration par parties.

Le livre aura rempli son principal objectif s'il permet aux étudiants intéressés par cette thématique de se familiariser avec les concepts de base exposés ici, en leur donnant envie de poursuivre leur découverte avec des ouvrages plus avancés.

Il existe en effet de nombreuses références qui traitent de ce sujet classique. Je me suis librement inspiré des livres indiqués dans la bibliographie, notamment du livre historique [BerGos]. Pour compléter vos lectures, je vous recommande tout particulièrement :

- [DoCarmo] pour approfondir l'étude des courbes et des surfaces ;
- [Lafontaine, Spivak] pour aller un peu plus loin sur les variétés ;
- [Warner] pour la cohomologie et la théorie de Hodge.

Le lecteur est encouragé à faire des dessins le plus souvent possible, et à utiliser également l'un des nombreux sites qui recensent les propriétés remarquables des courbes et des surfaces, tel [mathcurve.com](http://mathcurve.com).

## Le menu

Le livre est divisé en trois chapitres distincts de longueurs inégales. Pour le cours de Master 1 dont il était le support, le rythme du cours était de 2 à 3 séances de 2 heures pour le premier chapitre, 4 à 5 séances pour le deuxième chapitre, et 4 à 5 séances pour le troisième et dernier chapitre.

Le premier chapitre développe l'étude des courbes de l'espace euclidien, avec une attention particulière portée aux courbes planes et gauches. Ce sujet est censé être pour partie connu des étudiants. On y aborde :

- la notion de longueur d'arc, de courbure et de torsion ;
- certaines propriétés des isométries euclidiennes ;
- la classification locale des courbes planes et gauches ;
- quelques propriétés globales des courbes planes.

La géométrie différentielle des surfaces contient un grand nombre des idées et techniques clés du domaine. Il est donc naturel d'y consacrer du temps, avant d'aborder les concepts plus abstraits qui se sont dégagés à la suite de leur étude. Le chapitre 2 introduit notamment :

- les surfaces régulières plongées dans  $\mathbb{R}^3$  ;
- les première et deuxième forme fondamentales ;
- les différentes notions de courbures ;
- le théorème remarquable de Gauss ;
- les géodésiques et la distance intrinsèque ;
- le théorème de Gauss-Bonnet.

Le troisième et dernier chapitre du livre étudie la notion de sous-variété différentielle de l'espace euclidien, ainsi que le concept de variété différentielle abstraite. Si le théorème de plongement de Whitney assure in fine que ces deux notions coïncident, il est essentiel de développer l'étude des variétés abstraites, de même qu'il est nécessaire de traiter la théorie générale des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie, et pas uniquement celle des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$ . Ce chapitre étudie notamment :

- les submersions, immersions, et plongements ;
- les formes différentielles et la différentielle extérieure ;
- les formes volumes et l'orientation des variétés,
- l'intégration des formes différentielles et la formule de Stokes ;
- l'abondance des difféomorphismes sur les variétés abstraites ;
- les variétés complexes et les groupes de Lie.

Il se termine par l'évocation des problèmes de classifications des variétés différentielles compactes de petite dimension, un sujet de recherches actuelles qui a connu des développements spectaculaires ces dernières années.

Chaque chapitre se termine par de nombreux exercices qui sont partie intégrante du cours et qu'il est donc essentiel de faire. Des éléments succincts de correction sont fournis en fin d'ouvrage ; ils sont là pour aider le lecteur, mais ne constituent aucunement un modèle de corrigé.

## Remerciements

La plupart des dessins ont été réalisés avec l'aide du logiciel gratuit [SAGE](#). Un grand merci à Christophe Besse d'avoir guidé mes premiers pas dans son utilisation.

Mes collègues Yuxin Ge, Éveline Legendre et les étudiants du Master ESR de Mathématiques de l'Université Paul Sabatier m'ont fait des retours constructifs sur une version préliminaire de ce livre, je les en remercie.

Malgré tout le soin apporté à sa confection, le texte contient probablement de nombreuses coquilles (typos, erreurs, imprécisions). N'hésitez pas à me les signaler en m'écrivant : [vincent.guedj@math.univ-toulouse.fr](mailto:vincent.guedj@math.univ-toulouse.fr).

Bonne lecture !

# Chapitre 1

## Courbes de $\mathbb{R}^n$

### Introduction

Dans ce premier chapitre, nous nous intéressons à l'étude des courbes plongées dans  $\mathbb{R}^n$ . Nous étudions plus particulièrement les *courbes planes* ( $n = 2$ ) et les *courbes gauches* ( $n = 3$ ).

Nous commençons par observer que toute courbe peut être localement paramétrée par longueur d'arc : toutes les courbes de  $\mathbb{R}^n$  sont donc localement isométriques, mais nous allons dégager des propriétés de rigidité globale.

Nous introduisons la courbure des courbes planes. Son importance est illustrée par le « Théorème fondamental » (Théorème 1.2.12) qui affirme que deux courbes planes qui ont même courbure sont images l'une de l'autre par une isométrie globale de  $\mathbb{R}^2$ . C'est un formidable résultat sur lequel il faut nous arrêter un moment : une information de nature locale (la courbure) suffit à classer les courbes à équivalence *globale* près.

Pour les courbes gauches, les concepts fondamentaux sont ceux de courbure et de torsion (la nouveauté par rapport aux courbes planes). Ils sont introduits par l'intermédiaire d'un repère mobile, le *repère de Frenet*, qui est bien adapté à l'étude des courbes gauches. L'importance de ces concepts est mise en évidence par le Théorème 1.3.13 : deux courbes gauches ont même courbure (non nulle) et même torsion si et seulement si elles sont images l'une de l'autre par une isométrie globale de  $\mathbb{R}^3$ .

Nous rappelons ensuite quelques propriétés des isométries de  $\mathbb{R}^n$ , puis nous mentionnons certaines propriétés globales des courbes fermées (nombre d'enroulement, inégalité isopérimétrique).

Je vous incite à consulter le site [mathcurve.com](http://mathcurve.com) sur lequel vous trouverez la représentation graphique de nombreuses courbes que nous rencontrerons dans ce texte (et bien d'autres encore). Vous êtes vivement encouragés à produire le plus de dessins possibles au fil de votre lecture.

## 1.1 Paramétrisation par longueur d'arc

### 1.1.1 Courbes paramétrées

Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}^n$  une application. On peut l'écrire en coordonnées

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)).$$

L'application  $\varphi$  sera dite *lisse* lorsque chacune des fonctions coordonnées  $\varphi_j$  est infiniment dérivable.

**Définition 1.1.1.** On appelle *courbe paramétrée de  $\mathbb{R}^n$*  la donnée d'une application lisse  $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}^n$ .

On dit qu'un point  $\varphi(t_0) \in \Gamma$  est *régulier* si  $\varphi'(t_0) \neq 0$ , c'est-à-dire si  $\varphi$  est une immersion au voisinage de  $t_0$ . Un point  $\varphi(t_0) \in \Gamma$  tel que  $\varphi'(t_0) = 0$  est appelé un *point singulier* de  $\Gamma$ .

On dit que  $\varphi$  est une *paramétrisation régulière* si  $\varphi$  est une immersion en tout point et si  $\varphi : I \mapsto \varphi(I)$  est un homéomorphisme.

Une paramétrisation régulière s'appelle un *plongement*. Nous rappelons des propriétés des immersions, submersions et plongements au Chapitre 3.

**Définition 1.1.2.** On appelle *courbe géométrique régulière*  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ , un ensemble qui est localement l'image d'une paramétrisation régulière.

Il est important de distinguer les propriétés de la paramétrisation locale des propriétés géométriques de  $\Gamma$  qui sont indépendantes du choix de la paramétrisation. De fait,  $\Gamma$  est définie à un changement admissible local de paramétrisation près :

**Définition 1.1.3.** Un *changement admissible de paramétrisation* de la courbe géométrique  $\Gamma = \varphi(I)$  est la donnée d'une application lisse  $\alpha : J \rightarrow I$  surjective telle que  $\alpha'(t) \neq 0$  pour tout  $t \in J$ .

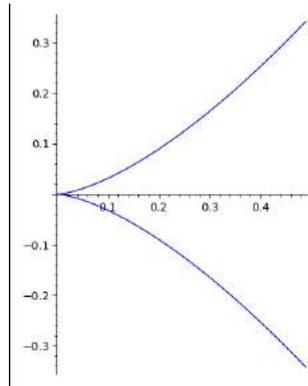
Il résulte du théorème des valeurs intermédiaires que si  $\alpha'$  ne s'annule pas sur l'intervalle  $J$ , alors soit  $\alpha'(t) > 0$  pour tout  $t \in J$  et dans ce cas  $\alpha$  préserve l'orientation ( $\varphi$  et  $\varphi \circ \alpha$  définissent le même sens de parcours de  $\Gamma$ ), soit  $\alpha'(t) < 0$  pour tout  $t \in J$  et dans ce cas  $\alpha'(t)$  change l'orientation.

#### Exemples 1.1.4.

1) L'application  $\varphi : I = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $\varphi(t) = (t, t^2)$  a pour courbe géométrique associée la parabole d'équation  $y = x^2$ . Cette paramétrisation est régulière.

Observons que  $\alpha : t \in \mathbb{R} \mapsto t^3 \in \mathbb{R}$  est un changement non admissible de paramétrisation (puisque  $\alpha'(0) = 0$ ). Cela signifie que la courbe géométrique  $\Gamma_2$  donnée par la paramétrisation  $t \in \mathbb{R} \rightarrow (t^3, t^6)$  est un objet géométrique différent de  $\Gamma$ , bien que le support de ces deux courbes soit le même.

2) L'application  $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$  définie par  $\varphi(t) = (t^2, t^3)$  est une paramétrisation de la courbe  $\Gamma$  d'équation  $y^2 = x^3$ . Cette courbe présente un point singulier en  $(0,0)$  appelé point de rebroussement de première espèce ou « cusp » (en anglais). On dit aussi que  $\Gamma$  est une cubique cuspidale, dont voici une représentation :



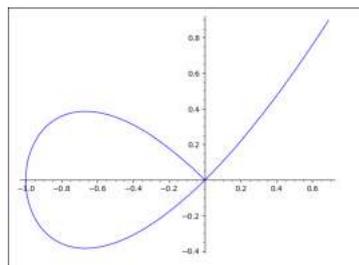
On vérifiera en exercice qu'il n'existe pas de courbe géométrique régulière (i.e. sans point singulier) qui a le même support que  $\Gamma$ .

3) L'application  $\theta \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbb{R}^2$  définit une paramétrisation du cercle unité  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$  parcouru dans le sens trigonométrique. L'application  $\alpha : t \in \mathbb{R} \rightarrow -t \in \mathbb{R}$  est un changement admissible de paramétrisation qui inverse l'orientation :  $\varphi \circ \alpha$  parcourt le cercle unité dans le sens des aiguilles d'une montre

4) Vous vérifierez dans l'Exercice 67 que la paramétrisation

$$f : t \in ]-1, +\infty[ \mapsto (t^2 - 1, t(t^2 - 1)) \in \mathbb{R}^2$$

est une immersion injective qui n'est pas un plongement. Le problème a lieu au voisinage du point  $(0,0) = \varphi(1) = \lim_{t \rightarrow -1} \varphi(t)$ .



*Tangente.* Soit  $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}^n$  une application lisse et  $\Gamma = \varphi(I)$  la courbe géométrique associée. Soit  $p = \varphi(t_0) \in \Gamma$  un point régulier de  $\Gamma$  ( $\varphi'(t_0) \neq 0$ ). Lorsque deux paramètres  $t \neq t'$  convergent vers  $t_0$ , les droites passant par  $\varphi(t), \varphi(t')$  convergent vers une droite limite appelée *tangente* à  $\Gamma$  au point  $p$ . On vérifie aisément qu'elle a pour vecteur directeur le vecteur  $\varphi'(t_0)$  et pour équation paramétrique

$$t \in \mathbb{R} \mapsto (t - t_0)\varphi'(t_0) + \varphi(t_0) \in \mathbb{R}^n.$$

### 1.1.2 Paramétrisation par longueur d'arc

#### Longueur d'un arc

Soit  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrée lisse et  $A = \varphi(J) \subset \Gamma = \varphi(I)$  un arc fermé de la courbe géométrique  $\Gamma$  (i.e.  $J$  est un intervalle fermé).

**Définition 1.1.5.** La longueur de l'arc  $A$  est

$$\ell(A) := \int_J \|\varphi'(t)\| dt$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^n$ .

On vérifie sans peine que la longueur est égale à la limite des longueurs des lignes polygonales inscrites dans l'arc lorsque le maximum de la longueur de chaque segment de la ligne polygonale tend vers zéro. Ce deuxième point de vue permet de définir la longueur d'arcs non lisses que nous ne considérons pas dans ce cours.

**Proposition 1.1.6.** La longueur de l'arc  $A$  est indépendante de la paramétrisation. Elle est invariante par isométrie.

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate de la formule de changement de variables.  $\square$

#### Abscisse curviligne

Soit  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrée régulière, de sorte que  $\varphi'(t) \neq 0$  pour tout  $t \in I$ . Soit  $L \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  la longueur de la courbe géométrique  $\Gamma = \varphi(I)$  (c'est-à-dire le supremum des longueurs des arcs fermés de  $\Gamma$ ). Alors l'application

$$h : t \in I \mapsto \int_{t_0}^t \|\varphi'(x)\| dx \in [0, L]$$

est lisse et strictement croissante, de dérivée

$$\frac{dh}{dt} = \|\varphi'(t)\| \neq 0 \text{ pour tout } t \in I.$$

Sa bijection inverse est donc lisse également. La paramétrisation

$$\psi := \varphi \circ h^{-1} : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

est une paramétrisation admissible de  $\Gamma$  qui s'appelle *paramétrisation par l'abscisse curviligne* (ou *par longueur d'arc*). Observons que le vecteur  $\psi'(t)$  est unitaire quel que soit  $t$  :

$$\|\psi'(t)\| = \left\| \varphi'(h^{-1}(t)) \frac{1}{\|\varphi'(h^{-1}(t))\|} \right\| = 1.$$

On dira ainsi également que  $\Gamma$  est paramétrée à vitesse unité.

Cette propriété caractérise la paramétrisation par longueur d'arc :

**Proposition 1.1.7.** Soit  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  deux paramétrisations d'une courbe géométrique  $\Gamma$  telles que  $\varphi'(t), \psi'(x)$  sont des vecteurs unitaires pour tout  $t, x \in I, J$ . Alors  $J = \alpha(I)$  où  $\alpha(t) = \pm t + t_0$ .

*Démonstration.* Observons que  $\psi = \varphi \circ \alpha$  pour un changement admissible  $\alpha$  de paramétrisation. Le caractère unitaire de  $\varphi', \psi'$  assure que  $|\alpha'(t)| = 1$  pour tout  $t$ . Il s'ensuit par connexité que soit  $\alpha' \equiv 1$ , soit  $\alpha' \equiv -1$ , d'où le résultat.  $\square$

### 1.1.3 Exemples

**Exemple 1.1.8.** La paramétrisation

$$\varphi : t \in [0, 2\pi R] \mapsto (R \cos(t/R), R \sin(t/R)) \in \mathbb{R}^2$$

est la paramétrisation par longueur d'arc du cercle centré à l'origine et de rayon  $R$ . Comme nous l'indique la proposition précédente, cette paramétrisation est unique une fois que l'on fixe le point  $\varphi(0)$  (ici le point  $(R, 0)$ ) et le sens de parcours (ici le sens trigonométrique).

Observons que la paramétrisation de l'Exemple 1.1.8 s'exprime au moyen des fonctions transcendentes  $\sin, \cos$ . C'est le cas de la plupart des courbes (excepté les droites, bien entendu).

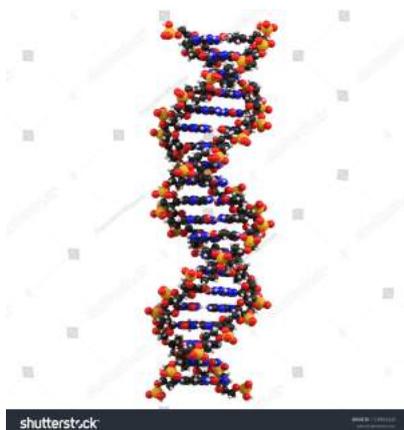
**Exemple 1.1.9.** L'hélice circulaire de  $\mathbb{R}^3$  est la courbe paramétrée

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto (a \cos t, a \sin t, bt) \in \mathbb{R}^3.$$

C'est une courbe tracée sur le cylindre  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = a^2\}$ . Sa paramétrisation par longueur d'arc est donnée par

$$\psi(s) = \left( a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

En voici deux représentations :



## 1.2 Courbes planes

### 1.2.1 Définitions équivalentes

Il existe de nombreux points de vue équivalents pour décrire une courbe géométrique, comme nous l'expliquons ici dans le cas des courbes planes :

**Proposition 1.2.1.** *Les propriétés suivantes sont localement équivalentes :*

- i)  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  est le graphe d'une fonction d'une variable ;*
- ii)  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  est une courbe paramétrée régulière ;*
- iii) il existe un difféomorphisme  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tel que  $\Phi(\{x = 0\}) = \Gamma$  ;*
- iv) il existe une submersion lisse  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\Gamma = F^{-1}(0)$ .*

Nous renvoyons le lecteur au début du chapitre 3 pour une description similaire en toute dimension.

*Démonstration.* Si  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; y = f(x)\}$  est le graphe d'une fonction lisse, alors  $x \mapsto (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$  est une paramétrisation régulière de  $\Gamma$ , donc (i) implique (ii). Réciproquement, si  $\Gamma = \varphi(I)$  admet la paramétrisation régulière  $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ , on se place au voisinage d'un point tel que  $x'(t) \neq 0$  (quitte à interchanger les rôles de  $x$  et  $y$ ). Le théorème d'inversion locale assure que la fonction  $x$  est inversible au voisinage de ce point. On peut donc réaliser  $\Gamma$  comme le graphe de la fonction  $y \circ x^{-1}$ , d'où (ii)  $\Rightarrow$  (i).

Soit  $\varphi : t \in I \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$  une paramétrisation régulière de  $\Gamma$ . Le vecteur tangent  $\varphi'(t)$  est non nul en tout point, on se place au voisinage d'un point tel que  $y'(t) \neq 0$  (on peut s'y ramener quitte à composer par le difféomorphisme  $(x, y) \mapsto (y, x)$ ). Alors  $\Phi : (s, t) \mapsto (s + x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$  est un difféomorphisme (local) tel que  $\Phi(\{s = 0\}) = \Gamma$ . Ainsi (ii)  $\Rightarrow$  (iii).

Réciproquement, si  $\Gamma = \Phi(\{s = 0\})$  est l'image de l'axe  $\{s = 0\}$  par un difféomorphisme  $\Phi(s, t) = (\alpha(s, t), \beta(s, t))$ , alors  $\Gamma$  admet la paramétrisation régulière  $\varphi : t \mapsto (\alpha(0, t), \beta(0, t))$ , donc (iii)  $\Rightarrow$  (ii).

Considérons l'ensemble des points  $(x, y)$  d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  tels que  $F(x, y) = 0$ , où  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction lisse. On suppose que la différentielle  $dF$  ne s'annule pas en un point  $(x_0, y_0) \in U$ . L'une au moins des deux dérivées partielles ne s'annule pas, disons  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$  pour fixer les idées. Par continuité,  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0$  ne s'annule pas pour  $(x, y)$  dans un petit voisinage  $V$  de  $(x_0, y_0)$ . Le théorème des fonctions implicites assure alors l'existence d'un voisinage  $V' \subset V$  de  $(x_0, y_0)$  tel qu'il existe une fonction lisse  $f$  telle que

$$\{(x, y) \in V' / F(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in V' / y = f(x)\}.$$

Cela montre l'implication (iv)  $\Rightarrow$  (i).

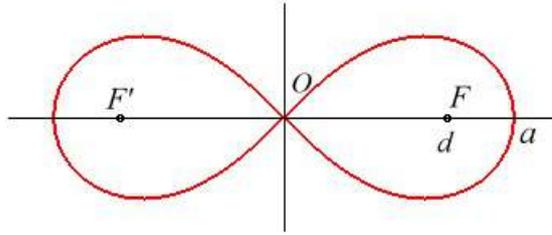
Réciproquement, si  $\Gamma$  est le graphe d'une fonction  $f$ , alors  $\Gamma = F^{-1}(0)$  où  $F(x, y) = y - f(x)$  est une submersion, donc (i)  $\Rightarrow$  (iv).  $\square$

**Remarque 1.2.2.** Ces propriétés ne sont pas globalement équivalentes. Par exemple, le cercle unité  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$  peut s'exprimer comme l'image réciproque  $F^{-1}(0)$  par la submersion  $F : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \mapsto x^2 + y^2 - 1 \in \mathbb{R}$ , mais il ne peut pas s'exprimer comme le graphe d'une (seule) fonction.

**Exemple 1.2.3.** Considérons la lemniscate de Bernoulli<sup>1</sup> dont l'équation cartésienne dans le plan de coordonnées  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  est donnée par

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2d^2(x^2 - y^2) = 0$$

avec  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  submersive hors de l'origine. En voici une représentation :



On peut également la décrire par la paramétrisation

$$\theta \in [-\pi/4, \pi/4] \mapsto \varphi(\theta) = d\sqrt{2 \cos(2\theta)}(\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbb{R}.$$

### 1.2.2 Courbure

Soit  $s \in I \mapsto \varphi(s) \in \mathbb{R}^2$  une courbe plane paramétrée par son abscisse curviligne. Alors le vecteur vitesse trace une courbe  $s \mapsto \varphi'(s)$  sur le cercle unité. Celle-ci possède un vecteur vitesse  $\varphi''(s)$  appelé accélération. Au signe près, la courbure est la norme de l'accélération :

**Définition 1.2.4.** La courbure de la courbe géométrique  $\Gamma = \varphi(I)$  paramétrée par sa longueur d'arc au point  $\varphi(s)$  est

$$\kappa(s) := \varepsilon(s) \|\varphi''(s)\|$$

où le signe  $\varepsilon(s) \in \{-1, +1\}$  est positif si  $(\varphi'(t), \varphi''(t))$  est une base directe de  $\mathbb{R}^2$ , négatif sinon.

Notons que les vecteurs  $\varphi'(t)$  et  $\varphi''(t)$  sont orthogonaux (dérivez la relation  $\|\varphi'(t)\|^2 = 1$ ). Une expression utile qui exprime la courbure est donc

$$\kappa(t) = \det(\varphi'(t), \varphi''(t)).$$

La courbure ne dépend pas d'un choix de paramétrisation, seulement de l'orientation de la courbe.

Comme l'abscisse curviligne n'est pas souvent calculable, il est utile d'exprimer la courbure en fonction d'une paramétrisation quelconque :

1. Jakob Bernoulli, mathématicien et physicien suisse (1655-1705), frère de Jean Bernoulli et oncle de Daniel Bernoulli et Nicolas Bernoulli.

**Proposition 1.2.5.** Soit  $\psi : t \in I \rightarrow (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$  une paramétrisation quelconque d'une courbe géométrique orientée  $\Gamma$ . Alors la courbure  $\kappa(t)$  de  $\Gamma$  au point  $\psi(t)$  est donnée par

$$\kappa(t) := \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{[x'(t)^2 + y'(t)^2]^{3/2}} = \frac{\det(\psi'(s), \psi''(s))}{\|\psi'(s)\|^3}.$$

La valeur absolue de la courbure est invariante par les isométries de  $\mathbb{R}^2$ .

*Démonstration.* Soit  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  la paramétrisation par longueur d'arc normalisée de sorte que  $\varphi(t) = \psi(s)$ . Soit  $T(t) := \varphi'(t)$  le vecteur unitaire tangent à la courbe et  $N(t)$  le vecteur unitaire normal à  $T(t)$ , c'est-à-dire que  $(T(t), N(t))$  forme une base orthonormée directe de  $\mathbb{R}^2$ .

Comme  $\|T(t)\|^2 = 1$ , on obtient en dérivant que  $2\langle T'(t), T(t) \rangle = 0$ , donc  $T'(t)$  est proportionnel à  $N(t)$ . Le facteur de proportionnalité est précisément la courbure  $\kappa(t)$  de la courbe  $\Gamma$ . Autrement dit

$$\varphi''(t) = T'(t) = \kappa(t)N(t).$$

Notons à présent  $\alpha$  le changement admissible de paramétrisation tel que  $\varphi(t) = \psi \circ \alpha(t)$ . Alors

$$\varphi'(t) = \frac{\psi'(s)}{\|\psi'(s)\|} \text{ avec } s = \alpha(t).$$

Dérivons à nouveau cette expression. Il vient

$$\varphi''(t) = \frac{\psi''(s)}{\|\psi'(s)\|^2} + b(s)\psi'(s)$$

pour une fonction  $b(s)$  que nous ne cherchons pas à calculer. On en déduit

$$\kappa(t) = \det(\varphi'(t), \varphi''(t)) = \frac{1}{\|\psi'(s)\|^3} \det(\psi'(s), \psi''(s)).$$

La formule annoncée en résulte, en remplaçant  $\psi'$  et  $\psi''$  par leurs coordonnées euclidiennes.

Si  $F(p) = Ap + v$  et  $\tilde{\psi} = F \circ \psi$  est l'image de  $\psi$  par une isométrie  $F$ , alors  $\tilde{\psi}' = A\psi'$  et  $\tilde{\psi}'' = A\psi''$ . Il vient donc

$$\det(\tilde{\psi}'', \tilde{\psi}') = \det A \cdot \det(\psi'', \psi') = \pm \det(\psi'', \psi')$$

et  $\|\tilde{\psi}'\| = \|\psi'\|$  puisque  $A$  est une rotation. Il s'ensuit que  $|\tilde{\kappa}| = |\kappa|$ .  $\square$

**Signe de la courbure.** Si on change le sens de parcours, la courbure change de signe. Celui-ci dépend aussi de l'orientation du plan. Une isométrie du plan préservant l'orientation préserve la courbure des courbes, tandis qu'une isométrie du plan renversant l'orientation change le signe de la courbure.

**Exemples 1.2.6.**

1) La courbure d'un cercle de rayon  $R$  est constante. Elle vaut  $1/R$  si le cercle est parcouru dans le sens trigonométrique,  $-1/R$  sinon.

2) Au point  $(0, 0)$ , la courbure de la parabole d'équation  $y = x^2$ , parcourue dans le sens des  $x$  croissants, vaut 2.

3) L'ellipse  $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto (a \cos t, b \sin t) \in \mathbb{R}^2$  a pour courbure

$$\kappa(t) = \frac{ab}{[a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t]^{3/2}}.$$

Sous l'angle de la géométrie différentielle, les cercles et les droites ont encore un statut particulier comme le montre le résultat qui suit.

**Proposition 1.2.7.** *Les seules courbes dont la courbure est constante sont les (portions de) droites et les cercles.*

*Démonstration.* Nous montrons plus loin que la courbure caractérise les courbes à isométrie globale près. Comme les cercles et les droites ont une courbure constante (respectivement  $\pm 1/R$  ou 0), et comme leurs images par une isométrie globale sont des cercles et des droites, le résultat découle du Théorème 1.2.12.

Il est sans doute préférable ici d'adopter une démarche plus terre à terre. Soit  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  une courbe géométrique de courbure constante. On peut paramétrer  $\Gamma$  par sa longueur d'arc  $s \mapsto \varphi(s)$ . Si la courbure est nulle, il vient  $\varphi'' \equiv 0$ , il s'agit donc d'une (portion de) droite.

Supposons à présent que  $\kappa$  est une constante non nulle. Soit  $T(s) = \varphi'(s)$  le vecteur unitaire tangent et  $N(s) = T'(s)/\kappa$  le vecteur normal. Observons que

$$N'(s) = -\kappa T(s).$$

En effet,  $N$  est unitaire donc  $N'$  est orthogonal à  $N$ , donc proportionnel à  $T$ . La constante de proportionnalité s'obtient en dérivant la relation d'orthogonalité

$$0 = \frac{d}{ds} \langle T, N \rangle = \langle T', N \rangle + \langle T, N' \rangle,$$

d'où  $\langle T, N' \rangle = -\kappa$ .

Soit  $M(s) = \varphi(s) + \frac{1}{\kappa} N(s)$  le « centre de courbure » de  $\Gamma$  au point  $\varphi(s)$ . Le calcul précédent montre que  $M(s) = M_0$  est constant puisque

$$M'(s) = T(s) + \frac{1}{\kappa} N'(s) = 0.$$

Il s'ensuit que  $\Gamma$  est une portion du cercle de centre  $M_0$  et de rayon  $1/|\kappa|$ . En effet

$$\|M_0 - \varphi(s)\| = \frac{1}{|\kappa|} \|N(s)\| = \frac{1}{|\kappa|}$$

puisque  $N(s)$  est unitaire. □

### 1.2.3 Cercles osculateurs

Soit  $\Gamma$  une courbe géométrique et  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une paramétrisation. On note  $\varphi(t) = (x(t), y(t))$  les coordonnées euclidiennes.

L'équation d'un cercle  $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$  dépend de trois paramètres  $(\alpha, \beta, R)$ . On peut fixer la valeur de ces paramètres de sorte que le cercle passe par le point  $\varphi(t)$  avec un contact d'ordre 3 au moins. En effectuant un développement de Taylor-Young<sup>2</sup> au point  $\varphi(t)$  tel que  $(x(t) - \alpha)^2 + (y(t) - \beta)^2 = R^2$ , il vient

$$x(s) - \alpha = (x(t) - \alpha) + x'(t)(s - t) + \frac{x''(t)}{2}(s - t)^2 + o((s - t)^2)$$

et on a un développement similaire pour  $y(s) - \beta$ .

Le cercle a un contact d'ordre au moins 3 avec  $\Gamma$  au point  $\varphi(t)$  si

$$(x(s) - \alpha)^2 + (y(s) - \beta)^2 - R^2 = o((s - t)^2).$$

On en déduit que cette condition est satisfaite exactement lorsque

$$\begin{cases} (x(t) - \alpha)^2 + (y(t) - \beta)^2 - R^2 = 0 \\ (x(t) - \alpha)x'(t) + (y(t) - \beta)y'(t) = 0 \\ (x(t) - \alpha)x''(t) + (y(t) - \beta)y''(t) + x'(t)^2 + y'(t)^2 = 0 \end{cases}$$

Les deux dernières équations permettent d'exprimer  $(x(t) - \alpha)$  et  $(y(t) - \beta)$  en fonction de  $x', y', x'', y''$ , à condition que  $(x'y'' - x''y')(t) \neq 0$ , c'est-à-dire lorsque la courbure de  $\Gamma$  au point  $\varphi(t)$  n'est pas nulle, ce que nous supposons dans la suite. On obtient alors

$$x - \alpha = \frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''} \text{ et } y - \beta = -\frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - y'x''}.$$

En reinjectant dans la première équation, on obtient finalement

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{|x'y'' - y'x''|} = \frac{1}{|\kappa(t)|}.$$

Nous avons ainsi démontré le résultat suivant :

**Proposition 1.2.8.** *Si la courbure  $\kappa(t) \neq 0$  est non nulle au point  $\varphi(t) \in \Gamma$ , alors il existe un cercle unique qui a un ordre de contact au moins trois avec  $\Gamma$  au point  $\varphi(t)$ . Ce cercle « osculateur » a pour rayon l'inverse de la valeur absolue de la courbure.*

Lorsque  $\kappa(t) = 0$ , on dit que la courbe admet un *point d'inflexion*. Dans ce cas, la courbe  $\Gamma$  a un contact d'ordre deux avec sa tangente.

---

2. Brook Taylor, scientifique anglais (1685-1731); William Henry Young, mathématicien anglais (1863-1942).

### 1.2.4 Étude locale

#### Position par rapport à la tangente

On s'intéresse ici à l'allure d'une courbe plane paramétrée  $\Gamma$ ,  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  près d'un point régulier  $p = \varphi(t_0)$ . Un développement limité à l'ordre 2 s'écrit

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + (t - t_0)\varphi'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2}\varphi''(t_0) + o((t - t_0)^2).$$

Si  $\varphi'(t_0)$  et  $\varphi''(t_0)$  sont linéairement indépendants (*courbure non nulle*), la courbe est située d'un seul côté de sa tangente, au voisinage de  $p$  : elle est contenue dans le demi-plan délimité par la tangente et contenant  $\varphi''(t_0)$ .

Lorsque  $\varphi''(t_0)$  est proportionnel à  $\varphi'(t_0)$  (*courbure nulle*), il faut pousser le développement limité plus loin. Supposons que  $\varphi^{(j)}(t_0)$  est proportionnel à  $\varphi'(t_0)$  pour tout  $1 \leq j \leq s-1$  et  $\varphi^{(s)}(t_0)$  ne l'est pas ; on effectue alors un développement limité à l'ordre  $s$ ,

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + P_s(t)\varphi'(t_0) + \frac{(t - t_0)^s}{s!}\varphi^{(s)}(t_0) + o((t - t_0)^s),$$

où  $P_s(t)$  est un polynôme de degré  $s-1$  qui s'annule en  $t_0$  et qui s'exprime simplement en fonction du polynôme de Taylor de  $\varphi(t)$  en  $t_0$ . On en déduit l'allure locale de  $\Gamma$  en fonction de la parité de  $s$  :

- si  $s$  est pair, la courbe est localement d'un seul côté de sa tangente,
- si  $s$  est impair, la courbe traverse sa tangente.

Il reste à comprendre le cas où tous les vecteurs dérivés  $\varphi^{(j)}(t_0)$  sont proportionnels à  $\varphi'(t_0)$ , pour tout  $j \in \mathbb{N}$ . Si l'application  $\varphi$  est développable en série entière au voisinage de  $t_0$ , cela signifie alors que l'application  $\varphi$  s'écrit

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + (t - t_0)h(t)\varphi'(t_0)$$

où  $h$  est une fonction réelle analytique. Dans ce cas,  $\Gamma$  est tout bonnement la droite passant par  $\varphi(t_0)$  et de vecteur directeur  $\varphi'(t_0)$  !

Lorsque  $\varphi$  est lisse mais n'est pas développable en série entière, on ne peut pas conclure. Les exemples qui suivent montrent deux graphes qui ont cette propriété. Dans un cas la courbe est d'un côté de sa tangente, dans l'autre elle traverse sa tangente.

**Exemple 1.2.9.** On considère les fonctions  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -\exp(-1/x^2) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ces fonctions sont infiniment dérivables sur  $\mathbb{R}$  avec toutes leurs dérivées nulles en 0, elles ne sont donc pas développables en série entière en 0.

Nous laissons le lecteur vérifier que le graphe de  $f$  se situe au-dessus de sa tangente en 0, tandis que le graphe de  $g$  traverse sa tangente en 0 (dans les deux cas, cette tangente est l'axe des  $x$ ).

### Points singuliers

Soit  $\Gamma$  une courbe géométrique donnée par une paramétrisation  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Nous considérons le cas d'un point singulier  $a = \varphi(t_0)$ , avec  $\varphi'(t_0) = 0$ .

Si les vecteurs dérivés  $\varphi^{(j)}(t_0)$  sont tous nuls, on ne peut rien dire de plus sauf si  $\varphi$  est développable en série entière, auquel cas  $\varphi$  est une application constante. Supposons donc que  $\varphi^{(p)}(t_0)$  est le premier vecteur non nul. Dans ce cas, on appelle *tangente* à la courbe  $\Gamma$  en  $a$  la droite de vecteur directeur  $\varphi^{(p)}(t_0)$  qui passe par le point  $a = \varphi(t_0)$ .

Si tous les  $\varphi^{(j)}(t_0)$  sont proportionnels à  $\varphi^{(p)}(t_0)$ , soit  $\varphi$  est réelle-analytique et alors  $\Gamma$  est la droite passant par  $\varphi(t_0)$  et de vecteur directeur  $\varphi^{(p)}(t_0)$ , soit on ne peut rien dire de plus, comme on s'en rend compte en modifiant très légèrement l'Exemple 1.2.9.

Supposons à présent qu'il existe  $j > p$  tel que les vecteurs  $\varphi^{(p)}(t_0)$  et  $\varphi^{(j)}(t_0)$  sont linéairement indépendants. On note  $q$  le plus petit de ces entiers  $j$ . Le comportement local de la courbe  $\Gamma$  dépend alors de la parité de  $p$  et  $q$  :

#### Définition 1.2.10.

*Si  $p$  est impair et  $q$  pair : on parle de point de concavité, la courbe est du côté de la tangente qui contient  $\varphi^{(q)}(t_0)$  ;*

*Si  $p$  est impair et  $q$  impair : on parle de point d'inflexion, la courbe traverse sa tangente ;*

*Si  $p$  est pair et  $q$  impair : on parle de point de rebroussement de première espèce, la courbe traverse sa tangente ;*

*Si  $p$  et  $q$  sont pairs : on parle de point de rebroussement de seconde espèce, la courbe est d'un côté de sa tangente.*

**Exemple 1.2.11.** *Vous pouvez fabriquer des exemples de chacune de ces situations en paramétrant la courbe géométrique définie par  $\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^a = y^b\}$  et en jouant sur la valeur des paramètres  $a, b \in \mathbb{N}$ .*

### 1.2.5 Rigidité globale

Nous avons déjà mentionné que les isométries directes du plan préservent la courbure. Voici une réciproque importante à cette observation :

**Théorème 1.2.12.** *Soit  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  deux courbes géométriques régulières dans  $\mathbb{R}^2$  qui ont la même courbure. Alors il existe une isométrie directe du plan qui transforme  $\Gamma_1$  en  $\Gamma_2$ .*

*Démonstration.* On peut supposer que  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont paramétrées par longueur d'arc  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ . On a donc

$$\|\varphi_1'(t)\| = \|\varphi_2'(t)\| = 1 \text{ et } \kappa_1(t) = \kappa_2(t) \text{ pour tout } t.$$

Fixons  $t_0$ . Soit  $F$  l'isométrie du plan  $\mathbb{R}^2$  composée d'une rotation qui envoie le vecteur unitaire  $\varphi'_1(t_0)$  sur  $\varphi'_2(t_0)$  et d'une translation telle que  $F(\varphi_1(t_0)) = \varphi_2(t_0)$ . On va montrer que  $F \circ \varphi_1 \equiv \varphi_2$ . Considérons

$$f(t) := \|(F \circ \varphi_1)'(t) - \varphi'_2(t)\|^2.$$

On va montrer que  $f' \equiv 0$ . Comme  $f(t_0) = 0$ , il s'ensuit que  $f$  est identique à zéro, donc l'application  $t \mapsto (F \circ \varphi_1 - \varphi_2)(t)$  est constante, donc nulle, puisqu'elle est nulle en  $t_0$ .

Il reste donc à calculer la dérivée de  $f$ . Rappelons que comme  $\varphi'_1(t)$  et  $\varphi'_2(t)$  sont des vecteurs unitaires,  $\varphi'_j(t)$  et  $\varphi''_j(t)$  sont orthogonaux. La différentielle de  $F$  est égale à  $F'$ , sa composante rotationnelle qui préserve l'orthogonalité. Rappelons enfin que la différentielle d'une application linéaire est égale à l'application linéaire elle-même, ainsi  $F'' = F'$ . Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2\langle (F \circ \varphi_1)''(t) - \varphi''_2(t), (F \circ \varphi_1)'(t) - \varphi'_2(t) \rangle \\ &= -2\langle F' \circ \varphi''_1(t), \varphi'_2(t) \rangle - 2\langle F' \circ \varphi'_1(t), \varphi''_2(t) \rangle. \end{aligned}$$

Soit  $J$  la rotation d'angle  $\pi/2$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Observons que  $J\varphi'_1(t)$  (resp.  $J\varphi'_2(t)$ ) est le vecteur normal direct à  $\varphi'_1(t)$  (resp.  $\varphi'_2(t)$ ), ainsi  $\varphi''_1(t) = \kappa(t)J\varphi'_1(t)$  et  $\varphi''_2(t) = \kappa(t)J\varphi'_2(t)$  puisque les deux courbes ont la même courbure. Comme  $F' = A$  commute avec  $J$  et  $J + {}^t J = 0$ , il vient

$$\begin{aligned} f'(t) &= -2\kappa\langle F' \circ J\varphi'_1, \varphi'_2(t) \rangle - 2\kappa\langle F' \circ \varphi'_1(t), J\varphi'_2(t) \rangle \\ &= -2\kappa\langle (F' \circ J + {}^t J \circ F')\varphi'_1, \varphi'_2 \rangle = 0, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

Le théorème précédent fournit un résultat d'unicité : la courbure caractérise les courbes géométriques planes, à isométrie près. On peut également montrer un résultat d'existence :

**Théorème 1.2.13.** *Étant donnée une fonction lisse  $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ , il existe une courbe géométrique plane dont  $\kappa$  est la courbure.*

*Démonstration.* Nous allons utiliser le lien entre la courbure et la dérivée de l'angle entre les vecteurs tangents. Fixons  $s_0 \in I$  et posons

$$\varphi(s) = \left( \int_{s_0}^s \cos(\theta(t)) dt, \int_{s_0}^s \sin(\theta(t)) dt \right)$$

où

$$\theta(s) := \int_{s_0}^s \kappa(t) dt.$$

La courbe plane  $\Gamma = \varphi(I) \subset \mathbb{R}^2$  est paramétrée par longueur d'arc puisque

$$\varphi'(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$$

et sa courbure est donnée par  $K(s) = \kappa(s) = \theta'(s)$  puisque

$$\varphi''(s) = \theta'(s) (-\sin(\theta(s)), \cos(\theta(s))) = \kappa(s) (-\sin(\theta(s)), \cos(\theta(s))). \quad \square$$

## 1.3 Courbes gauches

### 1.3.1 Courbure et torsion

#### Paramétrisation par longueur d'arc

Soit  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  une courbe géométrique paramétrée par sa longueur d'arc  $\varphi : I \mapsto \mathbb{R}^3$ . Rappelons que cela implique que pour tout  $s \in I$ ,  $\|\varphi'(s)\| = 1$ . On note

$$T(s) := \varphi'(s), \text{ le vecteur tangent unitaire.}$$

Comme  $T(s)$  est unitaire, le vecteur dérivé  $T'(s)$  est orthogonal à  $T(s)$ . On suppose dans la suite que  $T'(s) \neq 0$  et on définit

$$N(s) := \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} \text{ le vecteur normal principal unitaire.}$$

**Définition 1.3.1.** La courbure  $\kappa(s)$  de la courbe  $\Gamma$  au point  $\varphi(s)$  est

$$\kappa(s) := \|T'(s)\| = \|\varphi''(s)\|.$$

#### Remarques 1.3.2.

1) Par définition, la courbure d'une courbe gauche est toujours positive. Lorsque cette courbe est plane (i.e. vit dans un plan affine de  $\mathbb{R}^3$ ), elle coïncide avec la valeur absolue de la courbure définie précédemment.

2) Le vecteur normal unitaire n'est défini que lorsque la courbure ne s'annule pas. Celle-ci ne peut pas trop s'annuler, à moins que la courbe soit une droite : une courbe gauche est une (portion de) droite si et seulement si sa courbure est nulle. En effet, dans ce cas  $\varphi''(s) \equiv 0$ , donc  $s \mapsto \varphi(s)$  est affine.

On a donc  $T'(s) = \kappa(s)N(s)$  par définition. Le vecteur binormal est

$$B(s) := T(s) \wedge N(s).$$

Il s'ensuit que  $\{T(s), N(s), B(s)\}$  est une base orthonormée directe de  $\mathbb{R}^3$  qui bouge avec  $s$  et va être particulièrement adaptée à l'étude des propriétés géométriques de la courbe  $\Gamma$ . On l'appelle le *repère de Frenet*<sup>3</sup>.

On cherche à présent à calculer les dérivées de ces vecteurs dans le repère de Frenet. Par définition  $T'(s) = \kappa(s)N(s)$ . Pour exprimer  $N'(s)$ , observons que  $N'(s)$  est orthogonal à  $N(s)$  puisque  $N(s)$  est unitaire. Notons également qu'en dérivant la relation d'orthogonalité entre  $T(s)$  et  $N(s)$ , on obtient

$$0 = (\langle T(s), N(s) \rangle)' = \langle T'(s), N(s) \rangle + \langle T(s), N'(s) \rangle.$$

---

3. Jean Frédéric Frenet, mathématicien, astronome et météorologue français (1816-1900). Les formules de Frenet constituent une partie de sa thèse de doctorat qu'il a passé à Toulouse en 1847. Il fut professeur à l'Université de Toulouse en 1848-49.

Cela permet de déterminer la coordonnée de  $N'(s)$  dans la direction de  $T(s)$  :

$$\langle T(s), N'(s) \rangle = -\langle T'(s), N(s) \rangle = -\kappa(s).$$

La troisième coordonnée de  $N'(s)$ , celle dans la direction de  $B(s)$ , s'appelle la torsion.

**Définition 1.3.3.** *La torsion  $\tau(s)$  de la courbe  $\Gamma$  au point  $\varphi(s)$  est*

$$\tau(s) := \langle B(s), N'(s) \rangle.$$

Déterminons enfin les coordonnées de  $B'(s)$ . Comme précédemment,  $B'(s)$  est orthogonal à  $B(s)$  (caractère unitaire). La coordonnée dans la direction de  $N(s)$  est

$$\langle N(s), B'(s) \rangle = -\langle N'(s), B(s) \rangle = -\tau(s).$$

Enfin, la coordonnée dans la direction de  $T(s)$  est

$$\langle T(s), B'(s) \rangle = -\langle T'(s), B(s) \rangle = 0.$$

Nous venons ainsi d'établir les formules de Frenet que nous résumons sous forme matricielle dans la proposition suivante.

**Proposition 1.3.4.** *Les dérivées du repère de Frenet sont données par*

$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{bmatrix}.$$

Notons que le vecteur normal et le vecteur binormal ne sont bien définis que lorsque la courbure ne s'annule pas. Dans ce cas, la torsion est (identiquement) nulle si et seulement si la courbe est plane :

**Proposition 1.3.5.** *Une courbe gauche dont la courbure ne s'annule pas est incluse dans un plan si et seulement si sa torsion est identiquement nulle.*

*Démonstration.* Soit  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  une courbe gauche. Si elle est incluse dans un plan, on peut composer par une isométrie pour que ce plan soit ( $z = 0$ ). Une paramétrisation de  $\Gamma$  est donc du type

$$\varphi(t) = (x(t), y(t), 0).$$

Il vient donc  $N' \in \text{Vect}\{T, N\}$  et  $\tau \equiv 0$ .

Réciproquement, supposons que  $\tau \equiv 0$ . On en déduit que le vecteur binormal  $B(s) = B_0$  est constant puisque  $B' = -\tau N$ . Il s'ensuit que la courbe  $\Gamma$  est contenue dans le plan affine qui passe par  $\varphi(0)$  et qui est normal à  $B_0$  : en effet, quitte à translater, on peut supposer que  $\varphi(0) = 0$ . Il vient alors pour tout  $t$ ,

$$\langle \varphi'(t), B_0 \rangle = 0$$

d'où  $\langle \varphi(t), B_0 \rangle = 0$  après intégration.  $\square$

**Remarque 1.3.6.** *Lorsque la courbure s'annule, il se peut que la torsion soit identique à zéro là où elle est définie, sans que la courbe soit plane.*

### Paramétrisation quelconque

Il est utile d'établir les expressions de la courbure et de la torsion lorsque la courbe est donnée par une paramétrisation qui n'est pas nécessairement la paramétrisation par longueur d'arc.

**Proposition 1.3.7.** *Soit  $\Gamma$  une courbe géométrique régulière donnée par une paramétrisation quelconque  $\varphi : t \in I \mapsto \varphi(t) \in \mathbb{R}^3$ . La courbure de  $\Gamma$  au point  $\varphi(t)$  est donnée par*

$$\kappa(t) = \frac{\|\varphi'(t) \wedge \varphi''(t)\|}{\|\varphi'(t)\|^3}.$$

*Démonstration.* Le vecteur unitaire tangent  $T(t)$  est donné par  $\varphi'(t) = \|\varphi'(t)\|T(t)$ . En dérivant une seconde fois, on obtient

$$\varphi''(t) = \|\varphi'(t)\|T'(t) + a(t)T(t)$$

où  $a(t)$  est une fonction que nous ne cherchons pas à calculer.

Observons que  $T'(t)$  est orthogonal à  $T(t)$  puisque celui-ci est unitaire. On a donc  $\|T(t) \wedge T'(t)\| = \|T(t)\| \cdot \|T'(t)\|$ , d'où

$$\|\varphi'(t) \wedge \varphi''(t)\| = \|\varphi'(t)\|^2 \|T(t) \wedge T'(t)\| = \|\varphi'(t)\|^3 \kappa(t).$$

□

**Proposition 1.3.8.** *Soit  $\Gamma$  une courbe géométrique donnée par une paramétrisation quelconque  $\varphi : t \in I \mapsto \varphi(t) \in \mathbb{R}^3$ . La torsion de  $\Gamma$  au point  $\varphi(t)$  est donnée par*

$$\tau(t) = \frac{\det(\varphi'(t), \varphi''(t), \varphi'''(t))}{\|\varphi'(t) \wedge \varphi''(t)\|^2}.$$

*Démonstration.* Soit  $\psi(s)$  la paramétrisation de  $\Gamma$  par son abscisse curviligne,  $\psi = \varphi \circ \alpha$ , avec  $\alpha'(s) = \|\psi'(t)\|^{-1}$ ,  $t = \alpha(s)$ . Nous allons montrer que la torsion de  $\Gamma$  au point  $\psi(s)$  est donnée par

$$\tau(s) = \frac{1}{\kappa(s)^2} \det(\psi'(s), \psi''(s), \psi'''(s)). \quad (1.1)$$

La formule annoncée en résultera, en observant que  $\varphi' = \alpha' \psi' \circ \alpha$ ,

$$\varphi'' = (\alpha')^2 \psi'' \circ \alpha + A \psi' \circ \alpha \quad \text{et} \quad \varphi''' = (\alpha')^3 \psi''' \circ \alpha + B \psi'' \circ \alpha + C \psi' \circ \alpha,$$

où  $A, B, C$  sont des fonctions que nous ne précisons pas. Comme annoncé, il résulte alors de la Proposition 1.3.7 et de (1.1) que

$$\tau(t) = \tau(s) = \frac{\|\psi'(t)\|^6 \det(\varphi'(s), \varphi''(s), \varphi'''(s))}{\|\psi'(t) \wedge \psi''(t)\|^2} = \frac{\det(\psi'(t), \psi''(t), \psi'''(t))}{\|\psi'(t) \wedge \psi''(t)\|^2}.$$

Il reste donc à établir (1.1), c'est-à-dire à exprimer la torsion en fonction de  $\psi$  et ses dérivées, lorsque  $\psi$  est la paramétrisation de  $\Gamma$  par l'abscisse curviligne. Rappelons que

$$\tau(s) = \langle B(s), N'(s) \rangle = -\langle N(s), B'(s) \rangle.$$

Or  $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ , il résulte donc des propriétés du produit vectoriel que

$$\tau(s) = -\langle N(s), T(s) \wedge N'(s) \rangle = \det(T(s), N(s), N'(s)).$$

On conclut en observant que  $T(s) = \psi'(s)$ ,  $N(s) = \kappa(s)^{-1}\psi''(s)$  et

$$N'(s) = \kappa(s)^{-1}\psi'''(s) + a(s)\psi''(s)$$

où  $a(s)$  est une fonction qui n'intervient pas dans le déterminant.  $\square$

### 1.3.2 Tangente, plan normal, plan osculateur

Soit  $\varphi : t \in I \mapsto \varphi(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée  $\Gamma$ . Les équations d'une droite affine de  $\mathbb{R}^3$  dépendent de quatre paramètres, par exemple

$$y = ax + b \text{ et } z = cx + d.$$

On peut choisir ceux-ci de sorte que la droite ait un contact d'ordre deux avec la courbe. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que cela conduit aux équations suivantes pour la *tangente* à  $\Gamma$  :

**Définition 1.3.9.** *La tangente en un point régulier  $(x, y, z)$  de  $\Gamma$  est donnée par les équations*

$$y'(X - x) = x'(Y - y) \text{ et } z'(Y - y) = y'(Z - z).$$

Il s'agit de la droite

$$\varphi(t) + \mathbb{R}\varphi'(t) = \varphi(t) + \mathbb{R}T(t)$$

où  $T(t)$  désigne le vecteur tangent unitaire à la courbe  $\Gamma$  au point  $\varphi(t)$ .

**Définition 1.3.10.** *Le plan perpendiculaire à la tangente en un point régulier est appelé plan normal et a pour équation*

$$x'(X - x) + y'(Y - y) + z'(Z - z) = 0.$$

C'est le plan  $\varphi(t) + \text{Vect}\{N(t), B(t)\}$  engendré par le vecteur normal et le vecteur binormal unitaire.

L'équation d'un plan affine  $ax + by + cz + d = 0$  dépend de trois paramètres (le plan reste inchangé si on multiplie l'équation définissante par une constante non nulle) qui peuvent être choisis de manière à avoir un ordre de contact d'au moins trois avec la courbe. Le plan correspondant (qui est déterminé de façon unique) s'appelle le *plan osculateur*.

**Proposition 1.3.11.** *Le plan osculateur est donné par l'équation*

$$\det \begin{bmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{bmatrix} = 0.$$

C'est le plan  $\varphi(t) + \text{Vect}\{\mathbf{T}(t), \mathbf{N}(t)\}$  engendré par le vecteur tangent et le vecteur normal unitaire.

*Démonstration.* Soit  $aX + bY + cZ + d = 0$  l'équation d'un plan. Ce plan passe par le point  $\varphi = (x, y, z)$  si  $ax + by + cz + d = 0$ . En effectuant un développement de Taylor-Young des fonctions coordonnées de  $\varphi(s)$  au point  $\varphi(t) = (x, y, z)(t)$ , il vient

$$\begin{cases} x(s) = x(t) + x'(t)(s-t) + \frac{x''(t)}{2}(s-t)^2 + o((s-t)^2) \\ y(s) = y(t) + y'(t)(s-t) + \frac{y''(t)}{2}(s-t)^2 + o((s-t)^2) \\ z(s) = z(t) + z'(t)(s-t) + \frac{z''(t)}{2}(s-t)^2 + o((s-t)^2). \end{cases}$$

Le plan a un ordre de contact au moins trois au point  $\varphi(t)$  si

$$ax(s) + by(s) + cz(s) + d = o((s-t)^2).$$

On injecte les développements limités des fonctions coordonnées dans cette équation pour obtenir le système de trois équations

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ ax' + by' + cz' = 0 \\ ax'' + by'' + cz'' = 0. \end{cases}$$

On retranche à la première équation  $aX + bY + cZ + d = 0$  pour aboutir au système homogène

$$\begin{cases} a(x - X) + b(y - Y) + c(z - Z) = 0 \\ ax' + by' + cz' = 0 \\ ax'' + by'' + cz'' = 0. \end{cases}$$

Pour que ce système admette une solution non nulle, il faut que le déterminant de la matrice associée soit égal à zéro. Réciproquement, si on choisit  $a, b, c, d$  de sorte que

$$aX + bY + cZ + d = \det \begin{bmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{bmatrix},$$

on obtient bien que le plan  $\{aX + bY + cZ + d = 0\}$  a un contact d'ordre trois (au moins) avec la courbe en  $\varphi(t)$ .

Ce n'est pas toujours le seul plan avec une telle propriété (pensez au cas où la courbe est une droite), mais c'est toutefois le cas génériquement.  $\square$

### 1.3.3 Rigidité globale

**Proposition 1.3.12.** *La courbure et la valeur absolue de la torsion sont invariantes par les isométries de  $\mathbb{R}^3$ .*

Rappelons que les isométries de  $\mathbb{R}^3$  sont engendrées par les translations et les matrices orthogonales. Il suffit donc de vérifier l'impact de ces deux types de transformations sur la courbure et la torsion.

*Démonstration.* Il est clair que l'action d'une translation ne change ni la courbure, ni la torsion. Soit  $A \in O(3, \mathbb{R})$  une matrice orthogonale,  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée par son abscisse curviligne  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  et  $\Gamma_2$  la courbe paramétrée par  $\psi = A \circ \varphi$ . Alors

$$\|\psi'(s)\| = \|A\varphi'(s)\| = 1$$

puisque  $A$  est orthogonale. Donc  $\Gamma_2$  est également paramétrée par son abscisse curviligne et  $T_2(s) = AT(s)$ . En dérivant à nouveau, il vient

$$\kappa_2(s)N_2(s) = \kappa(s)AN(s).$$

Comme  $A$  est orthogonale,  $AN(s)$  est un vecteur unitaire, donc  $N_2(s) = AN(s)$  et  $\kappa_2(s) = \kappa(s)$ . Il s'ensuit que

$$B_2(s) = T_2(s) \wedge N_2(s) = AT(s) \wedge AN(s) = \det A \cdot A(T(s) \wedge N(s))$$

avec  $\det A = +1$  si  $A$  est une isométrie directe (qui préserve l'orientation) et  $\det A = -1$  sinon (par exemple pour une réflexion). On a utilisé ici l'orthogonalité de la matrice  $A$  ( ${}^tA = A^{-1}$ ) en observant que pour tout  $w \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\langle AT \wedge AN, w \rangle = \det A \langle T \wedge N, A^{-1}w \rangle = \det A \langle A(T \wedge N), w \rangle.$$

Rappelons en effet que pour tout  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\langle u \wedge v, w \rangle = \det(u, v, w).$$

On en déduit que

$$B_2(s) = \pm AB(s)$$

où le signe est donné par  $\det A$ . En dérivant cette égalité, on obtient, puisque  $N_2(s) = AN(s)$ ,

$$\tau_2(s) = \tau(s) \text{ si } \det A > 0 \text{ et } \tau_2(s) = -\tau(s) \text{ sinon.}$$

Dans les deux cas, la valeur absolue de la torsion est préservée.  $\square$

Le résultat suivant exprime un phénomène de rigidité des courbes gauches.

**Théorème 1.3.13.** *Soit  $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{R}^3$  deux courbes géométriques paramétrées par leur abscisse curviligne, dont la courbure ne s'annule pas. Si elles ont mêmes courbure et torsion, alors il existe une isométrie directe de  $\mathbb{R}^3$  qui envoie une courbe sur l'autre.*

Notons que lorsque la courbure s'annule, le repère de Frenet n'est pas correctement défini et il peut se passer des phénomènes compliqués.

Comme nous l'avons observé dans la preuve de la proposition précédente, une réflexion change le signe de la torsion et est donc interdite ici.

*Démonstration.* Soit  $\varphi_1, \varphi_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  les paramétrisations par l'abscisse curviligne de  $\Gamma_1, \Gamma_2$ . On peut supposer que  $0 \in I$ . Comme le groupe orthogonal  $O(3, \mathbb{R})$  est 3-transitif, on peut trouver une matrice  $A \in O(3, \mathbb{R})$  telle que

$$AT_1(0) = T_2(0), \quad AN_1(0) = N_2(0), \quad \text{et} \quad AB_1(0) = B_2(0).$$

Comme les bases orthonormées  $\{T_1(0), N_1(0), B_1(0)\}$  et  $\{T_2(0), N_2(0), B_2(0)\}$  sont toutes les deux directes, la matrice  $A$  est de déterminant 1.

Soit  $V = \varphi_2(0) - A\varphi_1(0) \in \mathbb{R}^3$  et  $\Psi$  l'isométrie positive  $\Psi(X) = AX + V$ . Posons  $\Phi = \Psi \circ \varphi_1$ . On va montrer que  $\Phi \equiv \varphi_2$ , ce qui montrera que  $\Gamma_2$  est l'image de  $\Gamma_1$  sous l'action de  $\Psi$ . On note  $T_2(s), N_2(s), B_2(s)$  le repère de Frenet de  $\Gamma_2$  et  $T(s), N(s), B(s)$  celui de la courbe paramétrée par l'abscisse curviligne  $\Phi = \Psi \circ \varphi_1$ . Les choix de  $A$  et de la translation  $V$  assurent que

$$\Phi(0) = \varphi_2(0) \quad \text{et} \quad (T(0), N(0), B(0)) = (T_2(0), N_2(0), B_2(0)).$$

Il résulte de la proposition précédente (et de sa preuve) que la courbure et la torsion de  $\Phi$  sont égales à celles de  $\Gamma_1, \Gamma_2$ . On les note  $\kappa, \tau$ . Soit

$$f(s) := \langle T(s), T_2(s) \rangle + \langle N(s), N_2(s) \rangle + \langle B(s), B_2(s) \rangle.$$

On dérive  $f$  en utilisant les formules de Frenet. Il vient

$$\begin{aligned} f'(s) &= T' \cdot T_2 + T \cdot T_2' + N' \cdot N_2 + N \cdot N_2' + B' \cdot B_2 + B \cdot B_2' \\ &= \kappa(N \cdot T_2 + T \cdot N_2) - \kappa(T \cdot N_2 + N \cdot T_2) \\ &\quad + \tau(B \cdot N_2 + N \cdot B_2) - \tau(N \cdot B_2 + B \cdot N_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a noté ici  $u \cdot v = \langle u, v \rangle$  le produit scalaire de deux vecteurs  $u$  et  $v$ .

On en déduit que  $f(s)$  est constante, égale à  $f(0) = 3$ . Or  $f(s)$  est somme de trois termes qui valent tous au plus 1, c'est donc que chacun est égal à 1, ce qui impose les relations  $T(s) = T_2(s)$ ,  $N(s) = N_2(s)$  et  $B(s) = B_2(s)$  pour tout  $s$ . En particulier, comme le vecteur tangent unitaire est la dérivée de l'abscisse curviligne et comme  $\varphi_2(0) = \Phi(0)$  (c'est là qu'on a besoin de la translation), il vient  $\Phi \equiv \varphi_2$  comme nous l'avions annoncé.  $\square$

**Remarque 1.3.14.** *Le théorème précédent est un résultat d'unicité. On peut également démontrer un résultat d'existence : étant données deux fonctions lisses  $\kappa, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $\kappa > 0$ , il existe une courbe gauche  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  dont  $\kappa$  et  $\tau$  sont la courbure et la torsion.*

*La preuve consiste à démontrer l'existence d'un trièdre qui vérifie les relations de Frenet. Celles-ci peuvent s'interpréter comme un système d'équations différentielles linéaires dont l'existence des solutions est garantie par le théorème de Cauchy-Lipschitz. On intègre finalement le vecteur tangent pour obtenir une courbe  $\Gamma$  solution (les autres solutions s'en déduisent par isométries directes). Nous invitons le lecteur à mettre en place cette démonstration, il en trouvera les détails rédigés dans [DoCarmo, pp. 309-311].*

**Exemple 1.3.15.** *Considérons une hélice circulaire donnée par sa paramétrisation par longueur d'arc, comme indiquée dans l'Exemple 1.1.9,*

$$\psi(s) = \left( a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

où  $a > 0$  et  $b \in \mathbb{R}$  sont des paramètres fixés. Il s'agit d'une paramétrisation à vitesse 1 pour laquelle

$$\|\psi' \wedge \psi''\| = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

tandis que

$$\det(\psi', \psi'', \psi''') = \frac{a^2 b}{[a^2 + b^2]^3}.$$

Il s'ensuit que la courbure et la torsion de cette courbe sont constantes, données par

$$\kappa(s) = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad \tau(s) = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

*Les hélices circulaires sont les seules courbes dont la courbure et la torsion sont constantes. En effet, soit  $\varphi(s)$  la paramétrisation par longueur d'arc de la courbe  $\Gamma$  et  $(\kappa, \tau) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  les constantes déterminant la courbure et la torsion. Si  $\kappa = 0$ , alors la courbe  $\Gamma$  est une droite (cf. Remarques 1.3.2), c'est-à-dire une hélice dégénérée (cercle de rayon infini).*

*Supposons donc  $\kappa > 0$  et fixons  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que*

$$\kappa = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

*Soit  $\psi(s)$  la paramétrisation par longueur d'arc de l'hélice  $H$  d'axe  $(Oz)$  et de paramètres  $(a, b)$  (ci-dessus). Alors  $\varphi$  et  $\psi$  ont même courbure et même torsion. D'après le Théorème 1.3.13, ces deux courbes diffèrent l'une de l'autre par l'action d'une isométrie  $F$  de  $\mathbb{R}^3$ .*

*Nous laissons le lecteur vérifier qu'une telle isométrie envoie un cylindre droit sur un cylindre droit et une hélice sur une hélice. Il s'ensuit que  $\Gamma$  est une hélice circulaire d'axe  $F(Oz)$  et de paramètres  $a, b$ .*

## 1.4 Isométries euclidiennes

Nous rappelons ici la définition des isométries de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.4.1.** Une application  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une isométrie (euclidienne) si elle préserve la norme (euclidienne)

$$\|F(p) - F(q)\| = \|p - q\|, \text{ pour tout } p, q \in \mathbb{R}^n.$$

**Proposition 1.4.2.** Une application  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une isométrie si et seulement si c'est la composée d'une translation et d'une transformation orthogonale, c'est-à-dire qu'elle préserve le produit scalaire.

Une isométrie est donc constituée d'une partie linéaire (isométrie dite vectorielle, qui fixe l'origine) et d'une translation (sa partie affine).

Rappelons qu'une transformation orthogonale admet pour matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  un élément  $A \in M(n, \mathbb{R})$  tel que  ${}^tA = A^{-1}$ . Son déterminant vérifie donc  $\det A = \pm 1$ . Elle préserve l'orientation si et seulement si son déterminant est 1.

*Démonstration.* Notons  $v = F(0)$ . Quitte à remplacer  $F$  par  $G = F - F(0)$ , on se ramène au cas où  $F(0) = 0$  (on vient de mettre de côté la partie translation). Par hypothèse pour tout  $X, Y \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$\|F(X) - F(Y)\|^2 = \|X - Y\|^2,$$

en particulier  $\|F(X)\|^2 = \|X\|^2$  puisque l'on s'est ramené au cas où  $F(0) = 0$ . Comme

$$\|F(X) - F(Y)\|^2 = \|F(X)\|^2 + \|F(Y)\|^2 - 2\langle F(X), F(Y) \rangle$$

et

$$\|X - Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2 - 2\langle X, Y \rangle$$

on en déduit que

$$\langle F(X), F(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle.$$

Soit  $(e_j)_{1 \leq j \leq n}$  une base orthonormée. La relation précédente assure que  $(F(e_j))_{1 \leq j \leq n}$  est également une base orthonormée. On peut donc décomposer le vecteur  $F(X)$  dans cette base : il vient

$$F(X) = \sum_{j=1}^n \langle F(e_j), F(X) \rangle F(e_j) = \sum_{j=1}^n \langle e_j, X \rangle F(e_j),$$

ce qui montre que  $F(X)$  dépend linéairement de  $X$ . Ainsi,  $F(X) = AX$  où  $A \in O(n, \mathbb{R})$  est une matrice orthogonale puisqu'elle vérifie

$$\langle {}^tAAX, Y \rangle = \langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle, \text{ pour tout } X, Y \in \mathbb{R}^n.$$

d'où  ${}^tA = A^{-1}$ . □

Voici quelques propriétés des isométries que vous devez connaître :

- l'ensemble des isométries de  $\mathbb{R}^n$  forment un groupe  $Isom(\mathbb{R}^n)$  ;
- les isométries *positives* (celles qui préservent l'orientation) forment un sous-groupe, elles sont parfois appelées « déplacements » ;
- le groupe orthogonal  $O(n, \mathbb{R})$  est compact (pour la topologie induite par une norme sur  $\mathbb{R}^{n^2} \simeq M(n, \mathbb{R}) \supset O(n, \mathbb{R})$ ) ;
- le sous-groupe  $O^+(n, \mathbb{R})$  est connexe, non commutatif pour  $n \geq 3$ .

**Proposition 1.4.3.** *Les réflexions engendrent le groupe  $Isom(\mathbb{R}^n)$ .*

Une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

*Démonstration.* Soit  $f$  une isométrie de  $\mathbb{R}^n$ . Si elle n'a aucun point fixe, on choisit  $O \in \mathbb{R}^n$  et on note  $H$  l'hyperplan médiateur du segment  $[Of(O)]$ . Alors  $O$  est un point fixe de l'isométrie  $s_H \circ f$ , où  $s_H$  désigne la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan  $H$ . On s'est ainsi ramenés au cas où  $f$  admet un point fixe  $O$  que l'on peut choisir comme origine.

Il reste donc à montrer qu'une isométrie vectorielle est une composée de réflexions. On observe que l'ensemble  $Fix(f)$  des points fixes est un sous-espace vectoriel. Nous allons raisonner par récurrence sur sa dimension. Si  $\dim Fix(f) = n$ , alors  $f = Id$  et il n'y a rien à faire. Supposons donc  $\dim Fix(f) = j < n$ . Soit  $P \in \mathbb{R}^n \setminus Fix(f)$  et  $H$  l'hyperplan médiateur du segment  $[Pf(P)]$ . Le fait que  $f$  est une isométrie garantit que  $Fix(f) \subset H$ . On en déduit que l'isométrie  $g = s_H \circ f$  a un espace de points fixes  $Fix(g)$  de dimension  $\geq j + 1$ . On lui applique l'hypothèse de récurrence pour conclure.

Au final, nous obtenons ainsi qu'une isométrie vectorielle (resp. affine) est la composée d'au plus  $n$  (resp.  $n + 1$ ) symétries orthogonales.  $\square$

### Isométries de $\mathbb{R}^2$ .

- une isométrie plane est soit une translation, soit une rotation affine (i.e. une rotation non nécessairement centrée à l'origine), soit une réflexion, soit une symétrie glissée (composée d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite et d'une translation par un vecteur de cette même droite) ;
- une symétrie ( $s \circ s = Id$ ) est soit une rotation d'angle  $0$  ou  $\pi$ , soit une symétrie orthogonale par rapport à une droite (réflexion).

**Isométries de  $\mathbb{R}^3$ .** Les isométries de  $\mathbb{R}^3$  sont de six types :

- les translations ;
- les réflexions affines ;
- les symétries glissées orthogonales (composée d'une réflexion et d'une translation par un vecteur du plan de la réflexion) ;
- les rotations (d'axe affine) ;
- les vissages (composées d'une rotation et d'une translation de l'axe) ;
- les antirotations (composées d'une rotation et d'une symétrie).

Nous renvoyons le lecteur au livre [Audin] pour plus de détails.

## 1.5 Propriétés globales

### 1.5.1 Courbes fermées

Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ . Soit  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrée telle que  $\varphi(a) = \varphi(b)$ . Pour que les deux branches de  $\varphi$  se raccordent de façon lisse au point  $\varphi(a)$ , on impose de plus que  $\varphi^{(j)}(a) = \varphi^{(j)}(b)$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$ . On dit dans ce cas que  $\Gamma = \varphi([a, b])$  est une *courbe fermée*.

Quitte à dilater et translater, on peut supposer que  $a = 0$  et  $b = 2\pi$  et prolonger  $\varphi$  par  $2\pi$ -périodicité. En identifiant le cercle unité  $S^1$  au quotient  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  via l'exponentielle complexe  $\theta \mapsto e^{i\theta}$ , on obtient une paramétrisation

$$f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$$

de la courbe fermée  $\Gamma$ , qui est donnée par une application lisse (on donnera au chapitre 3 une définition convenable de la régularité de telles applications).

**Définition 1.5.1.** Une courbe fermée  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  est simple si elle n'a pas d'autres auto-intersections, i.e.  $\varphi(a) = \varphi(b)$  mais  $\varphi(t) \neq \varphi(s)$  pour  $t, s \in [a, b[$  avec  $t \neq s$ .

On s'intéresse ici au *degré* des applications du cercle  $S^1$  dans lui-même, qui apparaissent lorsque l'on étudie les vecteurs tangents de courbes fermées.

### Relevés des applications

On note  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  la projection canonique de la relation d'équivalence modulo  $2\pi\mathbb{Z}$  et on identifie  $S^1$  au cercle unité par l'application exponentielle complexe

$$\theta \in \mathbb{R} \mapsto e^{i\theta} \in S^1 \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2.$$

**Lemme 1.5.2.** Soit  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $f \in C^\infty([a, b], S^1)$ , et  $u \in p^{-1}(f(a))$ . Il existe une unique application  $F \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$  telle que

$$f = p \circ F \quad \text{et} \quad F(a) = u.$$

*Démonstration.* Supposons que  $f = p \circ F$ . En identifiant  $S^1$  au cercle unité par l'exponentielle complexe, cela revient à dire que

$$f(t) = e^{iF(t)}$$

pour tout  $t \in I$ . Ainsi,  $F'(t) = -if'(t)/f(t)$ , donc  $F$  est uniquement déterminée par intégration.  $\square$

Notons que deux relevés diffèrent d'un multiple de  $2\pi$  : si  $F$  et  $G$  sont deux applications telles que  $p \circ F = p \circ G$ , alors il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que

$$F \equiv G + 2k\pi.$$

**Remarque 1.5.3.** On peut étendre le lemme à des applications seulement continues, mais il faut une preuve différente (voir par exemple la démonstration de [DoCarmo, Proposition 2, p. 376]).

### Degré des applications

Soit  $f : S^1 \rightarrow S^1$  et  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  l'application de passage au quotient. On note  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  l'application  $\tilde{f} := f \circ p$ . En appliquant le lemme précédent, on obtient une application  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f \circ p = p \circ F$ ,

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \\ \uparrow & \nearrow \tilde{f} & \uparrow \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R} \end{array}$$

On dit que le diagramme commute.

**Définition 1.5.4.** On appelle degré de  $f$  le nombre

$$\deg(f) := \frac{F(2\pi) - F(0)}{2\pi}.$$

Notons que la définition ne dépend pas du choix du relevé (pourquoi?). L'exemple fondamental est celui de la fonction puissance

$$f : z \in S^1 \mapsto z^k \in S^1$$

où  $k \in \mathbb{Z}$  et où l'on a utilisé la notation complexe  $z = e^{i\theta}$ . Un relevé est

$$F : \theta \in \mathbb{R} \mapsto k\theta \in \mathbb{R}$$

et le degré de  $f$  est donc  $k$ .

**Proposition 1.5.5.** Soit  $f, g : S^1 \rightarrow S^1$  deux applications. Alors

- $\deg(f) \in \mathbb{Z}$  ;
- $\forall t \in \mathbb{R}, \deg(f) = [F(t + 2\pi) - F(t)]/2\pi$  ;
- $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$ .

*Démonstration.* Comme  $f(2\pi) = f(0)$ , il vient  $F(2\pi) - F(0) \in 2\pi\mathbb{Z}$ , ce qui assure que le degré est entier. Les autres points seront traités en exercice.  $\square$

**Proposition 1.5.6.** Une application  $f : S^1 \rightarrow S^1$  de degré non nul est nécessairement surjective.

Le degré d'une application  $f : S^1 \rightarrow S^1$  contient donc des informations intéressantes sur celle-ci. Nous en verrons d'autres (existence de points périodiques) dans les exercices.

*Démonstration.* Soit  $F : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  un relevé de  $f$ . On suppose que  $f$  est de degré  $k$  non nul,  $F(2\pi) = F(0) + 2k\pi$ . Pour fixer les idées, on suppose que  $k > 0$ .

Soit  $z = e^{i\theta} \in S^1$ . Comme l'intervalle  $[F(0), F(2\pi)]$  est de longueur supérieure ou égale à  $2\pi$ , on peut choisir  $\theta$  dans cet intervalle. Le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe  $\theta' \in [0, 2\pi]$  tel que  $F(\theta') = \theta$ . Cela signifie que  $f(e^{i\theta'}) = z$ , donc  $f$  est surjective.  $\square$

### Homotopies

**Définition 1.5.7.** Soit  $c_1$  et  $c_2 : S^1 \rightarrow S^1$  deux applications régulières. On appelle homotopie de  $c_1$  en  $c_2$  une application régulière

$$H : [0, 1] \times S^1 \rightarrow S^1$$

telle que  $H(0, \cdot) \equiv c_1(\cdot)$  et  $H(1, \cdot) \equiv c_2(\cdot)$ . On dit que  $c_1$  et  $c_2$  sont homotopes.

Il s'agit donc d'une déformation (continue) de  $c_1$  en  $c_2$ .

**Théorème 1.5.8.** Les applications de  $S^1$  dans  $S^1$  sont classifiées, à homotopie près, par leur degré.

*Démonstration.* Si  $H$  est une homotopie entre  $c_1$  et  $c_2$ , alors  $H(t, \cdot)$  est une application régulière de  $S^1$  dans  $S^1$ . Son degré est une fonction continue de  $t$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ , elle est donc constante. Ainsi  $\deg(c_1) = \deg(c_2)$ .

Réciproquement, soit  $c_1$  et  $c_2$  deux applications de même degré  $k \in \mathbb{Z}$ . On les relève en deux applications  $F_1, F_2 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$F_1(2\pi) - F_1(0) = F_2(2\pi) - F_2(0) = 2k\pi.$$

Considérons, pour tout  $t \in [0, 1]$  et  $s \in [0, 2\pi]$ ,

$$F(t, s) = tF_1(s) + (1 - t)F_2(s).$$

On vérifie que  $F$  est une déformation continue entre  $F_1$  et  $F_2$ . Comme  $F(t, 2\pi) = 2k\pi$  pour tout  $t \in [0, 1]$ , l'application passe au quotient et permet de définir  $H : [0, 1] \times S^1 \rightarrow S^1$  qui est une homotopie entre  $c_1$  et  $c_2$ .  $\square$

### 1.5.2 Enroulement des courbes fermées

Il est utile, même lorsque l'on s'intéresse à des propriétés différentielles, de considérer des *invariants topologiques*, i.e. des objets (nombres, groupes, etc.) qui restent inchangés lorsque l'on déforme continûment la structure étudiée.

#### Courbes planes

**Définition 1.5.9.** Soit  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe fermée. Le nombre  $\text{enroul}(f)$  d'enroulement de  $f$  est le degré de l'application  $\tau : S^1 \rightarrow S^1$ , qui à  $t \in S^1$  associe le vecteur unitaire tangent à la courbe au point  $f(t)$ .

**Proposition 1.5.10.** Le nombre d'enroulement est indépendant du paramétrage (s'il préserve l'orientation). Il est invariant par déformation.

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate de ce que le degré est invariant par homotopie.  $\square$

**Remarque 1.5.11.** *Pour une courbe orientée, le nombre d'enroulement est défini en choisissant une paramétrisation. Pour une courbe non orientée, il est défini au signe près.*

**Théorème 1.5.12.** *Soit  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe fermée paramétrée à vitesse unité. Alors*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \kappa(s) ds = \text{enroul}(f).$$

*Démonstration.* Par définition,  $\kappa(s)$  est la vitesse (orientée) de variation du vecteur unitaire tangent  $\tau(s)$  par rapport à  $s$ . L'intégrale de  $\kappa$  est donc la variation totale de  $\tau$ , i.e. l'intégrale sur  $S^1$  de  $\kappa(s)$  est égale à  $2\pi$  fois le nombre de tours effectués par  $\tau$ .  $\square$

On définit de façon analogue à ce qui a été fait précédemment l'homotopie entre deux courbes fermées orientées.

**Théorème 1.5.13.** *Les courbes fermées orientées sont classifiées à homotopie près par leur nombre d'enroulement.*

*Démonstration.* Deux courbes homotopes ont les mêmes nombres d'enroulement par invariance du nombre d'enroulement par déformation.

Réciproquement, soit  $c_1, c_2$  deux courbes fermées orientées ayant le même nombre d'enroulement  $n$ . On veut montrer qu'elles sont homotopes. Quitte à effectuer une déformation homothétique, il suffit de montrer le résultat lorsque  $c_1$  et  $c_2$  sont de longueur  $2\pi$ .

On choisit des paramétrages  $f_1, f_2$  à vitesse unité. Quitte à translater, on peut supposer que  $f_1(0) = f_2(0) = 0$ . On appelle  $\tau_1, \tau_2$  les vecteurs unitaires tangents associés, ainsi  $\deg(\tau_1) = \deg(\tau_2) = n$ .

D'après le théorème de classification des applications de  $S^1$  dans  $S^1$ , il existe une homotopie  $H : [0, 1] \times S^1 \rightarrow S^1$  de  $\tau_1$  sur  $\tau_2$ . On pose alors, pour  $t \in [0, 1]$  et  $s \in \mathbb{R}$ ,

$$F(t, s) = \int_0^s H(t, u) du - \frac{s}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(t, u) du.$$

Observons que  $F$  est une application régulière,  $2\pi$ -périodique telle que

$$F(0, s) = \int_0^s \tau_1(u) du - \frac{s}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau_1(u) du = f_1(s)$$

et

$$F(1, s) = \int_0^s \tau_2(u) du - \frac{s}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau_2(u) du = f_2(s).$$

De plus pour tout  $t \in [0, 1]$  et  $s \in S^1$ ,

$$\frac{d}{ds} F(t, s) = H(t, s) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(t, u) du \neq 0$$

car  $2\pi^{-1} \int_0^{2\pi} H(t, u) du$  est dans le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1, comme barycentre de points de  $S^1$ .

Il s'ensuit que  $F$  est bien une homotopie entre  $f_1$  et  $f_2$ .  $\square$

**Remarque 1.5.14.** *Il s'avère qu'une courbe fermée simple a pour nombre d'enroulement 1 ou  $-1$ . Nous ne le démontrerons pas ici et renvoyons le lecteur à [DoCarmo, Theorem 2, p. 396].*

### Théorie des nœuds

Les propriétés des courbes gauches fermées simples font l'objet de la théorie des nœuds. Il s'agit de classifier les plongements de  $S^1$  dans  $\mathbb{R}^3$  à isotopie près. Pour distinguer deux tels plongements, on cherche à construire des invariants qui permettent de les distinguer (polynôme de Jones, etc.).

Nous renvoyons le lecteur au livre [Sossinsky] pour une belle introduction à cette théorie riche et difficile. Nous indiquons ici brièvement, sans démonstration, quelques propriétés globales des courbes gauches.

**Théorème 1.5.15** (Fenchel<sup>4</sup>). *Soit  $\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe fermée. Alors*

$$\int_{S^1} \kappa \geq 2\pi.$$

*Il y a égalité si et seulement si  $\varphi$  est une courbe plane convexe.*

La démonstration fait appel à la théorie des surfaces qui fait l'objet du prochain chapitre. Le lecteur intéressé peut consulter les détails de ce résultat célèbre dans [DoCarmo, Theorem 3, p. 399].

On peut améliorer sensiblement l'énoncé du résultat précédent.

**Définition 1.5.16.** *On dit qu'une courbe fermée  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  est non nouée s'il existe un plongement  $\varphi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^3$  du disque unité  $\Delta$  de  $\mathbb{R}^2$  tel que*

$$\varphi(\partial\Delta) = \Gamma.$$

*Une courbe est dite nouée dans le cas contraire.*

On peut vérifier que le caractère noué est invariant par homotopie.

**Théorème 1.5.17.** *Soit  $\varphi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  une courbe fermée nouée. Alors*

$$\int_{S^1} \kappa \geq 4\pi.$$

Il s'agit là d'un résultat célèbre de Fary<sup>5</sup> et Milnor<sup>6</sup>, le lecteur en trouvera une démonstration dans [DoCarmo, Theorem 4, p. 402].

---

4. Moritz Werner Fenchel, mathématicien danois d'origine allemande (1905-1988), un des pionniers de l'analyse convexe.

5. Istvan Fary, mathématicien hongrois (1922-1984).

6. John Willard Milnor, mathématicien américain (1931-), médaille Fields en 1962.

### 1.5.3 Inégalité isopérimétrique dans $\mathbb{R}^2$

Le théorème de Jordan<sup>7</sup> assure que le complémentaire  $\mathbb{R}^2 \setminus c$  d'une courbe plane fermée simple régulière  $c$  a exactement deux composantes connexes, notées  $c_{int}$  et  $c_{ext}$ . Ce sont deux domaines de frontières communes

$$\partial c_{int} = \partial c_{ext} = c$$

où  $c_{int}$  désigne la composante compacte. Nous renvoyons le lecteur au livre de Berger-Gostiaux [BerGos, Théorème 9.2.1] pour une démonstration de ce résultat classique et important.

Nous appelons dans la suite « aire de (la région délimitée par la courbe)  $c$  » l'aire de la composante compacte  $c_{int}$ .

**Théorème 1.5.18.** *Soit  $c$  une courbe plane fermée simple régulière. Alors*

$$\frac{\text{Aire}(c)}{\ell(c)^2} \leq \frac{\text{Aire}(\mathbf{D})}{\ell(\partial\mathbf{D})^2} = \frac{1}{4\pi},$$

avec égalité si et seulement si  $c$  est un cercle.

Il s'agit de l'inégalité isopérimétrique dans le plan.

**Remarque 1.5.19.** *Ce type de problème est connu depuis l'Antiquité. La reine Didon, fondatrice de Carthage en 814 avant J.-C., obtient pour s'installer « autant de terre qu'il en pourra tenir dans une peau de bœuf. » Didon fait découper cette peau en fines lamelles et les met bout à bout de façon à délimiter le plus grand territoire possible (bordé par la mer) : sauriez-vous l'aider à résoudre ce problème isopérimétrique dans le demi-plan ?*

*Démonstration.* La démonstration de l'inégalité isopérimétrique est une jolie conséquence de l'inégalité de Wirtinger<sup>8</sup> (Lemme 1.5.20 ci-dessous).

On se ramène par homothétie à une courbe de longueur  $2\pi$ , avec paramétrisation à vitesse unité  $h : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . On se ramène par translation au cas où  $(0, 0)$  est le centre de gravité de  $c$ . Autrement dit, si  $h = (f, g)$ , on impose

$$\int_{S^1} f = \int_{S^1} g = 0.$$

Il vient alors

$$\int_{S^1} f'^2 + g'^2 = 2\pi = \ell(c),$$

tandis que

$$\text{Aire}(c) = \int_{S^1} fg' = - \int_{S^1} f'g.$$

7. Marie Ennemond Camille Jordan, mathématicien français (1838-1922).

8. Wilhelm Wirtinger, mathématicien autrichien (1865-1945).

On en déduit

$$2(\pi - \text{Aire}(c)) = \int_{S^1} (f'^2 + g'^2 - 2fg') = \int_{S^1} (f'^2 - f^2) + \int_{S^1} (f - g')^2.$$

Le lemme de Wirtinger assure que la première intégrale est positive donc

$$2\pi - 2\text{Aire}(c) \geq 0.$$

Le cas d'égalité correspond à un cercle paramétré à vitesse unité.  $\square$

**Lemme 1.5.20.** *Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction régulière  $2\pi$ -périodique de moyenne nulle. Alors*

$$\int_0^{2\pi} f^2(t) dt \leq \int_0^{2\pi} f'^2(t) dt$$

avec égalité ssi  $f(t) \equiv a\cos(t) + b\sin(t)$ .

*Démonstration.* La fonction  $f$  (resp.  $f'$ ) est  $L^2$ , donc coïncide au sens  $L^2$  avec sa série de Fourier. En intégrant par parties, on observe que les coefficients de Fourier de  $f'$  vérifient

$$c_k(f') = ikc_k(f),$$

donc  $|c_k(f)|^2 \leq |c_k(f')|^2$  si  $k \neq 0$ .

Or le coefficient  $c_0(f)$  est supposé nul, d'où le résultat.  $\square$

**Remarque 1.5.21.** *La première preuve rigoureuse de l'inégalité isopérimétrique date seulement de la fin du XIX<sup>e</sup> siècle (par Weierstrass<sup>9</sup>). La preuve indiquée ci-dessus ne traite que le cas des courbes de classe  $C^1$ . Une approche alternative, plus géométrique, consiste à se ramener au cas d'un convexe compact du plan, puis à l'approximer par des polygones.*

*L'inégalité isopérimétrique dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , prend la forme suivante : si  $\Omega$  est un domaine borné (suffisamment régulier) de  $\mathbb{R}^n$ , alors*

$$\frac{[\text{Vol}(\Omega)]^n}{[\text{Vol}(\partial\Omega)]^{n-1}} \leq \frac{[\text{Vol}(B_n)]^n}{[\text{Vol}(\partial B_n)]^{n-1}} = \frac{[\text{Vol}(B_n)]^n}{[\text{Vol}(S_{n-1})]^{n-1}}$$

où  $B_n$  (resp.  $S_{n-1}$ ) désigne la boule (resp. sphère) unité de  $\mathbb{R}^n$ .

*Les théorèmes isopérimétriques sont actuellement l'objet de recherches intenses (le problème est délicat en dimension supérieure et dans certains espaces exotiques), en particulier en analyse fonctionnelle et en géométrie convexe.*

---

9. Karl Weierstrass, mathématicien allemand (1815-1897), le « père de l'analyse moderne ».

## 1.6 Exercices

### Courbes planes

**Exercice 1.** Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  une application lisse avec  $\varphi(0) = (0, 0)$ , dont l'image  $\Gamma$  est incluse dans la cubique cuspidale

$$\mathcal{C} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 = x^3\}.$$

Montrer qu'on a nécessairement  $\varphi'(0) = (0, 0)$ .

**Exercice 2.** Soit  $\Gamma$  une conique du plan  $\mathbb{R}^2$  et  $A \in \Gamma$ . La droite  $D(t)$  de pente  $t$  passant par  $A$  rencontre en général la conique  $\Gamma$  en un deuxième point noté  $M_t$  de coordonnées  $(x(t), y(t))$ .

1) Montrer que l'application  $t \mapsto \varphi(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$  paramètre  $\Gamma \setminus \{1\text{pt}\}$  par des fractions rationnelles.

2) Donner un paramétrage du cercle  $x^2 + y^2 = 1$  (privé d'un point) par des fractions rationnelles.

**Exercice 3.** Soit  $a, b > 0$ . Déterminer le lieu géométrique défini par la paramétrisation

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto \left( a \frac{1-t^2}{1+t^2}, b \frac{2t}{1+t^2} \right) \in \mathbb{R}^2.$$

**Exercice 4.**

1) Soit  $\varphi : t \in ]0, +\infty[ \mapsto (t^2, t^3) \in \mathbb{R}^2$ . Montrer que la longueur d'arc comptée à partir du point  $(0, 0)$  est la fonction algébrique

$$\ell(t) = \frac{1}{27}(4 + 9t^2)^{3/2} - \frac{8}{27}.$$

2) Savez-vous calculer le périmètre d'une ellipse ? Et son aire ?

**Exercice 5.** Donner une paramétrisation de la cubique nodale

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 = x^3 + x^2\}.$$

Tracer son graphe et calculer sa courbure.

**Exercice 6.** Soit  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée telle que  $\|\varphi(t) - \varphi(s)\|^2$  est une fonction lisse de  $|t - s|^2$ . Montrer que la courbe géométrique associée est une portion de droite ou de cercle.

**Exercice 7.** Étudier, tracer et calculer la courbure de la tractrice

$$\varphi : t \in ]0, \pi[ \mapsto a \left( \sin t, \cos t + \ln \tan \frac{t}{2} \right) \in \mathbb{R}^2.$$

**Exercice 8.** La développée d'une courbe plane  $\Gamma$  de paramétrisation  $\varphi(t)$  est le lieu de ses centres de courbure (i.e. le lieu des centres des cercles osculateurs). Elle admet la paramétrisation

$$\psi(t) = \varphi(t) + \frac{1}{\kappa(t)} N(t)$$

où  $N(t)$  est le vecteur normal unitaire à  $\Gamma$  en  $\varphi(t)$ .

1) Montrer que la tangente en  $\psi(t)$  à la développée est portée par la normale en  $\varphi(t)$  à  $\Gamma$ .

2) Montrer que la développée de la parabole d'équation  $y = ax^2$  est la courbe d'équation  $27x^2 = 16a(y - 1/2a)^3$ .

**Exercice 9.** Soit  $t \mapsto D(t)$  une famille de droites du plan. On appelle enveloppe de cette famille une courbe  $\Gamma$  paramétrée  $t \mapsto \varphi(t)$  telle que pour tout  $t$ ,  $\Gamma$  est tangente à  $D(t)$  en  $\varphi(t)$ .

1) On suppose que pour tout  $t$ ,  $D(t)$  est la droite passant par le point  $M(t)$  de vecteur unitaire directeur  $u(t)$ . Montrer que si  $u'$  ne s'annule pas, alors la famille  $D(t)$  admet une enveloppe.

2) Que signifie le fait que  $u' \equiv 0$  ?

3) Calculer l'enveloppe de la famille de droites  $D(t)$  d'équations

$$3tX - 2Y - t^3 = 0.$$

4) Soit  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  une courbe géométrique paramétrée par son abscisse curviligne  $s \mapsto \psi(s)$ . Montrer que si  $\psi$  n'a pas de point d'inflexion, la famille de ses normales possède une enveloppe (la développée de  $\Gamma$ ).

**Exercice 10.** Soit  $\Gamma$  une courbe plane fermée simple. On suppose que sa courbure vérifie

$$0 \leq \kappa \leq C$$

pour une constante  $C > 0$ . Montrer que

$$\ell(\Gamma) \geq \frac{2\pi}{C}.$$

### Courbes gauches

**Exercice 11.** Soit  $\Gamma$  une courbe paramétrée par son abscisse curviligne  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Montrer que le plan osculateur à  $\Gamma$  en  $\varphi(s)$  est la limite lorsque  $h, k \rightarrow 0$  du plan passant par les points  $\varphi(s), \varphi(s+h)$  et  $\varphi(s+k)$ .

**Exercice 12.** Étudier la façon dont une homothétie transforme la courbure et la torsion d'une courbe gauche.

**Exercice 13.** Calculer « l'appareil de Frenet », c'est-à-dire les vecteurs  $T, N$  et  $B$ , la courbure  $\kappa$  et la torsion  $\tau$  de la courbe paramétrée

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto (\sqrt{1+t^2}, t, \ln(t + \sqrt{1+t^2})) \in \mathbb{R}^3.$$

**Exercice 14.** Soit  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  une courbe gauche dont toutes les tangentes passent par un même point. Montrer que  $\Gamma$  est une (portion de) droite.

**Exercice 15.** Une hélice généralisée est une courbe gauche dont la tangente fait un angle constant avec une direction fixe. Montrer qu'une courbe gauche est une hélice généralisée si et seulement si le quotient de sa courbure par sa torsion est constant.

**Exercice 16.** Soit  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée de courbure constante  $\kappa > 0$  et de torsion constante  $\tau \in \mathbb{R}$ . Montrer (par une preuve directe) que  $\Gamma$  est une hélice.

**Exercice 17.** Soit  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée par la longueur d'arc  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ . On suppose qu'il existe  $s_0 \in I$  tel que  $\|\varphi(s)\| \leq \|\varphi(s_0)\|$  pour tout  $s$  dans un voisinage de  $s_0$ . Montrer que

$$\kappa(s_0) \geq \frac{1}{\|\varphi(s_0)\|}.$$

On pourra étudier la fonction  $f(s) = \|\varphi(s)\|^2$ .

**Exercice 18.** Soit  $\Gamma$  une courbe gauche paramétrée par  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Montrer qu'il existe un unique cercle qui réalise un contact d'ordre trois (au moins) avec  $\Gamma$  au point  $\varphi(t)$ , qu'il est inclus dans le plan osculateur à  $\Gamma$  en  $\varphi(t)$ , et qu'il a pour rayon  $R = 1/\kappa(t)$  et pour centre le point  $\varphi(t) + \kappa^{-1}(t)N(t)$ .

**Exercice 19.** Soit  $t \in [a, b] \mapsto X(t) \in \mathbb{R}^3$  une fonction vectorielle lisse telle que  $\|X(t)\| = 1$  pour tout  $t$ . On suppose que les vecteurs  $\{X(t), X'(t), X''(t)\}$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$  pour tout  $t$ , on fixe  $c \in \mathbb{R}^*$  et on considère

$$\varphi : t \in [a, b] \mapsto \varphi(t) = c \int_a^t X(s) \wedge X'(s) ds \in \mathbb{R}^3.$$

Montrer que la courbe géométrique  $\Gamma_\varphi$  a une torsion constante  $= 1/c$  (on pourra montrer que le vecteur binormal  $B(t)$  à  $\Gamma$  est proportionnel à  $X(t)$ ).

**Exercice 20.** Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par

$$\varphi(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{-1/t^2}) & \text{si } t > 0 \\ (0, 0, 0) & \text{si } t = 0 \\ (t, e^{-1/t^2}, 0) & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

- 1) Montrer que  $\varphi$  est lisse et que  $\Gamma = \varphi(\mathbb{R})$  est régulière.
- 2) Montrer que  $\kappa(t) \neq 0$  si  $t \notin \{0, \pm\sqrt{2/3}\}$  et vérifier que  $\kappa(0) = 0$ .
- 3) Montrer que le vecteur normal est discontinu en  $t = 0$ .
- 4) Montrer que  $\tau \equiv 0$  bien que  $\Gamma$  ne soit pas une courbe plane.

**Exercice 21.** Soit  $\Gamma$  une courbe régulière paramétrée par  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Soit  $\pi$  la projection orthogonale sur le plan osculateur à  $\Gamma$  en  $\varphi(t)$ . Montrer que la courbure en  $t$  de la courbe plane  $\pi \circ \varphi(\mathbb{R})$  est égale à  $\kappa(t)$ .

**Exercice 22.** Soit  $\varphi : s \in I \rightarrow \varphi(s) \in \mathbb{R}^3$  une courbe gauche  $\Gamma$ . On note  $\kappa(s)$  et  $\tau(s)$  la courbure et la torsion dont on suppose qu'elles ne s'annulent pas. On note  $R = 1/\kappa$  et  $\delta = 1/\tau$ .

- 1) Montrer que si  $\Gamma$  est tracée sur une sphère, alors

$$R^2 + (R')^2 \delta^2 \equiv \text{constante}.$$

On pourra supposer que la sphère est centrée à l'origine et dériver trois fois l'identité  $\|\varphi(s)\|^2 \equiv \text{constante}$ .

- 2) On suppose réciproquement que  $R^2 + (R')^2 \delta^2 \equiv \text{constante}$ . Montrer que  $\varphi(s) + R(s)N(s) - R'(s)\delta(s)B(s)$  est constant, et en déduire que  $\Gamma$  est tracée sur une sphère.

### Isométries et propriétés globales

**Exercice 23.** Montrer que la composée de deux rotations (affines) du plan est soit une translation, soit une rotation (affine).

**Exercice 24.** On note  $O(n, \mathbb{R})$  l'ensemble des matrices orthogonales, et  $SO(n, \mathbb{R})$  celles qui préservent l'orientation (i.e. de déterminant 1). Montrer que :

- 1)  $O(n, \mathbb{R})$  est un groupe compact ;
- 2)  $SO(n, \mathbb{R})$  est un groupe connexe ;
- 3)  $SO(2, \mathbb{R})$  est commutatif, mais pas  $SO(n, \mathbb{R})$ ,  $n \geq 3$  ;
- 4)  $SO(n, \mathbb{R})$  agit transitivement sur la sphère  $S^{n-1}$  ( $n \geq 2$ ).

**Exercice 25.** Soit  $f : S^1 \rightarrow S^1$  une application et  $F$  un relevé de  $f$ . Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \deg(f) = \frac{[F(t + 2\pi) - F(t)]}{2\pi}.$$

**Exercice 26.** Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction  $2\pi$ -périodique et

$$g : t \in \mathbb{R} \mapsto g(t) = f(t) + t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que  $g$  induit une application  $G : S^1 \rightarrow S^1$  dont on calculera le degré.

**Exercice 27.** Soit  $f : S^1 \rightarrow S^1$  une application continue. Montrer que le nombre  $P(f)$  de points fixes de  $f$  vérifie

$$P(f) \geq |\deg f - 1|.$$

**Exercice 28.** Soit  $f, g : S^1 \rightarrow S^1$  deux applications continues. Montrer que

$$\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g.$$

En déduire que  $f$  a beaucoup de points périodiques si  $|\deg f| \geq 2$ .

**Exercice 29.** Soit  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  une courbe plane. On appelle sommet de  $\Gamma$  un extremum local de la courbure de  $\Gamma$ .

i) Montrer que tout point d'un cercle est un sommet. Montrer qu'une ellipse a quatre sommets.

ii) Montrer qu'une courbe fermée a toujours deux sommets, puis qu'une courbe fermée simple convexe a au moins quatre sommets.<sup>10</sup>

10. Il s'agit du théorème des quatre sommets, prouvé pour la première fois en 1909. Pour un historique et une preuve de la réciproque, nous renvoyons le lecteur à [DoCarmo, pp 37-41] ainsi qu'à l'article « The converse to the four vertex theorem » de B.Dahlberg, *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol.133, no7 (2005), 2131-2135.



## Chapitre 2

# Surfaces de $\mathbb{R}^3$

### Introduction

Dans ce deuxième chapitre, nous étudions les propriétés métriques des surfaces de  $\mathbb{R}^3$ . On peut définir celles-ci à l'aide d'une paramétrisation ou par une équation implicite, comme dans le cas des courbes. Le cas modèle est celui des surfaces définies comme le graphe d'une fonction de deux variables.

Nous passons en revue les différentes façons de définir une surface et étudions la notion de plan tangent dans la section 2.1, puis la première forme fondamentale dans la section 2.2. Cette dernière n'est rien d'autre que la restriction du produit scalaire euclidien de l'espace ambiant  $\mathbb{R}^3$ .

Nous définissons ensuite l'application de Gauss qui joue un rôle fondamental. Nous calculons sa différentielle, obtenant ainsi une nouvelle forme quadratique sur l'espace tangent, c'est la *deuxième forme fondamentale*. On en déduit les différentes notions de courbure. La notion la plus importante est la courbure de Gauss, la plus délicate à manipuler est la courbure moyenne.

Nous démontrons dans la section 2.4 le célèbre *Theorema egregium* de Gauss. Il assure que la courbure de Gauss est entièrement déterminée par la première forme fondamentale. En particulier, deux surfaces localement isométriques ont même courbure de Gauss. Ce résultat n'a pas d'analogue dans le cas des courbes : toutes les courbes sont localement isométriques, bien qu'elles n'aient pas nécessairement la même courbure.

Nous étudions dans la section 2.5 la structure d'espace métrique des surfaces. Nous introduisons la notion de géodésique dont l'existence locale résulte du théorème de Cauchy-Lipschitz. Nous montrons que les géodésiques minimisent localement la distance intrinsèque et que l'application exponentielle est un difféomorphisme local.

Nous introduisons ensuite la caractéristique d'Euler, et énonçons le théorème de Gauss-Bonnet qui relie un invariant topologique (la caractéristique d'Euler) à la valeur moyenne d'un invariant différentiel (la courbure de Gauss). C'est un résultat splendide que nous ne faisons qu'effleurer.

## 2.1 Espaces tangents

### 2.1.1 Définitions équivalentes

#### Nappes paramétrées

**Définition 2.1.1.** Une nappe paramétrée est une application lisse injective

$$\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ . Elle est dite régulière si la différentielle de  $\varphi$  en chaque point de  $U$  est de rang 2 et si  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  est un homéomorphisme.

Deux nappes paramétrées  $(\varphi, U)$  et  $(\psi, V)$  sont équivalentes s'il existe un difféomorphisme (lisse)  $f : V \rightarrow U$  tel que  $\psi = \varphi \circ f$ . Le lecteur vérifiera qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence. Comme

$$D\psi_p = D\varphi_{f(p)} \circ Df_p$$

avec  $Df_p$  inversible, les différentielles  $D\psi$  et  $D\varphi$  ont même rang.

**Définition 2.1.2.** On appelle nappe géométrique régulière une classe d'équivalence de nappes paramétrées régulières.

Une surface est une partie de  $\mathbb{R}^3$  qui est, au voisinage de chacun de ses points, une nappe géométrique régulière.

On fera souvent l'abus de langage de confondre une nappe et son support, c'est-à-dire l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^3$  images d'une paramétrisation.

**Exemple 2.1.3.** Considérons le cône de révolution paramétré par

$$\varphi : (\theta, z) \in ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \mapsto (z \cos \theta, z \sin \theta, z) \in \mathbb{R}^3.$$

La matrice de la différentielle de  $\varphi$

$$D\varphi(\theta, z) = \begin{pmatrix} -z \sin \theta & \cos \theta \\ z \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est de rang 2 si et seulement si  $z \neq 0$ , c'est-à-dire que le cône est une surface régulière en tout point, sauf en son sommet.

Remarquons que si une nappe  $(\varphi, U)$  est régulière en un point  $p = (s_0, t_0) \in U$ , alors les vecteurs

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_0, t_0) \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s_0, t_0)$$

sont linéairement indépendants.

Il est important de noter qu'on ne peut pas, en général, décrire une surface (régulière ou non) à l'aide d'un seul paramétrage. C'est déjà le cas de la sphère unité  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  :

**Exemple 2.1.4.** La sphère unité  $S^2$  est l'ensemble

$$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Nous voulons justifier que c'est une surface régulière. Par définition, il s'agit de montrer que c'est une nappe géométrique régulière au voisinage de chacun de ses points.

Soit  $p = (a, b, c)$  un tel point. Quitte à interchanger le rôle de  $a, b, c$ , on peut supposer que  $c \neq 0$ . Posons  $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$ . Si  $c > 0$ , on considère

$$\varphi : (x, y) \in U \mapsto (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \in \mathbb{R}^3.$$

C'est une paramétrisation lisse qui est le graphe d'une fonction lisse, elle définit donc une paramétrisation régulière et on a  $p = \varphi(a, b) \in \varphi(U)$ .

Si  $c < 0$ , on considère à la place l'application

$$\varphi : (x, y) \in U \mapsto (x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2}) \in \mathbb{R}^3$$

pour conclure de façon similaire.

En procédant ainsi, il nous faut donc six applications pour paramétrer la sphère unité! Les coordonnées sphériques permettent de ne considérer que deux applications, mais une seule paramétrisation ne suffit pas car la sphère unité est compacte : comme nous imposons à une paramétrisation régulière  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  d'être injective, elle réalise un difféomorphisme sur son image, celle-ci ne peut donc pas être compacte.

### Graphes de fonctions

De la même façon que les graphes de fonctions d'une variable réelle sont les modèles locaux des courbes planes lisses, les graphes de fonctions de deux variables réelles sont les modèles locaux des surfaces régulières de  $\mathbb{R}^3$ .

Soit  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse définie sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Le graphe de  $h$  est le lieu géométrique

$$S_h := \{(x, y, z) \in U \times \mathbb{R} / z = h(x, y)\}.$$

C'est donc une nappe géométrique paramétrée par

$$\varphi : (x, y) \in U \mapsto (x, y, h(x, y)) \in \mathbb{R}^3.$$

C'est toujours une immersion puisque la matrice de la différentielle de  $\varphi$  est

$$D\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ h'_x & h'_y \end{pmatrix}$$

où l'on a noté  $h'_x = \partial h / \partial x$ ,  $h'_y = \partial h / \partial y$ .

Observons que le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs  $\partial\varphi/\partial x$  et  $\partial\varphi/\partial y$  (on verra plus tard qu'il s'agit de l'espace tangent à  $S_h$ ) ne contient jamais l'axe des  $z$ .

Nous montrons à présent, à l'aide du théorème d'inversion locale, qu'une surface régulière peut s'exprimer au voisinage de chacun de ses points comme le graphe d'une fonction lisse, dans un système adéquat de coordonnées.

**Proposition 2.1.5.** *Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface régulière. Alors pour tout point  $p$  de  $S$ , il existe un système de coordonnées cartésiennes centré en  $p$  tel que  $S$  s'exprime, au voisinage de  $p$ , comme le graphe d'une fonction lisse.*

*Démonstration.* Soit  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  une paramétrisation de  $S$ ,

$$\varphi(u, v) = (\alpha(u, v), \beta(u, v), \gamma(u, v))$$

où  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont des fonctions lisses. On note  $\alpha_u, \alpha_v, \beta_u$ , etc. les dérivées partielles des fonctions  $\alpha, \beta, \gamma$  par rapport à  $u, v$ . Par hypothèse, la matrice de la différentielle  $d\varphi_m$  au point  $m = (u_0, v_0)$  tel que  $p = \varphi(m)$  est de rang deux. Dans la base canonique, celle-ci est

$$\begin{pmatrix} \alpha_u(u_0, v_0) & \alpha_v(u_0, v_0) \\ \beta_u(u_0, v_0) & \beta_v(u_0, v_0) \\ \gamma_u(u_0, v_0) & \gamma_v(u_0, v_0) \end{pmatrix}.$$

Quitte à permuter les coordonnées dans  $\mathbb{R}^3$ , on peut supposer que le mineur

$$\begin{vmatrix} \alpha_u(u_0, v_0) & \alpha_v(u_0, v_0) \\ \beta_u(u_0, v_0) & \beta_v(u_0, v_0) \end{vmatrix}$$

n'est pas nul. Considérons l'application

$$f : (u, v) \in U \mapsto (\alpha(u, v), \beta(u, v)) \in \mathbb{R}^2.$$

Elle est de rang 2 en  $m = (u_0, v_0)$ . Le théorème d'inversion locale assure que c'est un difféomorphisme local, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage  $V$  de  $m$  tel que  $f$  réalise un difféomorphisme de  $V$  sur son image  $W = f(V)$ .

Notons  $g = (f|_V)^{-1}$  l'application inverse de ce difféomorphisme local, et considérons  $\psi := \varphi \circ g$  qui est bien définie dans  $W = f(V)$ . Alors

$$\psi : (x, y) \in W \mapsto (x, y, h(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec } h(x, y) = \gamma \circ g(x, y)$$

est une paramétrisation de  $S$  au voisinage de  $p$  qui est du type recherché.  $\square$

**Exemple 2.1.6.** *Le parabolôïde hyperbolique (encore appelé « selle de cheval » ou « col ») est la surface régulière  $S$  définie par la nappe géométrique*

$$\varphi : (x, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x, 1 + t, x + tx) \in \mathbb{R}^3.$$

Cette surface est décrite simplement par l'équation algébrique

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = xy\},$$

c'est donc le graphe de la fonction  $h(x, y) = xy$ . En voici une représentation graphique :



Elle admet une autre interprétation. Posons  $\alpha(x) = (x, 1, x) \in \mathbb{R}^3$  et  $\beta(x) = (0, 1, x) \in \mathbb{R}^3$ . La surface  $S$  est la réunion des droites passant par  $\alpha(x)$ , de vecteur directeur  $\beta(x)$ , lorsque  $x$  décrit  $\mathbb{R}$ ; en coordonnées cela revient à décomposer

$$\varphi(t, x) = \alpha(x) + t\beta(x).$$

Les surfaces qui s'obtiennent ainsi s'appellent des surfaces réglées.

### Équations cartésiennes

De nombreuses surfaces sont définies par des équations algébriques, voire comme surfaces de niveau d'une fonction de trois variables. Dans ce cas, il est parfois peu commode d'utiliser des paramétrisations pour vérifier que l'on a bien à faire à une surface régulière (cf. Exemple 2.1.4).

Nous donnons à présent un critère simple, conséquence du théorème des fonctions implicites qui garantit que de tels ensembles sont bien des surfaces régulières.

**Proposition 2.1.7.** Soit  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse définie sur un ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $p \in \mathbb{R}^3$  un point tel que  $f$  s'annule en  $p$  et sa différentielle

$$D_p f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

est surjective. Alors l'ensemble

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = 0\}$$

est une surface régulière au voisinage de  $p$ .

Notons que l'hypothèse est facile à vérifier : la différentielle de  $f$  au point  $p$  est surjective si et seulement si elle n'est pas nulle puisque l'espace d'arrivée est de dimension 1. Il s'agit donc de calculer les dérivées partielles  $f_x(p)$ ,  $f_y(p)$ ,  $f_z(p)$  et de vérifier que l'une d'entre elles n'est pas nulle.

*Démonstration.* Puisque  $D_p f$  est surjective, l'une au moins des dérivées partielles de  $f$  n'est pas nulle au point  $p$ . Quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer que

$$\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0.$$

Le théorème des fonctions implicites garantit alors que l'équation  $f(x, y, z) = 0$  se résout au voisinage de  $p$  : il existe un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  et une fonction lisse  $h$  définie sur  $U$  tels que l'on a l'équivalence

$$\{(x, y) \in U \text{ et } f(x, y, z) = 0\} \leftrightarrow z = h(x, y).$$

Cela donne ainsi une paramétrisation régulière de  $S$  au voisinage de  $p$ .  $\square$

Nous résumons les différents points de vue équivalents pour définir une surface géométrique régulière :

**Proposition 2.1.8.** *Les propriétés suivantes sont localement équivalentes :*

- i)  $S$  est une surface paramétrée régulière ;*
- ii)  $S \subset \mathbb{R}^3$  est le graphe d'une fonction de deux variables réelles ;*
- iii)  $S = \{(x, y, z) \in V \mid f(x, y, z) = 0\}$  avec  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse dont la différentielle est surjective.*
- iv)  $S = \Phi(z = 0)$  est l'image du plan de coordonnée  $(z = 0) \subset \mathbb{R}^3$  par un difféomorphisme  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .*

*Démonstration.* L'implication  $i) \Rightarrow ii)$  résulte de la Proposition 2.1.5, tandis que  $iii) \Rightarrow i)$  résulte de la Proposition 2.1.7.

Supposons que  $S = \{(x, y, z) ; z = h(x, y)\}$  est localement le graphe d'une fonction lisse. Alors  $S = f^{-1}(0)$  avec  $f(x, y, z) = z - h(x, y)$  submersive, puisque  $\nabla f = (-h_x, -h_y, 1)$ . Cela montre que  $ii) \Rightarrow iii)$ .

Si  $S = \Phi(z = 0)$  est l'image du plan  $(z = 0)$  par un difféomorphisme local de  $\mathbb{R}^3$ , alors  $\varphi(x, y) = \Phi(x, y, 0)$  est une paramétrisation régulière de  $S$ . Réciproquement, si  $\varphi(x, y) = (\alpha, \beta, \gamma)$  est une paramétrisation locale régulière de  $S$  telle que  $\alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x \neq 0$ , alors  $\Phi(x, y, z) = \varphi(x, y) + (0, 0, z)$  est un difféomorphisme local de  $\mathbb{R}^3$  puisque

$$\text{Jac}(\Phi)(x, y, z) = \alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x \neq 0.$$

Cela montre que  $i) \Leftrightarrow iv)$  puisque  $\Phi(z = 0) = S$ .  $\square$

### 2.1.2 Surfaces spéciales

Nous décrivons ici trois types de surfaces particulièrement importantes que nous rencontrerons tout au long de ce texte.

### Quadriques

Ce sont les surfaces  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = 0\}$  définies par le lieu d'annulation d'un polynôme de degré deux. On peut les classifier en réduisant la forme quadratique définie par la partie homogène de degré deux du polynôme  $f$ , et montrer qu'une telle quadrique est, à conjugaison par une isométrie globale de  $\mathbb{R}^3$  près,

— soit vide :

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1,$$

— soit un ellipsoïde :

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1,$$

— soit un cône elliptique :

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2},$$

— soit un hyperboloïde à une nappe :

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1,$$

— soit un hyperboloïde à deux nappes (non connexe) :

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1,$$

— soit un parabolôïde hyperbolique :

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z,$$

— soit un parabolôïde elliptique :

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z,$$

— soit un cylindre elliptique :

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1,$$

— soit un cylindre hyperbolique :

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1,$$

— soit un cylindre parabolique :

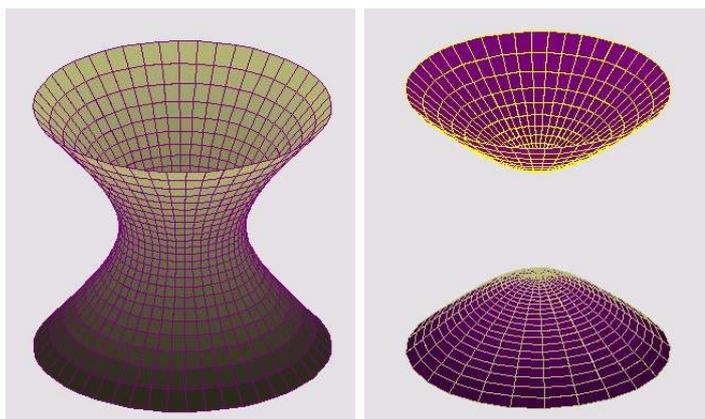
$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} - y,$$

Nous vous laissons démontrer ce résultat. Observez que l'équation proposée pour le paraboloidé hyperbolique peut encore s'écrire  $z = x'y'$  en posant

$$x' = \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \text{ et } y' = \frac{x}{a} + \frac{y}{b},$$

ce qui correspond bien aux notations utilisées dans l'Exemple 2.1.6.

Voici une représentation graphique des deux hyperboloïdes.



### Surfaces de révolution

On considère une courbe plane  $\mathcal{C}$  et on la fait tourner autour d'une droite  $D$  du plan qui la contient. La droite  $D$  s'appelle *l'axe de révolution*.

Si la courbe  $\mathcal{C}$  est une droite, la surface obtenue est un cylindre (droit) si les droites  $\mathcal{C}$  et  $D$  sont parallèles, un plan si elles sont perpendiculaires et un cône sinon.

Si la courbe  $\mathcal{C}$  est un cercle, la surface obtenue est une sphère si la droite  $D$  est un diamètre de  $\mathcal{C}$ , un tore de révolution si  $D$  et  $\mathcal{C}$  ne se coupent pas.

On peut supposer que le plan de référence est le plan de coordonnées  $xOz$  et que la courbe  $\mathcal{C}$  est paramétrée par sa longueur d'arc

$$s \in I \mapsto (f(s), 0, h(s)) \in \mathbb{R}^3,$$

avec  $f'(s)^2 + h'(s)^2 \equiv 1$ . En supposant également que l'axe de révolution est l'axe de coordonnée  $Oz$ , la surface de révolution est alors paramétrée par

$$\varphi : (s, \theta) \in I \times ]0, 2\pi[ \mapsto (f(s) \cos \theta, f(s) \sin \theta, h(s)) \in \mathbb{R}^3.$$

Observons que

$$\varphi_s = (f'(s) \cos \theta, f'(s) \sin \theta, h'(s)), \quad \varphi_\theta = (-f(s) \sin \theta, +f(s) \cos \theta, 0)$$

et

$$\varphi_s \wedge \varphi_\theta = f(s) (-h'(s) \cos \theta, -h'(s) \sin \theta, f'(s)),$$

donc la surface  $S$  est régulière là où  $f(s) \neq 0$ . Les points singuliers de cette surface (s'il y en a) se situent donc à l'intersection entre  $\mathcal{C}$  et l'axe de révolution.

**Définition 2.1.9.** *Les courbes correspondant à  $\theta = \text{constante}$  s'appellent des méridiens, celles correspondant à  $s = \text{constante}$  s'appellent des parallèles.*

**Exemple 2.1.10.** *Un tore de révolution est la surface obtenue en faisant tourner un cercle autour d'une droite qui ne le rencontre pas. C'est un pneu dont on ne considère que la surface. Il admet la paramétrisation*

$$\varphi(u, v) = ([R + r \cos u] \cos v, [R + r \cos u] \sin v, r \sin u), \text{ avec } R > r.$$

*Cette dernière condition assure que le cercle que l'on fait tourner autour de l'axe ( $Oz$ ) ne rencontre pas ce dernier. En voici une représentation :*

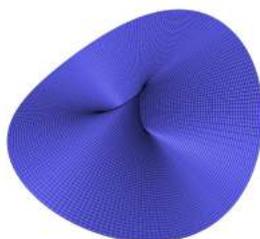


### Surfaces réglées

Ce sont les surfaces obtenues en faisant passer, par tout point d'une courbe  $\mathcal{C}$ , une droite qui dépend de façon lisse du paramètre. Si la courbe  $\mathcal{C}$  est paramétrée par  $t \in I \mapsto \alpha(t) \in \mathbb{R}^3$ , la droite passant par  $\alpha(t)$  peut être définie par son vecteur directeur  $\beta(t) \in \mathbb{R}^3$ . La surface admet ainsi la paramétrisation

$$(t, s) \in I \times \mathbb{R} \mapsto \alpha(t) + s\beta(t) \in \mathbb{R}^3.$$

Lorsque le vecteur directeur  $\beta(t) \equiv \beta_0$  est constant, on obtient un cylindre. Lorsque les droites  $\mathbb{R}\beta(t)$  sont toutes concourantes, on obtient un cône. Le parabolöide hyperbolique est un autre exemple de surface réglée que nous avons rencontré dans l'Exemple 2.1.6. Voici la représentation graphique d'un conoïde, pour lequel les droites sont parallèles à un plan directeur :



Un exemple particulièrement important est la surface obtenue en considérant l'ensemble des tangentes à la courbe  $\mathcal{C}$ . Supposons que  $\mathcal{C}$  est paramétrée par sa longueur d'arc. On obtient alors

$$\alpha'(t) = T(t) \text{ et } \alpha''(t) = \kappa(t)N(t)$$

où  $\kappa(t)$  est la courbure de  $\mathcal{C}$  et où  $\{T(t), N(t), B(t)\}$  désigne le trièdre de Frenet (cf. chapitre 1), avec  $B(t) := T(t) \wedge N(t)$ .

La surface réglée des tangentes à  $\mathcal{C}$  s'obtient alors en prenant  $\beta(t) = \alpha'(t)$ . Il vient ainsi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) = \beta(t) = \alpha'(t) \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) = \alpha'(t) + s\alpha''(t).$$

Le produit vectoriel

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) = s\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = s\kappa(t)B(t)$$

est donc non nul si  $\kappa(t) \neq 0$  et  $s \neq 0$ .

Ainsi, la courbe  $\mathcal{C} = \{(t, s) \in I \times \mathbb{R} / s = 0\}$  est (probablement) un lieu de points singuliers pour cette surface réglée. Les autres points de la surface sont réguliers, sauf (peut-être) ceux qui se situent sur une tangente à un point en lequel la courbe est de courbure nulle.

Notons que si la courbe  $\mathcal{C}$  est une droite, on obtient une situation dégénérée puisque l'ensemble des tangentes coïncide alors avec la droite  $\mathcal{C}$ .

### 2.1.3 Plan tangent

#### Définition

Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface régulière et  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  une paramétrisation (d'une partie) de  $S$ . On peut définir le plan tangent à  $S$  en un point  $p = \varphi(m)$  de plusieurs façons équivalentes.

**Définition 2.1.11.** *On appelle plan tangent à  $S$  en  $p = \varphi(m)$  le sous-espace de  $\mathbb{R}^3$  de dimension deux défini par*

$$T_p(S) := D\varphi_m(\mathbb{R}^2).$$

Notons que la définition est indépendante du choix de la paramétrisation. En effet, nous avons déjà observé qu'un changement de paramétrisation revient à précomposer l'application linéaire  $D\varphi_m$  par un isomorphisme de  $\mathbb{R}^2$ , ce qui ne change pas l'image  $D\varphi_m(\mathbb{R}^2)$ .

**Proposition 2.1.12.** *Le plan tangent  $T_p(S) := D\varphi_m(\mathbb{R}^2)$  est le plan orthogonal au vecteur normal  $\varphi_u \wedge \varphi_v$ . Lorsque  $S = \{z = h(x, y)\}$  est le graphe d'une fonction  $h$ , on obtient*

$$T_p S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = xh_x + yh_y\}.$$

*Démonstration.* Lorsque  $S = \{z = h(x, y)\}$  est le graphe d'une fonction  $h$ , la paramétrisation régulière  $\varphi(x, y) = (x, y, h(x, y))$  fournit

$$\varphi_x = (1, 0, h_x), \quad \varphi_y = (0, 1, h_y), \quad \text{et} \quad \varphi_x \wedge \varphi_y = (-h_x, -h_y, 1).$$

Il s'ensuit que le vecteur  $(x, y, z)$  est orthogonal à  $\varphi_x \wedge \varphi_y$  si et seulement si  $z = xh_x + yh_y$ .  $\square$

**Proposition 2.1.13.** *Soit  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = 0\}$  une surface régulière définie par une application lisse  $f$  dont la différentielle  $D_0f$  est surjective à l'origine  $0 \in S$  (i.e.  $f(0, 0, 0) = 0$ ). Le plan tangent en ce point est*

$$T_0S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) + y \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 0) + z \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0) = 0 \right\}.$$

*Démonstration.* Quitte à interchanger les rôles de  $x, y, z$ , on peut supposer que  $f_z(0, 0, 0) \neq 0$ . Il résulte du théorème des fonctions implicites que  $S$  peut s'exprimer près de l'origine comme le graphe d'une fonction  $h(x, y)$ . Comme  $f(x, y, h(x, y)) = 0$ , on obtient  $h_x = -f_x/f_z$  et  $h_y = -f_y/f_z$ . Ainsi,

$$z = xh_x + yh_y \iff x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

La proposition 2.1.12 permet donc de conclure.  $\square$

Lorsque la paramétrisation n'est pas injective, i.e. si  $\varphi(m_1) = \varphi(m_2)$  pour deux points distincts  $m_1, m_2 \in U$ , il se peut qu'on ait deux plans tangents différents correspondants à  $m_1$  et  $m_2$ . En pratique on peut les considérer séparément en réduisant la taille du domaine de chaque paramétrisation.

La situation est plus compliquée lorsque  $D\varphi_m$  n'est pas injective (i.e. lorsque  $p = \varphi(m)$  est singulier). Dans ce cas, il est possible que les plans tangents voisins n'aient aucune limite en  $p$ . Nous laissons ce cas de côté ici.

**Remarque 2.1.14.** *En principe, le plan tangent devrait être défini comme le plan affine  $p + D\varphi_m(\mathbb{R}^2)$  qui passe effectivement par  $p$  ! Il est cependant courant de faire un abus de langage et de ne considérer que sa partie vectorielle (qui passe par l'origine de  $\mathbb{R}^3$ ). Dans la suite, le contexte indiquera clairement s'il faut prendre en compte la partie affine ou vectorielle.*

### Courbes tracées sur une surface

Soit  $\Gamma$  une courbe paramétrée tracée sur  $S$ , c'est-à-dire la composée d'une courbe plane paramétrée dont l'image est dans  $U \subset \mathbb{R}^2$  et de  $\varphi$ . Autrement dit, si  $\varphi = \varphi(u, v)$ , on dispose d'une paramétrisation

$$\gamma : t \in I \mapsto \varphi(u(t), v(t)) \in S.$$

Observons qu'un vecteur tangent à la courbe  $\Gamma$  en un point  $p = \gamma(t)$  est du type

$$\gamma'(t) = D\varphi_{(u(t),v(t))}(u'(t),v'(t)),$$

c'est donc un vecteur tangent à  $S$  en  $p$ . Réciproquement, soit

$$X = a \frac{\partial \varphi}{\partial u}(m) + b \frac{\partial \varphi}{\partial v}(m) \in T_p(S)$$

un vecteur tangent à  $S$  en un point  $p = \varphi(m)$ . Considérons dans  $\mathbb{R}^2$  l'intersection  $I$  de  $U$  avec la droite de vecteur directeur  $(a, b)$  et passant par  $m$ . Soit  $\Gamma$  son image dans  $\mathbb{R}^3$  sous l'action de  $\varphi$  : c'est une courbe paramétrée tracée sur  $S$  dont la tangente en  $p = \varphi(m)$  est dirigée par  $X$ . Nous avons ainsi démontré la proposition suivante.

**Proposition 2.1.15.** *Le plan tangent à  $S$  en un point  $p$  est constitué des vecteurs tangents en  $p$  aux courbes tracées sur  $S$  (qui passent par  $p$ ).*

### Application tangente

Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface régulière et  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application. On dit que  $f$  est lisse si pour toute paramétrisation  $\varphi : U \rightarrow S$  d'une partie de  $S$ , l'application  $f \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est lisse.

Notons que si cette propriété est satisfaite pour une paramétrisation locale, près d'un point  $p \in S$ , alors elle l'est pour toute autre paramétrisation au voisinage de ce point. Nous laissons le lecteur vérifier ce fait.

De même que les applications lisses définies sur les ouverts de  $\mathbb{R}^2$  admettent une différentielle, l'application lisse  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  admet une différentielle  $Df_p$  en tout point  $p \in S$ . C'est l'application linéaire

$$Df_p : T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

définie comme suit : si  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une paramétrisation de  $S$  au voisinage de  $p = \varphi(u_0, v_0) = \varphi(m_0)$ , alors tout vecteur  $X \in T_p(S)$  est l'image par  $D\varphi_{m_0}$  d'un unique vecteur  $Y \in \mathbb{R}^2$ . On pose alors

$$Df_p(X) = D(f \circ \varphi)_{m_0}(Y).$$

Nous laissons le lecteur vérifier que cette définition est cohérente, c'est-à-dire que  $Df_p(X)$  ne dépend pas du choix de la paramétrisation  $\varphi$ .

La différentielle  $Df_p$  est l'application linéaire qui approche le mieux l'application  $f$ , elle est donc appelée également *application tangente* à  $f$  au point  $p$ . Un cas particulièrement simple mais très important est le suivant :

**Exemple 2.1.16.** *Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface régulière et  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse. Alors la différentielle de la restriction  $f$  de  $F$  à  $S$  est la restriction de  $DF$  à l'espace tangent à  $S$ . Autrement dit, pour tout  $p \in S$ ,*

$$Df_p = D(F|_S)_p = (DF_p)|_{T_p(S)}.$$

**Position d'une surface par rapport à son plan tangent**

Soit  $S$  une surface régulière de  $\mathbb{R}^3$ . On fixe  $p$  un point de  $S$  et  $\varphi : U \rightarrow S$  une paramétrisation régulière telle que  $p \in \varphi(U)$ . On peut choisir un système de coordonnées centré en  $p = (0, 0, 0)$  tel que  $S$  s'exprime comme un graphe au-dessus du plan  $(x0y)$ .  $\varphi$  est alors donnée par

$$\varphi(x, y) = (x, y, h(x, y))$$

où  $h$  est une fonction lisse telle que  $h(0, 0) = 0$ . Le plan tangent  $T_p(S)$  est alors le plan engendré par les vecteurs

$$\varphi_x(0, 0) = (1, 0, h_x(0, 0)) \quad \text{et} \quad \varphi_y(0, 0) = (0, 1, h_y(0, 0)).$$

Notons qu'on peut effectuer un nouveau changement de coordonnées pour se ramener au cas où le plan tangent est le plan  $(x0y)$ , i.e. on peut supposer  $h_x(0, 0) = h_y(0, 0) = 0$ , ce que nous ferons dans la suite de cette section.

**Lemme 2.1.17.** *Le plan tangent à  $S$  en  $p$  est le plan affine de  $\mathbb{R}^3$  qui passe par  $p$  et approche  $\varphi$  à l'ordre 1.*

*Démonstration.* Dans le système de coordonnées choisi ci-dessus, l'équation d'un plan passant par  $p$  est celle d'un plan vectoriel :

$$aX + bY + cZ = 0.$$

Ce plan approche  $\varphi$  à l'ordre 1 en  $(0, 0)$  si

$$ax + by + ch(x, y) = o((x, y))$$

lorsque  $(x, y)$  tend vers  $(0, 0)$ . Or, la différentielle de  $h$  est nulle en  $(0, 0)$  de par notre choix de coordonnées, donc

$$ax + by + ch(x, y) = ax + by + o((x, y)) = o((x, y))$$

ssi  $a = b = 0$ , i.e. si le plan considéré est le plan  $(z = 0) = (x0y)$ . □

On pousse le développement limité un peu plus loin et on s'intéresse à présent au contact d'ordre 2 pour déterminer la position de la surface  $S$  par rapport à son plan tangent, au voisinage du point  $p$ . On pose

$$r = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0, 0), \quad s = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(0, 0) \quad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0, 0),$$

de sorte qu'un développement limité à l'ordre deux de  $h$  en  $(0, 0)$  est

$$h(x, y) = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + o(x^2 + y^2).$$

Cette forme quadratique détermine la position de  $T_p S$  par rapport à  $S$  comme nous l'expliquons plus loin.

## 2.2 Première forme fondamentale

Le produit scalaire euclidien de  $\mathbb{R}^3$  induit naturellement un produit scalaire sur les plans tangents  $T_p(S)$  à une surface régulière  $S \subset \mathbb{R}^3$ . Cette « structure riemannienne » va nous permettre de faire des mesures sur la surface et ses espaces tangents.

### 2.2.1 Définition

**Définition 2.2.1.** Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface régulière. On note

$$I_p : T_p(S) \rightarrow \mathbb{R}$$

la forme quadratique sur l'espace tangent  $T_p(S)$  à  $S$  au point  $p$ , définie par

$$I_p(w) := \langle w, w \rangle_p = \|w\|^2 \geq 0.$$

C'est la première forme fondamentale de la surface  $S$ .

Autrement dit, la première forme fondamentale reflète de quelle façon la surface  $S$  hérite de la structure euclidienne de  $\mathbb{R}^3$ . Cela va nous permettre de mesurer la longueur des arcs tracés sur  $S$ , ainsi que les angles entre les vecteurs tangents et l'aire des domaines dans  $S$ , sans faire référence à l'espace ambiant.

### Expression dans une paramétrisation

Soit  $\varphi : (u, v) \in U \mapsto \varphi(u, v) \in \mathbb{R}^3$  une paramétrisation de  $S$ . Un vecteur tangent  $w \in T_p(S)$  est associé à une courbe  $\alpha : t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[ \mapsto \alpha(t) = \varphi(u(t), v(t)) \in \mathbb{R}^3$  telle que  $\alpha(0) = p$  et  $\alpha'(0) = w$ . Il vient ainsi

$$\begin{aligned} I_p(w) = \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p &= \langle \varphi_u u' + \varphi_v v', \varphi_u u' + \varphi_v v' \rangle_p \\ &= E(u')^2 + 2F u' v' + G(v')^2, \end{aligned}$$

où on a noté  $\varphi_u$  (resp.  $\varphi_v$ ) la dérivée de  $\varphi$  par rapport à  $u$  (resp.  $v$ ) calculées en  $t = 0$ , et où

$$E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_p, \quad F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_p \quad \text{et} \quad G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle_p$$

sont les coefficients de la première forme fondamentale dans la base  $\{\varphi_u, \varphi_v\}$  de  $T_p(S)$  déterminée par la paramétrisation  $\varphi$ .

**Exemple 2.2.2.** Soit  $P \subset \mathbb{R}^3$  le plan affine passant par le point  $a$  et dont la partie vectorielle est engendrée par une base orthonormée  $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ . Il admet la paramétrisation

$$\varphi : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \varphi(u, v) = a + u w_1 + v w_2 \in \mathbb{R}^3.$$

Observons que  $\varphi_u = w_1$  et  $\varphi_v = w_2$  sont des fonctions vectorielles constantes, indépendantes de  $u, v$ . Comme la base  $\{w_1, w_2\}$  est orthonormée, on en déduit que

$$E \equiv 1 \equiv G \text{ et } F \equiv 0$$

dans cette paramétrisation.

**Exemple 2.2.3.** Le cylindre droit

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 1\}$$

admet la paramétrisation

$$\varphi : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \varphi(u, v) = (\cos u, \sin u, v) \in \mathbb{R}^3.$$

Il vient  $\varphi_u = (-\sin u, \cos u, 0)$  et  $\varphi_v = (0, 0, 1)$ , donc

$$E = G = 1 \text{ et } F = 0.$$

Notez que le plan et le cylindre droit ont même première forme fondamentale (dans ces paramétrisations). On dit qu'ils sont *localement isométriques* (voir Définition 2.2.5). Les identités  $E = G$  et  $F = 0$  traduisent une propriété géométrique remarquable, comme nous l'indiquons plus loin (paramétrisations conformes).

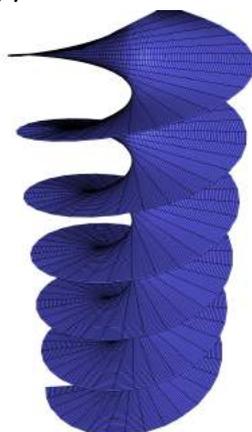
**Exemple 2.2.4.** L'hélicoïde est paramétré par

$$\varphi(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (v \cos u, v \sin u, au) \in \mathbb{R}^3$$

où  $a > 0$  est un paramètre fixé. On calcule  $\varphi_u = (-v \sin u, v \cos u, a)$  et  $\varphi_v = (\cos u, \sin u, 0)$ , donc

$$E = v^2 + a^2, F = 0 \text{ et } G = 1.$$

En voici une représentation :



### 2.2.2 Angles et longueurs

#### Longueur d'un arc

Soit  $\Gamma$  une courbe tracée sur une surface régulière  $S$ . Soit  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  une paramétrisation de  $S$  et  $\gamma : t \in I \mapsto \gamma(t) = \varphi(u(t), v(t)) \in \mathbb{R}^3$  une paramétrisation de  $\Gamma$ . La longueur de la courbe  $\Gamma$  est

$$\ell(\Gamma) = \int_I \sqrt{Eu'(t)^2 + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'(t)^2} dt.$$

La *distance intrinsèque* sur une surface  $S$  est

$$d_S(p, q) = \inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma \text{ courbe tracée sur } S \text{ t.q. } \gamma(0) = p \text{ et } \gamma(1) = q\}.$$

**Définition 2.2.5.** Soit  $S_1$  et  $S_2 \subset \mathbb{R}^3$  deux surfaces.

On dit qu'elles sont *isométriques* s'il existe un difféomorphisme  $f : S_1 \rightarrow S_2$  qui préserve les distances intrinsèques (on dit que  $f$  est une *isométrie*).

On dit qu'elles sont *localement isométriques* si tout point  $S_1$  admet un voisinage isométrique à un sous-ensemble de  $S_2$  et si tout point  $S_2$  admet un voisinage isométrique à un sous-ensemble de  $S_1$ .

**Proposition 2.2.6.** Deux surfaces sont localement isométriques si et seulement si elles ont la même première forme fondamentale.

*Démonstration.* Soit  $S_1$  et  $S_2 \subset \mathbb{R}^3$  deux surfaces. Elles sont localement difféomorphes. Quitte à réduire initialement les tailles de  $S_1$  et  $S_2$ , on peut supposer qu'il existe un difféomorphisme global  $f : S_1 \rightarrow S_2$  (que l'on peut étendre dans un voisinage). Soit  $\varphi : (s, t) \in U \mapsto \varphi(s, t) \in S_1 \subset \mathbb{R}^3$  une paramétrisation locale de  $S_1$ , alors  $\psi = f \circ \varphi$  est une paramétrisation de  $S_2$ .

Si  $S_1$  et  $S_2$  ont la même première forme fondamentale, alors

$$\langle \psi_s, \psi_s \rangle = \langle Df \cdot \varphi_s, Df \cdot \varphi_s \rangle.$$

Et de même,  $\langle \psi_s, \psi_t \rangle = \langle Df \cdot \varphi_s, Df \cdot \varphi_t \rangle$ ,  $\langle \psi_t, \psi_t \rangle = \langle Df \cdot \varphi_t, Df \cdot \varphi_t \rangle$ . On en déduit que  $Df$  réalise une isométrie entre les espaces tangents, donc  $f$  préserve la longueur des courbes : c'est une isométrie.

Réciproquement, si  $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$  sont localement isométriques, alors  $f$  préserve les variations à l'ordre 1 des longueurs des courbes, donc les premières formes fondamentales.  $\square$

#### Angles

L'angle  $\theta$  sous lequel deux courbes  $\alpha : I \rightarrow S$  et  $\gamma : I \rightarrow S$  s'intersectent en  $t = t_0$  est l'angle entre les deux vecteurs tangents  $\alpha'(t_0)$  et  $\gamma'(t_0)$ . Il est déterminé par

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \gamma'(t_0) \rangle}{|\alpha'(t_0)| |\gamma'(t_0)|}$$

où  $|w|$  désigne la longueur du vecteur tangent  $w \in T_p(S)$ ,  $p = \alpha(t_0) = \gamma(t_0)$ , c'est-à-dire  $|w| = \sqrt{I_p(w)}$ .

**Définition 2.2.7.** *On dit qu'une paramétrisation  $\varphi(u, v)$  est conforme si les angles dans le plan  $(uv)$  sont les mêmes que les angles correspondants dans  $T_p S$  pour tout point  $p$ .*

**Lemme 2.2.8.** *Une paramétrisation  $\varphi$  est conforme si et seulement si*

$$E = G \text{ et } F = 0.$$

*Démonstration.* L'orthogonalité entre  $\varphi(t, 0)$  et  $\varphi(0, t)$  montre que  $F \equiv 0$ , tandis que celle entre  $\varphi(t, t)$  et  $\varphi(t, -t)$  assure que  $E \equiv G$ .  $\square$

Les paramétrisations du plan et du cylindre vues précédemment sont donc conformes, mais pas celle de l'hélicoïde. Vous montrerez que la paramétrisation de la sphère unité par la projection stéréographique est conforme :

**Exemple 2.2.9.** *La projection stéréographique est définie comme suit : la droite passant par un point  $(x, y, z) \in S^2$  de la sphère unité et par le pôle nord  $N = (0, 0, 1) \in S^2$  coupe le plan  $(xOy)$  en un unique point  $(u, v, 0)$ . Le système de coordonnées  $(u, v)$  permet de paramétrer  $S^2 \setminus \{N\}$  via*

$$\varphi : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left( \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right) \in \mathbb{R}^3.$$

*Cette paramétrisation est conforme, mais elle ne préserve pas les aires. Un problème similaire se pose pour la projection de Mercator, régulièrement utilisée, qui fait apparaître l'Afrique 14 fois moins grande qu'en réalité.*

### 2.2.3 Aires

La première forme fondamentale permet de définir et calculer l'aire des domaines « raisonnables » d'une surface régulière  $S \subset \mathbb{R}^3$ . C'est un problème délicat que de préciser convenablement la notion « raisonnable » (il n'est pas possible de définir l'aire de n'importe quel ensemble, de même que dans  $\mathbb{R}^n$ , on ne peut pas mesurer tous les ensembles à l'aide de la mesure de Lebesgue).

On peut néanmoins mesurer les ensembles qui sont obtenus par le biais de constructions géométriques relativement simples. Les *domaines réguliers* appartiennent à cette catégorie : ce sont les ouverts connexes de  $S$  dont le bord est l'image du cercle unité  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$  par un homéomorphisme (bijection continue ainsi que son inverse) qui est lisse et dont la différentielle ne s'annule qu'en un nombre fini de points.

**Définition 2.2.10.** *Soit  $\Omega \subset S \subset \mathbb{R}^3$  un domaine régulier d'une surface régulière  $S$ . Supposons que  $\Omega \subset \varphi(U)$  est contenu dans l'image d'une paramétrisation  $\varphi : U \rightarrow S$ . L'aire de  $\Omega$  est le nombre positif*

$$\text{Aire}(\Omega) = \int \int_{\varphi^{-1}(\Omega)} \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| \, dudv.$$

La quantité  $\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|$  mesure l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs tangents  $\varphi_u$  et  $\varphi_v$ . Observons que la définition proposée ne dépend pas du choix de la paramétrisation car la quantité

$$\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| dudv$$

est invariante par changement de variables.

Rappelons que  $\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|^2 + \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle^2 = \|\varphi_u\|^2 \|\varphi_v\|^2$ . Il s'ensuit que l'aire peut s'exprimer en termes des notations précédentes :

$$\text{Aire}(\Omega) = \int \int_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Notons que la restriction qui impose au domaine d'être inclus dans le domaine de définition d'une paramétrisation n'est pas significative : de nombreuses surfaces admettent des paramétrisations qui couvrent toute la surface, à l'exception de quelques courbes qui ne contribuent pas à l'aire.

**Exemple 2.2.11.** *L'application*

$$\varphi : (a, b) \in U \mapsto (\sin a \cos b, \sin a \sin b, \cos a) \in \mathbb{R}^3,$$

avec  $U = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / 0 < a < \pi, 0 < b < 2\pi\}$ , définit une paramétrisation régulière de la sphère unité  $S^2$  privée du cercle  $S^2 \cap (y = 0)$ . On obtient

$$E = 1, F = 0, G = (\sin a)^2 \quad \text{donc} \quad \text{Aire}(S^2) = \int_{a=0}^{\pi} \int_{b=0}^{2\pi} |\sin a| da db = 4\pi.$$

**Exemple 2.2.12.** *Calculons l'aire d'un tore  $\mathbf{T}$  de révolution. Nous reprenons les notations de l'Exemple 2.1.10 : la paramétrisation*

$$\varphi(u, v) = ([R + r \cos u] \cos v, [R + r \cos u] \sin v, r \sin u), \quad \text{avec } R > r,$$

couvre le tore à l'exception de deux cercles (un méridien et un parallèle).

On vérifie que les coefficients de la première forme fondamentale sont  $E = r^2$ ,  $F = 0$  et  $G = (r \cos u + R)^2$ . Il s'ensuit que

$$\text{Aire}(\mathbf{T}) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(r \cos u + R) dudv = 4\pi^2 rR.$$

C'est le produit de la longueur du « petit cercle » par celle du « grand cercle ».

**Exemple 2.2.13** (Surfaces tubulaires). *Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  la paramétrisation par longueur d'arc d'une courbe gauche  $\Gamma$  dont la courbure ne s'annule nulle part. Soit  $(T, N, B)$  le repère de Frenet et*

$$\varphi : (s, \theta) \in I \times \mathbb{R} \mapsto \alpha(s) + \varepsilon[\cos \theta N(s) + \sin \theta B(s)]$$

où  $\varepsilon > 0$  est une constante positive. La paramétrisation  $\varphi$  définit une nappe régulière appelée surface tubulaire  $S_\varepsilon$  de la courbe gauche. Le vecteur normal à la surface tubulaire  $S_\varepsilon$  est

$$\mathcal{N}(s, \theta) = -[\cos \theta N(s) + \sin \theta B(s)].$$

On obtient que l'aire de  $S_\varepsilon$  est  $2\pi\varepsilon\ell(\Gamma)$ ,  $\ell(\Gamma)$  désignant la longueur de  $\Gamma$ .

## 2.3 Deuxième forme fondamentale, courbures

### 2.3.1 Application de Gauss, orientation

Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface paramétrée régulière et  $\varphi : U \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  une paramétrisation de  $S$  près d'un point  $p \in S$ . Les vecteurs  $\varphi_x(p) = \partial\varphi/\partial x(p)$  et  $\varphi_y(p) = \partial\varphi/\partial y(p)$  engendrent le plan tangent  $T_p(S)$  à  $S$  au point  $p$ . Le vecteur

$$n(p) := \frac{\varphi_x(p) \wedge \varphi_y(p)}{\|\varphi_x(p) \wedge \varphi_y(p)\|}$$

est donc un vecteur unitaire normal au plan tangent  $T_p(S)$ .

**Définition 2.3.1.** *L'application  $n : S \rightarrow S^2$  qui, à tout point  $p$  de  $S$ , associe « son » vecteur normal unitaire  $n(p)$ , s'appelle l'application de Gauss.*

Cette application dépend (pour l'instant) de la paramétrisation. Nous expliquons plus loin que l'on peut obtenir une définition invariante de l'application de Gauss<sup>1</sup> pour toute surface *orientable*.

L'application de Gauss contient énormément d'informations sur la géométrie de la surface  $S$ . Voici quelques exemples particulièrement simples.

#### Exemple 2.3.2.

- lorsque la surface  $S$  est un plan, elle coïncide avec son plan tangent en tout point, l'application de Gauss est donc constante ;
- lorsque la surface est un cylindre, le plan tangent est constant le long de chaque droite du cylindre, l'application de Gauss envoie donc la surface (cylindre) sur un équateur de la sphère unité ;
- lorsque  $S = S^2$  est la sphère unité, l'application de Gauss est l'identité.

**Exemple 2.3.3.** *Considérons l'hélicoïde paramétré par*

$$\varphi : (u, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mapsto (u \cos v, u \sin v, bv) \in \mathbb{R}^3$$

où  $b > 0$  est un paramètre fixé. Il vient

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = (b \sin v, -b \cos v, u)$$

donc

$$n(\varphi(u, v)) = \frac{1}{\sqrt{u^2 + b^2}}(b \sin v, -b \cos v, u).$$

Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface régulière. On dit que  $S$  est orientable si on peut choisir de façon continue une orientation de ses plans tangents : un choix d'orientation de  $T_p(S)$  induit, par continuité, un choix d'orientation

---

1. Johann Carl Friedrich Gauss, mathématicien, astronome et physicien allemand (1777-1855), considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.

des plans tangents voisins. Lorsque l'on recouvre  $S$  par une collection de paramétrisations, il faut que ces choix d'orientation soient compatibles.

Fixons  $\varphi : (u, v) \in U \mapsto \varphi(u, v) \in S$  une paramétrisation de  $S$  au voisinage d'un point  $p$ . On fixe ainsi une orientation de  $T_p(S)$  en décrétant que la base  $(\varphi_u, \varphi_v)$  est une base directe de  $T_p(S)$ . Si  $p$  appartient à une seconde paramétrisation  $\psi : (x, y) \in V \mapsto \psi(x, y) \in S$ , on obtient le même choix d'orientation si et seulement si le jacobien du changement de coordonnées  $\varphi^{-1} \circ \psi$  est positif.

**Définition 2.3.4.** *Une surface est dite orientable s'il est possible de la couvrir par une famille de paramétrisations (coordonnées locales) telles que le jacobien des changements de paramétrisations est toujours positif.*

*Le choix d'une telle famille est appelé une orientation de  $S$ . Lorsqu'un tel choix n'est pas possible, on dit que  $S$  est non-orientable.*

Bien entendu, toute surface est localement orientable. L'orientabilité d'une surface est donc un problème global.

**Proposition 2.3.5.** *Une surface  $S \subset \mathbb{R}^3$  est orientable si et seulement s'il existe une application continue  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  telle qu'en chaque point  $p$  de  $S$ , le vecteur  $N(p)$  est un vecteur unitaire orthogonal à  $T_p S$ .*

Comme va le montrer la démonstration, on peut imposer à  $N$  d'être différentiable : c'est une application de Gauss globale.

*Démonstration.* Supposons une surface  $S$  orientable. On la recouvre par des paramétrisations  $\varphi : U \rightarrow S$  telles que les jacobiens des changements de coordonnées sont positifs. On considère

$$N_U(\varphi(u, v)) := \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$$

le vecteur normal unitaire orienté de la paramétrisation  $(\varphi, U)$ . Si  $(\psi, V)$  est une autre paramétrisation telle que  $\varphi(U) \cap \psi(V) \neq \emptyset$ , on obtient, pour tout point  $p = \psi(x, y) = \varphi(u, v) \in \varphi(U) \cap \psi(V)$ ,

$$N_V(p) = \frac{\psi_x \wedge \psi_y}{\|\psi_x \wedge \psi_y\|} = \frac{Jac(\varphi^{-1} \circ \psi)(x, y)}{|Jac(\varphi^{-1} \circ \psi)(x, y)|} \cdot \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = N_U(p)$$

puisque le jacobien est supposé positif. Ainsi,  $N$  définit une application continue

$$N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$$

qui, à tout point  $p \in S$ , associe un vecteur unitaire normal à  $S$  en  $p$ .

Réciproquement, supposons qu'une telle application  $N$  existe. Soit  $(\varphi, U)$  une famille de paramétrisations qui couvrent  $S$ . On peut supposer que chaque

ouvert  $U$  est connexe. On note  $N_U$  le vecteur normal unitaire construit précédemment. Observons que

$$p \mapsto f_U(p) := \langle N(p), N_U(p) \rangle \in \{-1, +1\}$$

est une fonction continue sur l'ouvert connexe  $\varphi(U)$ . Comme  $\varphi(U)$  est connexe, on peut (quitte à intervertir les rôles de  $u$  et  $v$ ) supposer que  $f_U \equiv 1$ , c'est-à-dire que  $N \equiv N_U$  dans  $\varphi(U)$ . Il s'ensuit que les jacobiens des changements de coordonnées sont tous positifs, donc  $S$  est orientable.  $\square$

On obtient de nombreux exemples de surfaces orientables en considérant des préimages de valeurs régulières d'une application différentiable :

**Proposition 2.3.6.** *Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une application différentiable et  $a \in \mathbb{R}$  une valeur régulière de  $f$ , i.e.  $a = f(p)$  avec  $D_p f$  surjective. La surface*

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = a\}$$

*est une surface régulière orientable de  $\mathbb{R}^3$ .*

Ce critère s'applique notamment à la sphère unité

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}$$

avec  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  et  $a = 1$ . Notez que 1 est bien une valeur régulière de  $f$ .

*Démonstration.* Le fait que  $S$  est une surface régulière résulte de ce que  $f$  est une submersion (i.e.  $D_p f$  est surjective) au voisinage des points considérés.

Nous laissons le lecteur vérifier que le vecteur  $(f_x, f_y, f_z)$  est un vecteur orthogonal à  $S$ . Il n'est jamais nul car  $f$  est une submersion. On peut donc considérer

$$N : p \in S \mapsto \frac{(f_x, f_y, f_z)}{\|(f_x, f_y, f_z)\|} \in S^2.$$

C'est un champ continu (et même différentiable) de vecteurs unitaires normaux à  $S$ . Il résulte de la proposition précédente que  $S$  est orientable.  $\square$

On peut montrer, réciproquement, que toute surface orientable de  $\mathbb{R}^3$  est l'image inverse d'une valeur régulière d'une application différentiable. La preuve est cependant délicate, le lecteur en trouvera les détails, dans le cas des surfaces compactes, dans le livre de DoCarmo (pp. 109-114).

**Remarque 2.3.7.** *Toute surface compacte  $S \subset \mathbb{R}^3$  est orientable. On verra par contre dans le prochain chapitre des exemples de surfaces compactes plongées dans  $\mathbb{R}^4$  qui ne sont pas orientables.*

**Exemple 2.3.8.** *Une surface qui est couverte par une seule paramétrisation est orientable. C'est le cas en particulier de toutes les surfaces qui sont les graphes de fonctions différentiables.*

**Exemple 2.3.9.** Si une surface peut être couverte par deux paramétrisations  $\varphi : U \rightarrow S$  et  $\psi : V \rightarrow S$  telles que

- $S \subset \varphi(U) \cup \psi(V)$ ,
- $\varphi(U) \cap \psi(V)$  est connexe,
- le jacobien du changement de cartes  $\varphi \circ \psi^{-1}$  est positif,

alors  $S$  est orientable. Cela s'applique en particulier à la sphère.

**Exemple 2.3.10** (Le ruban de Möbius<sup>2</sup>). On considère la surface  $M$  de  $\mathbb{R}^3$  définie par la paramétrisation

$$\varphi(t, v) = ((1 + t \cos v) \cos(2v), (1 + t \cos v) \sin(2v), t \sin v)$$

où  $v \in \mathbb{R}$  et  $-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$ . Il s'agit d'une surface à bord connexe

$$\partial M = \{\varphi(1/2, v) \mid v \in [0, 2\pi]\} = \{\varphi(-1/2, v) \mid v \in [0, 2\pi]\}$$

qui est homéomorphe à un cercle  $S^1$ .

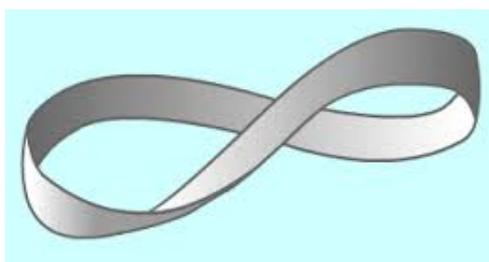
Nous laissons le lecteur vérifier que  $M$  est une réalisation de la surface abstraite obtenue comme le quotient

$$M \simeq \mathbb{R} \times [-1, +1] / \sim$$

où

$$(x, y) \sim (x', y') \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x' = x + k \quad \& \quad y' = (-1)^k y.$$

Autrement dit,  $M$  est obtenue à partir d'une bande de papier (un rectangle) en identifiant deux bords opposés du rectangle après avoir fait subir un demi-tour à l'un d'entre eux. Découpez une telle bande de papier, collez de cette façon deux bords opposés et vérifiez que le bord de la surface ainsi obtenue est bien un cercle. En voici une illustration :



Il est géométriquement clair que le ruban de Möbius n'est pas une surface orientable : si vous suivez un vecteur normal unitaire le long du bord de  $M$ , il change d'orientation lorsque l'on parcourt une fois le bord de  $M$ .

---

2. August Ferdinand Möbius, mathématicien et astronome allemand (1790-1868).

### 2.3.2 Deuxième forme fondamentale

Rappelons que si  $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une application vectorielle et  $v \in T_p S$  un vecteur tangent à  $S$  en  $p$ , on peut calculer la *dérivée directionnelle*  $D_v \Phi(p)$  de  $\Phi$  en  $p$  dans la direction  $v$  en choisissant une courbe  $\alpha : ]-\varepsilon, +\varepsilon[ \rightarrow S$  tracée sur  $S$  telle que  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = v$  et en calculant<sup>3</sup>

$$D_v \Phi(p) := (\Phi \circ \alpha)'(0) \in \mathbb{R}^3.$$

Pour comprendre l'allure de la surface  $S$  au voisinage d'un point  $p \in S$ , il est tentant de considérer la courbure en  $p$  des courbes tracées sur  $S$  qui passent par  $p$ . Il nous faut pour cela calculer et interpréter les dérivées directionnelles de l'application de Gauss.

**Lemme 2.3.11.** *Pour tout  $v \in T_p S$ , la dérivée directionnelle  $D_v n(p)$  de l'application de Gauss  $n : S \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$  est un vecteur tangent à  $S$  en  $p$ .*

*Démonstration.* Soit  $\alpha : ]-\varepsilon, +\varepsilon[ \rightarrow S$  une courbe telle que  $\alpha(0) = p$  et  $\alpha'(0) = v$ . Observons que  $n \circ \alpha$  est de norme constante égale à 1, donc

$$0 = \frac{d\|n \circ \alpha(t)\|^2}{dt} \Big|_{t=0} = 2\langle n \circ \alpha(0), (n \circ \alpha)'(0) \rangle = 2\langle n(p), D_v n(p) \rangle.$$

Cela montre que le vecteur  $D_v n(p)$  est orthogonal à  $n(p)$ . Il appartient donc à l'espace tangent à  $S$  au point  $p$ .  $\square$

L'application suivante est donc bien définie :

$$\begin{aligned} F_p : T_p S &\rightarrow T_p S \\ v &\mapsto -D_v n(p). \end{aligned}$$

C'est clairement une application *linéaire*. Le fait remarquable est le suivant.

**Proposition 2.3.12.** *L'application  $F_p$  est symétrique : pour tout  $u, v \in T_p S$ ,*

$$\langle F_p(u), v \rangle = \langle u, F_p(v) \rangle.$$

*Démonstration.* Soit  $\varphi : (x, y) \in U \mapsto \varphi(x, y) \in S \subset \mathbb{R}^3$  une paramétrisation de  $S$ . Comme  $F_p$  est linéaire et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est bilinéaire, il suffit de vérifier la symétrie pour  $u = \partial\varphi/\partial x(p)$  et  $v = \partial\varphi/\partial y(p)$  qui constituent une base de l'espace tangent  $T_p S$ .

Posons donc  $u = \partial\varphi/\partial x(p)$ ,  $v = \partial\varphi/\partial y(p)$  et dérivons, par rapport à  $x$ , l'égalité  $\langle n, v \rangle = 0$  qui signifie que  $v \in T_p S$ . Il vient

$$0 = \langle D_u n, v \rangle + \langle n, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \rangle.$$

On en déduit, en observant que  $\partial^2 \varphi / \partial x \partial y = \partial^2 \varphi / \partial y \partial x$ , que

$$\langle F_p(u), v \rangle = -\langle D_u n(p), v \rangle = \langle n, \partial^2 \varphi / \partial x \partial y \rangle = \langle n, \partial^2 \varphi / \partial y \partial x \rangle = \langle u, F_p(v) \rangle.$$

$\square$

---

3. La formule ne dépend pas du choix de  $\alpha$ .

Nous laissons le lecteur vérifier que l'opérateur  $F_p$  est nul en tout point  $p \in S$  si et seulement si la surface  $S$  est plane. Lorsque  $S$  est une sphère centrée à l'origine, on vérifie aisément que  $F_p$  est une homothétie.

**Définition 2.3.13.** La deuxième forme fondamentale est la forme quadratique définie sur  $T_p S$  par

$$II_p(u, v) = \langle F_p(u), v \rangle.$$

On peut exprimer  $II_p$  sous forme matricielle, via

$$II_p = \begin{bmatrix} \langle \varphi_{xx}, n \rangle & \langle \varphi_{xy}, n \rangle \\ \langle \varphi_{xy}, n \rangle & \langle \varphi_{yy}, n \rangle \end{bmatrix}$$

où l'on a noté  $\varphi_{xy} = \partial^2 \varphi / \partial x \partial y$ . La formule provient des calculs effectués dans la démonstration de la proposition précédente. Cela explique au passage pourquoi on a inclus un signe moins dans la définition de  $F_p$ .

**Exemple 2.3.14.** Soit  $f$  une fonction sur  $\mathbb{R}^2$  qui s'annule avec ses deux dérivées partielles en  $(0, 0)$ . Soit

$$S := \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

le graphe de  $f$ . C'est une surface dont le plan tangent en  $O = (0, 0, 0)$  est le plan des coordonnées  $(xOy)$ . La fonction  $f$  admet un développement limité à l'ordre 2 en  $(0, 0)$  de la forme

$$f(x, y) = px^2 + 2qxy + ry^2 + o(x^2 + y^2).$$

La forme quadratique  $(px^2 + 2qxy + ry^2)$  sur le plan tangent est précisément la seconde forme fondamentale  $II_O$  de  $S$  au point  $O$ .

Pour une surface paramétrée, la deuxième forme fondamentale se calcule dans une paramétrisation comme suit :

**Proposition 2.3.15.** Soit  $\varphi : (x, y) \in U \mapsto \varphi(x, y) \in S \subset \mathbb{R}^3$  une surface paramétrée. La seconde forme fondamentale  $II_p$  de  $S$  au point  $p = \varphi(x, y)$  est la forme quadratique sur le plan tangent  $T_p S = \text{Vect}(\varphi_x, \varphi_y)$  donnée par

$$II_p(a\varphi_x + b\varphi_y) = a^2 P + 2abQ + b^2 R$$

où

$$P = \frac{\det(\varphi_{xx}, \varphi_x, \varphi_y)}{\|\varphi_x \wedge \varphi_y\|}, \quad Q = \frac{\det(\varphi_{xy}, \varphi_x, \varphi_y)}{\|\varphi_x \wedge \varphi_y\|} \quad \text{et} \quad R = \frac{\det(\varphi_{yy}, \varphi_x, \varphi_y)}{\|\varphi_x \wedge \varphi_y\|}.$$

*Démonstration.* Rappelons que le vecteur normal unitaire est donné par

$$N(p) = \frac{\varphi_x \wedge \varphi_y}{\|\varphi_x \wedge \varphi_y\|}.$$

On dérive  $\langle N, \varphi_x \rangle = 0$  par rapport à  $v = \varphi_x$  pour obtenir

$$P = -\langle D_{\varphi_x} N, \varphi_x \rangle = \langle N, \varphi_{xx} \rangle = \frac{\langle \varphi_x \wedge \varphi_y, \varphi_{xx} \rangle}{\|\varphi_x \wedge \varphi_y\|} = \frac{\det(\varphi_{xx}, \varphi_x, \varphi_y)}{\|\varphi_x \wedge \varphi_y\|}.$$

Les autres relations s'obtiennent de façon similaire.  $\square$

### 2.3.3 Courbures

**Définition 2.3.16.** *Les valeurs propres de  $F_p$  s'appellent les courbures principales de  $S$  en  $p$ . Les vecteurs propres correspondants s'appellent les directions principales.*

*On dit qu'une courbe tracée sur  $S$  est une ligne de courbure si ses vecteurs tangents sont tous des directions principales.*

Rappelons qu'une matrice symétrique réelle est toujours diagonalisable, dans une base orthonormée. En particulier, les directions principales sont orthogonales.

**Proposition 2.3.17** (Formule d'Euler<sup>4</sup>). *Soit  $e_1$  et  $e_2$  des vecteurs unitaires dans les directions principales, et soit  $k_1, k_2$  les courbures principales correspondantes. Soit  $v_\theta := \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$ . Alors*

$$II_p(v_\theta, v_\theta) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta.$$

*Démonstration.* C'est un calcul immédiat. Puisque  $F_p e_i = k_i e_i$ , il vient

$$II_p(v_\theta, v_\theta) = \langle k_1 \cos \theta e_1 + k_2 \sin \theta e_2, \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2 \rangle = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$$

puisque les directions principales sont orthogonales.  $\square$

**Définition 2.3.18.** *Le produit des courbures principales s'appelle la courbure de Gauss,*

$$K_p := \det F_p = k_1(p)k_2(p).$$

*La moyenne des courbures principales s'appelle la courbure moyenne,*

$$H_p := \frac{1}{2} \text{Tr } F_p = \frac{1}{2} [k_1(p) + k_2(p)].$$

Il est important de souligner que *la courbure de Gauss est invariante par déformation isométrique : c'est un invariant intrinsèque de la surface.* Ce n'est pas le cas de la courbure moyenne.

La courbure de Gauss et la courbure moyenne ont chacune une interprétation géométrique :

- la courbure de Gauss est l'aire de l'image de la surface par l'application de Gauss ;
- la courbure moyenne intervient dans l'aire des surfaces équidistantes ;
- la positivité de la courbure de Gauss traduit la convexité.

L'annulation de la courbure moyenne caractérise les surfaces minimales, qui modélisent les films de savon.

Voici des formules générales qui permettent d'exprimer l'opérateur  $F_p$  et la courbure de Gauss dans la base (non orthogonale) déterminée par une paramétrisation fixée :

---

4. Leonhard Euler, mathématicien et physicien suisse (1707-1783), considéré comme l'un des plus grands et prolifiques mathématiciens de tous les temps.

**Proposition 2.3.19.** Soit  $\varphi : (x, y) \in U \mapsto \varphi(x, y) \in S \subset \mathbb{R}^3$  une surface paramétrée. Les deux premières formes fondamentales  $I_p$  et  $II_p$  de  $S$  au point  $p = \varphi(x, y)$  sont des formes quadratiques sur le plan tangent  $T_p S = \text{Vect}(\varphi_x, \varphi_y)$  données sous forme matricielle dans cette base par

$$I_p = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \text{ et } II_p = \begin{bmatrix} P & Q \\ Q & R \end{bmatrix}.$$

L'endomorphisme symétrique  $F_p$  dans cette base est donné par

$$F_p = I_p^{-1} II_p = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} P & Q \\ Q & R \end{bmatrix},$$

donc la courbure de Gauss s'exprime par

$$K_p = \frac{PR - Q^2}{EG - F^2}$$

et la courbure moyenne vaut

$$H_p = \frac{ER + GP - 2FQ}{2(EG - F^2)}.$$

*Démonstration.* Une base de  $T_p S$  est  $\{\varphi_x, \varphi_y\}$ . On note  $I_p, II_p$  et  $M_p$  les matrices respectives de  $I_p, II_p$  et  $F_p$  dans cette base. Par définition, ces matrices sont reliées par les identités

$${}^t v II_p u = II_p(u, v) = \langle F_p(u), v \rangle_p = {}^t v I_p (M_p u),$$

valables pour tout  $u, v \in T_p S$ . On en déduit  $II_p = I_p M_p$ .

Le calcul de la courbure de Gauss s'en déduit aisément :

$$K_p = \det M_p = \frac{\det II_p}{\det I_p} = \frac{PR - Q^2}{EG - F^2}.$$

Celui de la courbure moyenne nécessite d'inverser une matrice de taille 2 :

$$\begin{aligned} M_p &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P & Q \\ Q & R \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} GP - FQ & GQ - FR \\ EQ - FP & ER - FQ \end{bmatrix} \end{aligned}$$

d'où

$$H_p = \frac{ER + GP - 2FQ}{2(EG - F^2)}.$$

□

**Exemple 2.3.20.** La courbure de Gauss de la sphère unité est constante, égale à  $+1$ . La courbure de Gauss d'un plan est constante, égale à  $0$ .

La pseudosphère

$$\varphi(s, \theta) = \left( e^s \cos \theta, e^s \sin \theta, \int_0^s \sqrt{1 - e^{2t}} dt \right)$$

fournit un exemple de surface à courbure de Gauss constante égale à  $-1$ . Posons  $f(s) = e^s$  et  $h(s) = \int_0^s \sqrt{1 - e^{2t}} dt$ . Il vient  $(f')^2 + (h')^2 \equiv 1$ ,

$$\varphi_s = (f'(s) \cos \theta, f'(s) \sin \theta, h'(s)) \quad \text{et} \quad \varphi_\theta = (-f(s) \sin \theta, f(s) \cos \theta, 0).$$

Les coefficients de la première forme fondamentale sont donc

$$E = 1, F = 0 \quad \text{et} \quad G = f^2(s) = e^{2s}.$$

On dérive à nouveau pour obtenir  $\varphi_{ss} = (f''(s) \cos \theta, f''(s) \sin \theta, h''(s))$ , donc

$$\det(\varphi_{ss}, \varphi_s, \varphi_\theta) = f(f'h'' - f''h') = -e^{3s}(1 + e^{2s}).$$

Puis  $\varphi_{s\theta} = (-f'(s) \sin \theta, f'(s) \cos \theta, 0)$  donne  $\det(\varphi_{s\theta}, \varphi_s, \varphi_\theta) = 0$ , et  $\varphi_{\theta\theta} = (-f(s) \cos \theta, f(s) \sin \theta, 0)$ , donc

$$\det(\varphi_{\theta\theta}, \varphi_s, \varphi_\theta) = h'f^2 = e^{2s}\sqrt{1 - e^{2s}}.$$

Enfin  $\varphi_s \wedge \varphi_\theta = (-fh' \cos \theta, +fh' \sin \theta, ff')$  donc  $\|\varphi_s \wedge \varphi_\theta\| = |f| = e^{2s}$ . On en déduit les coefficients de la seconde forme fondamentale :

$$P = \frac{\det(\varphi_{ss}, \varphi_s, \varphi_\theta)}{\|\varphi_s \wedge \varphi_\theta\|} = f'h'' - f''h' = -\frac{f''}{h'} = -\frac{e^s}{\sqrt{1 - e^{2s}}},$$

$$Q = \frac{\det(\varphi_{s\theta}, \varphi_s, \varphi_\theta)}{\|\varphi_s \wedge \varphi_\theta\|} = 0 \quad \text{et} \quad R = \frac{\det(\varphi_{\theta\theta}, \varphi_s, \varphi_\theta)}{\|\varphi_s \wedge \varphi_\theta\|} = h'f = e^s\sqrt{1 - e^{2s}}.$$

La courbure de Gauss est donc  $K = \frac{PR - Q^2}{EG - F^2} = -\frac{f''}{f} = -1$ .

**Exemple 2.3.21.** Considérons la surface « selle » d'expression

$$\varphi : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x, y, xy) \in \mathbb{R}^3$$

qui est le graphe de la fonction  $(x, y) \mapsto xy$ . On calcule aisément les deux premières formes fondamentales  $I_p, II_p$  en  $p = \varphi(x, y)$ . Nous les exprimons sous forme matricielle, dans la base  $\{\varphi_x, \varphi_y\}$  par

$$I_p = \begin{bmatrix} 1 + y^2 & xy \\ xy & 1 + x^2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad II_p = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dans cette même base, l'opérateur  $F_p$  est

$$F_p = I_p^{-1} II_p = \frac{1}{[1 + x^2 + y^2]^{3/2}} \begin{bmatrix} -xy & 1 + x^2 \\ 1 + y^2 & -xy \end{bmatrix}.$$

Ne vous inquiétez pas : cette matrice n'est pas symétrique (sauf si  $x^2 = y^2$ ), car la base  $\varphi_x, \varphi_y$  n'est pas orthogonale ! On calcule ses valeurs propres (qui, elles, ne dépendent pas de l'orthogonalité de la base) :

$$k_1 = \frac{-xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}{[1+x^2+y^2]^{3/2}}$$

et

$$k_2 = \frac{-xy - \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}{[1+x^2+y^2]^{3/2}}.$$

Il vient donc

$$K = \frac{-1}{[1+x^2+y^2]^2} \quad \text{et} \quad H = \frac{-xy}{[1+x^2+y^2]^{3/2}}.$$

### 2.3.4 Points spéciaux

**Définition 2.3.22.** Soit  $k_1$  et  $k_2$  les courbures principales de  $S$  en  $p$ . On dit que

- $p$  est un point planaire lorsque  $k_1 = k_2 = 0$  ;
- $p$  est un ombilic lorsque  $k_1 = k_2 \neq 0$  ;
- $p$  est un point parabolique lorsque  $K := k_1 k_2 = 0$  avec  $p$  non planaire ;
- $p$  est un point elliptique lorsque  $K > 0$  ;
- $p$  est un point hyperbolique lorsque  $K < 0$ .

Les notions de point parabolique, elliptique et hyperbolique sont reliées à la position de la surface par rapport à son plan tangent. Celle-ci est en partie déterminée par la seconde forme fondamentale.

On considère  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = h(x, y)\}$  donnée par le graphe d'une fonction  $h$ . Quitte à translater et composer par une rotation, on suppose que  $p = (0, 0, 0)$  (i.e.  $h(0, 0) = 0$ ) et que le plan tangent à  $S$  en  $p$  est le plan  $(xOy)$  (i.e.  $h_x(0, 0) = h_y(0, 0) = 0$ ). Observons que  $\varphi_x(0, 0) = (1, 0, 0)$ ,  $\varphi_y(0, 0) = (0, 1, 0)$  et

$$\varphi_{xx}(0, 0) = (0, 0, r), \quad \varphi_{xy}(0, 0) = (0, 0, r), \quad \varphi_{yy}(0, 0) = (0, 0, r)$$

où  $r = h_{xx}(0, 0)$ ,  $r = h_{yy}(0, 0)$  et  $t = h_{xy}(0, 0)$ . La fonction  $h$  admet donc le développement limité en  $(0, 0)$  :

$$h(x, y) = rx^2 + 2sxy + ty^2 + o(x^2 + y^2).$$

Un vecteur tangent à  $S$  en  $p$  étant du type  $(x, y, 0) = x\varphi_x(0, 0) + y\varphi_y(0, 0)$ , la seconde forme fondamentale de  $S$  en  $p$  est précisément

$$II_p(x, y) = rx^2 + 2sxy + ty^2 = Px^2 + 2Qxy + Ry^2$$

avec les notations précédentes. Nous résumons cette discussion dans la proposition suivante :

**Proposition 2.3.23.** *La position de  $S$  par rapport à son plan tangent  $T_p(S) = (xOy)$  est déterminée par la deuxième forme fondamentale*

$$II(x, y) = rx^2 + 2sxy + ty^2.$$

1. *Lorsque  $II_p$  est définie, c'est-à-dire lorsque  $K = rt - s^2 > 0$  (point elliptique), la fonction  $h(x, y)$  admet un extremum strict à l'origine ; la surface  $S$  reste du même côté de son plan tangent  $T_p(S)$ .*
2. *Lorsque  $II_p$  est non dégénérée mais change de signe, c'est-à-dire si  $K = rt - s^2 < 0$  (point hyperbolique), il y a des points de la surface arbitrairement proche de  $p$  de chaque côté du plan tangent.*
3. *Lorsque  $II_p$  est dégénérée mais pas nulle, i.e. si  $K = rt - s^2 = 0$  mais  $r, s$  et  $t$  ne sont pas tous nuls (point parabolique), la surface contient des points arbitrairement proches de  $p$ , du même côté de  $T_p(S)$ .*
4. *Lorsque  $II_p$  est nulle, tout peut arriver (point planaire).*

On peut ordonner les courbures principales de sorte que  $k_1 \geq k_2$ .

**Proposition 2.3.24.** *Les courbures principales  $k_1 \geq k_2$  dépendent continuellement de  $p \in S$  et sont lisses au voisinage d'un point qui n'est pas un ombilic.*

*Démonstration.* C'est une propriété générale des familles lisses d'endomorphismes symétriques. Pour calculer  $k_1$  et  $k_2$ , on est amené à résoudre une équation de degré 2 :

$$X^2 - 2HX + K = 0.$$

Les solutions dépendent continuellement des paramètres car elles s'expriment à l'aide de la racine carrée du discriminant. De plus elles sont lisses là où celui-ci ne s'annule pas (i.e. hors des points ombilics).  $\square$

Les courbures principales ne sont pas lisses, en général, au voisinage d'un ombilic comme le montre l'exemple de la matrice

$$t \in \mathbb{R} \mapsto S(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{bmatrix}$$

qui a pour valeurs propres  $k_1(t) = 1 + |t| \geq k_2(t) = 1 - |t|$ .

**Exemple 2.3.25.** *Un ellipsoïde a en général quatre ombilics, tandis qu'un tore de révolution n'en a pas. Pour ce dernier, les points « intérieurs » sont hyperboliques, les points « extérieurs » sont elliptiques, et les points qui se trouvent sur le cercle au sommet sont paraboliques.*

Enfin, vous montrerez dans l'Exercice 52 la propriété suivante :

**Exemple 2.3.26.** *Les surfaces dont tous les points sont des ombilics sont des (portions de) plans ou des sphères.*

## 2.4 Theorema Egregium de Gauss

Euler publie en 1767 *Recherches sur la courbure des surfaces*, une étude des surfaces qui dépend de la façon dont celles-ci sont plongées dans  $\mathbb{R}^3$ . La naissance de la géométrie différentielle moderne se produit soixante ans plus tard, lorsque Gauss publie en 1828 le mémoire *Disquisitiones generales circa superficies curvas*<sup>5</sup>. Gauss y entreprend l'étude des propriétés *intrinsèques* des surfaces et démontre le résultat *remarquable* (*egregium* en latin) que la courbure (de Gauss), que nous venons de définir à l'aide de la seconde forme fondamentale, ne dépend pas du plongement. Pour cela, Gauss établit la formule complexe

$$K = \frac{1}{4(EG - F^2)} \left\{ E[E_v G_v - 2F_u G_v + G_u^2] \right. \\ \left. + F[E_u G_v - E_v G_u - 2E_v F_v + 4F_u F_v - 2F_u G_u] \right. \\ \left. + G[E_u G_u - 2E_u F_v + E_v^2] + 2(EG - F^2)[-E_{vv} + 2F_{uv} - G_{uu}] \right\}.$$

La courbure de Gauss ne dépend donc au final que des coefficients de la première forme fondamentale (et de leurs dérivées).

Nous n'allons pas démontrer cette formule directement. Nous allons procéder pas à pas en utilisant des quantités intermédiaires, les symboles de Christoffel, qui jouent un rôle essentiel aujourd'hui.

### 2.4.1 Symboles de Christoffel

Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface régulière orientable. Soit  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  une paramétrisation de  $S$  au voisinage d'un point  $p$ . Les vecteurs  $\varphi_u, \varphi_v, N$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$ . On peut exprimer leurs dérivées partielles dans cette base,

$$\begin{aligned} \varphi_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + L_1 N \\ \varphi_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + L_2 N \\ \varphi_{vu} &= \Gamma_{21}^1 \varphi_u + \Gamma_{21}^2 \varphi_v + L_2' N \\ \varphi_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + L_3 N \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \partial_u N &= a_{11} \varphi_u + a_{21} \varphi_v \\ \partial_v N &= a_{12} \varphi_u + a_{22} \varphi_v, \end{aligned}$$

en observant que les dérivées de  $N$  sont orthogonales à  $N$ , car celui-ci est unitaire. Nous avons déjà été amenés à calculer les coefficients  $L_i$  en explicitant la deuxième forme fondamentale : en prenant le produit scalaire des

---

5. Recherches générales sur les surfaces courbes.

quatre premières relations avec  $N$ , il vient

$$L_1 = P, \quad L_2 = L'_2 = Q \quad \text{et} \quad L_3 = R.$$

Les valeurs des coefficients de  $\partial_u N, \partial_v N$  sont fournies par la proposition suivante.

**Proposition 2.4.1.**

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{QF - PG}{EG - F^2} & a_{12} &= \frac{RF - QG}{EG - F^2} \\ a_{21} &= \frac{PF - QE}{EG - F^2} & a_{22} &= \frac{QF - RE}{EG - F^2} \end{aligned}$$

*Démonstration.* Comme  $N$  est orthogonal au vecteur tangent  $\varphi_u$ , il vient

$$0 = \frac{\partial \langle N, \varphi_u \rangle}{\partial u} = \langle \partial_u N, \varphi_u \rangle + \langle N, \varphi_{uu} \rangle = \langle \partial_u N, \varphi_u \rangle + P.$$

On en déduit

$$a_{11}E + a_{21}F = -P.$$

On obtient de même  $a_{11}F + a_{21}G = -Q$  et il s'ensuit que

$$a_{11} = \frac{QF - PG}{EG - F^2} \quad \text{et} \quad a_{21} = \frac{PF - QE}{EG - F^2}.$$

Les deux autres relations s'obtiennent de façon similaire.  $\square$

**Définition 2.4.2.** Les coefficients  $\Gamma_{jk}^i$  s'appellent symboles de Christoffel<sup>6</sup>.

Comme  $\varphi_{uv} = \varphi_{vu}$ , on note les relations de symétrie

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 \quad \text{et} \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2.$$

En prenant le produit scalaire des dérivées secondes de  $\varphi$  avec  $\varphi_u$  et  $\varphi_v$ , on obtient

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F &= \langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G &= \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F &= \langle \varphi_{uv}, \varphi_u \rangle = \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G &= \langle \varphi_{uv}, \varphi_v \rangle = \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F &= \langle \varphi_{vv}, \varphi_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G &= \langle \varphi_{vv}, \varphi_v \rangle = \frac{1}{2} G_v \end{cases}$$

Comme ces trois systèmes d'équations linéaires sont inversibles (puisque  $EG - F^2 \neq 0$ ), on en déduit que les symboles de Christoffel ne dépendent que de la première forme fondamentale :

**Proposition 2.4.3.** Les coefficients de Christoffel  $\Gamma_{jk}^i$  s'expriment en fonction des coefficients  $E, F, G$  et de leurs dérivées.

6. Elwin Bruno Christoffel, mathématicien et physicien allemand (1829-1900).

### 2.4.2 Le théorème remarquable

Rappelons que deux surfaces  $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$  sont localement isométriques au voisinage d'un point s'il existe un difféomorphisme local (au voisinage de ce point) qui envoie  $S_1$  sur  $S_2$  et qui préserve la longueur des courbes.

Préserver la longueur des courbes revient à préserver la première forme fondamentale. De façon alternative, si  $\varphi_i : U \rightarrow S_i \subset \mathbb{R}^3$  désignent deux paramétrisations locales de  $S_1, S_2$  dans un ouvert  $U$ , ces surfaces sont isométriques (dans  $U$ ) si et seulement si pour tout  $m \in U$  et  $u, v \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\langle d(\varphi_1)_m(u), d(\varphi_1)_m(v) \rangle = \langle d(\varphi_2)_m(u), d(\varphi_2)_m(v) \rangle.$$

Un cône, un cylindre et un plan sont des exemples de surfaces localement isométriques. Observons qu'elles n'ont pas la même deuxième forme fondamentale. Il est donc *remarquable* que leur courbure de Gauss soit la même. Ce fait général, établi par Gauss, est conséquence du résultat suivant :

**Théorème 2.4.4.** *La courbure de Gauss est entièrement déterminée par la première forme fondamentale. Plus précisément,  $K$  peut être calculée à l'aide de  $E, F, G$  et de leurs dérivées partielles premières et secondes.*

*Démonstration.* Notons  $\varphi : U \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  une paramétrisation de la surface  $S$ . On note comme précédemment  $\varphi_u, \varphi_v$  les dérivées partielles de  $\varphi$  en un point  $p \in S$ . Ces vecteurs engendrent l'espace tangent  $T_p S$ .

*L'idée :* en dérivant les expressions de  $\varphi_{uu}, \varphi_{uv}, \varphi_{vu}, \varphi_{vv}, \partial_u N, \partial_v N$  par rapport à  $u$  et  $v$ , et en utilisant les symétries

$$(\varphi_{uu})_v = (\varphi_{uv})_u, \quad (\varphi_{vv})_u = (\varphi_{uv})_v \quad \text{et} \quad \partial_v(\partial_u N) = \partial_u(\partial_v N),$$

on obtient neuf relations linéaires. L'équation de Gauss est

$$\partial_u \Gamma_{12}^2 - \partial_v \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 = -EK.$$

Comme  $E$  ne s'annule pas, cette équation et la Proposition 2.4.3 assurent que  $K$  ne dépend que de la première forme fondamentale. Pour l'établir, on observe que  $\partial_v \varphi_{uu} = \partial_u \varphi_{uv}$  et on détermine le coefficient de  $\varphi_u$  pour obtenir

$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + Pa_{12} + \partial_v \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 + Qa_{11} + \partial_u \Gamma_{12}^1.$$

Les formules pour  $a_{11}$  et  $a_{12}$  vues dans la Proposition 2.4.1 conduisent alors à

$$\partial_u \Gamma_{12}^1 - \partial_v \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 = KF.$$

L'équation de Gauss s'obtient de façon similaire, en déterminant le coefficient de  $\varphi_v$  une fois qu'on a développé l'identité  $\partial_v \varphi_{uu} = \partial_u \varphi_{uv}$ .

*Dans le détail, un cheminement un peu différent :* on dérive deux fois les coefficients de la première forme fondamentale pour obtenir

$$F_{uv} = \langle \varphi_{uv}, \varphi_{uv} \rangle + \langle \varphi_{uuv}, \varphi_v \rangle + \langle \varphi_{uu}, \varphi_{vv} \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{uvv} \rangle$$

tandis que

$$\frac{1}{2}E_{vv} = \langle \varphi_{uv}, \varphi_{uv} \rangle + \langle \varphi_{vuv}, \varphi_u \rangle \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}G_{uu} = \langle \varphi_{uv}, \varphi_{uv} \rangle + \langle \varphi_{uvv}, \varphi_v \rangle.$$

Il s'ensuit que  $\langle \varphi_{uu}, \varphi_{vv} \rangle - \langle \varphi_{uv}, \varphi_{uv} \rangle = F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{2}G_{uu}$ .

Or  $\langle \varphi_{uu}, \varphi_{vv} \rangle = PR + A$  et  $\langle \varphi_{uv}, \varphi_{uv} \rangle = Q^2 + A'$ , où  $A, A'$  sont des expressions quadratiques en les symboles de Christoffel. Ainsi  $PR - Q^2$ , et donc  $K$ , s'expriment en fonction de  $E, F, G$  et de leurs dérivées.  $\square$

On en déduit que la courbure de Gauss ne dépend pas du plongement de la surface dans  $\mathbb{R}^3$ , c'est un invariant intrinsèque :

**Corollaire 2.4.5.** [*Theorema egregium de Gauss*]

*Deux surfaces localement isométriques ont même courbure de Gauss.*

Ce résultat n'a pas d'analogue dans le cas des courbes : toutes les courbes sont localement isométriques bien qu'elles n'aient pas nécessairement la même courbure. Le résultat de Gauss assure que deux surfaces qui n'ont pas la même courbure (de Gauss) ne peuvent pas être localement isométriques.

**Remarque 2.4.6.** *Deux surfaces peuvent être localement isométriques et ne pas avoir la même deuxième forme fondamentale (e.g. le cylindre et le plan).*

*Notez que deux surfaces peuvent avoir la même courbure de Gauss sans être localement isométriques.*

**Remarque 2.4.7.** *Le théorème de Gauss a des conséquences très pratiques. Vous l'avez déjà utilisé en mangeant une part de pizza, en êtes vous conscient ? Je vous incite à consulter à ce sujet le très joli article suivant : <https://images.math.cnrs.fr/Un-theoreme-et-une-part-de-pizza.html>*

En procédant comme ci-dessus, mais en déterminant à présent le coefficient de  $N$  dans les identités  $\partial_v \varphi_{uu} = \partial_u \varphi_{uv}$  et  $\partial_u \varphi_{vv} = \partial_v \varphi_{uv}$ , on obtient :

**Proposition 2.4.8** (Équations de Mainardi-Codazzi<sup>7</sup>). *On a*

$$\partial_u Q - \partial_v P = -P\Gamma_{12}^1 + Q(\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2) + R\Gamma_{11}^2$$

et

$$\partial_u R - \partial_v Q = -P\Gamma_{22}^1 + Q(\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2) + R\Gamma_{12}^2.$$

**Exemple 2.4.9.** *Lorsque  $F \equiv Q \equiv 0$  on obtient la forme simplifiée*

$$\partial_v P = P\Gamma_{12}^1 - R\Gamma_{11}^2 \quad \text{et} \quad \partial_u R = -P\Gamma_{22}^1 + R\Gamma_{12}^2.$$

*En remplaçant les coefficients de Christoffel par leurs expressions en fonction des coefficients de la première forme fondamentale, on obtient les égalités*

$$(\dagger) \quad \begin{cases} \partial_v P &= \frac{1}{2} \left( \frac{P}{E} + \frac{R}{G} \right) \partial_v E \\ \partial_u R &= \frac{1}{2} \left( \frac{P}{E} + \frac{R}{G} \right) \partial_u G \end{cases}.$$

7. Gaspare Mainardi (1800-1879) et Delfino Codazzi (1824-1873), mathématiciens italiens.

Notons qu'on peut toujours trouver une paramétrisation locale telle que  $F \equiv Q \equiv 0$  au voisinage d'un point qui n'est pas un ombilic :

**Lemme 2.4.10.** *Si  $p$  n'est pas un point ombilic, alors il existe une paramétrisation régulière de  $S$  au voisinage de  $p$  telle que  $F \equiv Q \equiv 0$ . Dans ce cas, la courbure de Gauss s'écrit*

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left( \partial_u \left( \frac{\partial_u G}{\sqrt{EG}} \right) + \partial_v \left( \frac{\partial_v E}{\sqrt{EG}} \right) \right).$$

Nous laissons le lecteur démontrer ce fait.

**Remarque 2.4.11.** *On peut montrer qu'il n'y a pas d'autres relations de compatibilité entre les deux premières formes fondamentales autres que celles de Gauss et de Mainardi-Codazzi : si on se donne des fonctions  $E, F, G, P, Q$  et  $R$  qui vérifient les équations de Gauss et de Mainardi-Codazzi, avec  $E, G > 0$  et  $EG - F^2 > 0$ , alors on peut localement trouver une surface paramétrée régulière  $S \subset \mathbb{R}^3$  (unique à isométrie globale près) qui a ces fonctions pour coefficients de ses deux premières formes fondamentales. Nous renvoyons le lecteur à [DoCarmo, pp. 236 et 311-314] pour plus de détails.*

### 2.4.3 Invariance par isométries globales

**Définition 2.4.12.** *Deux surfaces de  $\mathbb{R}^3$  sont équivalentes si elles sont images l'une de l'autre sous l'action d'une isométrie directe globale de  $\mathbb{R}^3$ .*

Rappelons qu'une isométrie globale de  $\mathbb{R}^3$  est une application affine

$$u \in \mathbb{R}^3 \mapsto Au + b \in \mathbb{R}^3$$

où  $b \in \mathbb{R}^3$  est un vecteur (translation) et  $A$  est une matrice  $3 \times 3$  orthogonale.

Observons qu'une translation ne modifie pas les dérivées partielles et laisse donc inchangées les deux formes fondamentales. Une matrice orthogonale préserve les longueurs et le produit scalaire, elle laisse donc également inchangée la première forme fondamentale.

Une matrice orthogonale directe transforme le vecteur normal  $n$  en  $A \cdot n$  et laisse donc invariante la deuxième forme fondamentale de  $S$  (tandis qu'une matrice orthogonale indirecte transforme  $n$  en  $-A \cdot n$  et  $II_S$  en  $-II_S$ ).

Le résultat qui suit, parfois appelé « théorème fondamental de la théorie locale des surfaces », constitue la réciproque à ce que nous venons d'observer :

**Théorème 2.4.13.** *Deux surfaces de  $\mathbb{R}^3$  sont équivalentes si et seulement si elles ont mêmes première et deuxième formes fondamentales.*

Nous renvoyons le lecteur aux références bibliographiques pour une preuve détaillée (voir par exemple [DoCarmo, pp. 236 et 311-314]).

## 2.5 Surfaces à courbure constante

Nous avons montré dans le chapitre 1 que les courbes planes à courbure constante sont des objets géométriques remarquables : ce sont des (morceaux de) droites ou des cercles. Nous nous intéressons ici aux surfaces à courbure constante. Nous étudions d'abord celles dont la courbure de Gauss est constante, puis celles à courbure moyenne nulle (les surfaces minimales).

### 2.5.1 Courbure de Gauss constante

#### Surfaces compactes

Les surfaces compactes à courbure de Gauss constantes sont les sphères :

**Théorème 2.5.1.** *Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface régulière compacte connexe à courbure de Gauss constante. Alors  $S$  est une sphère.*

*Démonstration. Étape 1.* On commence par montrer que la constante  $K$  est nécessairement strictement positive. On considère les sphères qui contiennent  $S$ . On en choisit une qui est de rayon minimal  $r > 0$ , elle touche nécessairement  $S$  en un point  $p$  (considérez si vous préférez le point où la fonction  $x \mapsto \|x\|$  atteint son maximum sur  $S$  qui est compacte).

Soit  $\gamma$  une courbe tracée sur  $S$  qui passe par  $p$ . Soit  $\varphi : I \rightarrow \Gamma \subset S$  une paramétrisation à vitesse unité de  $\gamma$  avec  $0 \in I$  et  $p = \varphi(0)$ . La fonction lisse  $t \mapsto f(t) = \|\varphi(t)\|^2$  atteint son maximum en 0, donc

$$f''(0) = 2\|\varphi'(0)\|^2 + 2\langle \varphi(0), \varphi''(0) \rangle \leq 0.$$

Or  $\|\varphi'(0)\| = 1$  (vitesse unité) et  $\varphi''(0) = \kappa_\gamma(p)N(p)$ , où  $N(p)$  désigne le vecteur normal à la courbe  $\gamma$  au point  $p$ . En notant  $\theta$  l'angle entre les vecteurs  $\varphi(0)$  et  $N(p)$ , on en déduit

$$\|\varphi(0)\| \cdot \kappa_\gamma(p) \geq -\cos \theta \|\varphi(0)\| \cdot \|\varphi''(0)\| = -\langle \varphi(0), \varphi''(0) \rangle \geq 1.$$

Comme  $\|\varphi(0)\| = \|p\| = r > 0$  par construction, il s'ensuit que

$$\kappa_\gamma(p) \geq \frac{1}{r}.$$

Puisque toutes les courbes tracées sur  $S$  et passant par  $p$  ont une courbure au moins égale à  $1/r$  en  $p$ , on en déduit que la courbure de  $S$  en  $p$  est au moins égale à  $1/r^2$ , en particulier elle est strictement positive.

*Étape 2.* Pour montrer que  $S$  est une sphère, il suffit de montrer que tous ses points sont des ombilics (voir Exercice 52). Notons  $k_1 \geq k_2$  les valeurs propres de l'opérateur  $F_p$ . Elles dépendent continûment de  $p$  et vérifient  $K = k_1 k_2 = \text{constante}$ . Fixons  $p \in S$  tel que  $k_1$  est maximale (on utilise ici

la compacité de  $S$ ). Comme  $k_2 = K/k_1$ , la fonction  $k_2$  est minimale en  $p$ . Supposons que le point  $p$  est un ombilic, i.e.

$$k_1(p) = k_2(p) = \sqrt{K}.$$

Alors pour tout  $q \in S$ ,

$$\sqrt{K} = k_2(p) \leq k_2(q) \leq k_1(q) \leq k_1(p) = \sqrt{K},$$

d'où tout point  $q$  est également un ombilic et  $S$  est une sphère.

*Étape 3.* Il reste donc à établir que le point  $p$  est un ombilic. Supposons le contraire, i.e. supposons que  $k_1(p) > k_2(p)$ . Il résulte du Lemme 2.4.10 que l'on peut trouver une paramétrisation de  $S$  au voisinage de  $p$  telle que  $F \equiv Q \equiv 0$ . Dans une telle paramétrisation, la courbure de Gauss et la courbure moyenne sont données par

$$K = \frac{PR}{EG} \quad \text{et} \quad H = \frac{1}{2} \frac{PG + RE}{EG}.$$

Il s'ensuit (quitte à intervertir les notations) que

$$k_1 = \frac{P}{E} \quad \text{et} \quad k_2 = \frac{R}{G}.$$

Nous utilisons à présent la relation (†) de l'Exemple 2.4.9 pour obtenir

$$\begin{cases} \partial_v P &= \frac{1}{2} (k_1 + k_2) \partial_v E \\ \partial_u R &= \frac{1}{2} (k_1 + k_2) \partial_u G \end{cases}$$

d'où

$$\partial_v k_1 = \frac{1}{2} (k_2 - k_1) \frac{\partial_v E}{E} \quad \text{et} \quad \partial_u k_2 = \frac{1}{2} (k_1 - k_2) \frac{\partial_u G}{G}.$$

Observons que  $k_1$  est maximale en  $p$ , donc de dérivée nulle. Comme on a supposé  $k_1(p) \neq k_2(p)$ , on en déduit  $\partial_v E(p) = 0$ . De même,  $\partial_u G(p) = 0$ . En dérivant la première égalité par rapport à  $v$  et en injectant  $\partial_v E(p) = 0$ , il vient

$$\partial_{vv}^2 E(p) = 2E(p) \frac{\partial_{vv}^2 k_1}{k_1 - k_2}(p).$$

Or  $k_1$  est maximale en  $p$  donc  $\partial_{vv}^2 k_1(p) \geq 0$ , d'où  $\partial_{vv}^2 E(p) \geq 0$ .

De la même façon, on obtient

$$\partial_{vv}^2 G(p) \geq 0.$$

Or l'expression de la courbure de Gauss obtenue au Lemme 2.4.10 donne (en tenant compte de l'annulation  $\partial_v E(p) = \partial_u G(p) = 0$ ),

$$K(p) = -\frac{1}{2EG} (\partial_{uu}^2 G + \partial_{vv}^2 E) \leq 0,$$

ce qui contredit le fait que  $K(p) = K > 0$ . □

### Surfaces de révolution

On considère une courbe plane  $\mathcal{C}$  et on la fait tourner autour d'une droite  $D$  du plan qui la contient. On peut supposer que le plan de référence est le plan de coordonnées  $xOz$  et que la courbe  $\mathcal{C}$  est paramétrée à vitesse 1,  $s \in I \mapsto (f(s), 0, h(s)) \in \mathbb{R}^3$ , avec  $f'(s)^2 + h'(s)^2 \equiv 1$ . On peut également supposer que l'axe de révolution est l'axe de coordonnée  $Oz$ , la surface de révolution est alors paramétrée par

$$\varphi : (s, \theta) \in I \times ]0, 2\pi[ \mapsto (f(s) \cos \theta, f(s) \sin \theta, h(s)) \in \mathbb{R}^3.$$

**Lemme 2.5.2.** *La courbure de Gauss est, lorsque  $f > 0$ ,*

$$K(s, \theta) = -\frac{f''(s)}{f(s)}.$$

*Démonstration.* Le vecteur normal est donné par

$$N(s, \theta) = (-h'(s) \cos \theta, -h'(s) \sin \theta, f'(s)).$$

En utilisant les notations et formules vues précédemment, on obtient, pour les formes fondamentales :

$$E = 1, F = 0, G = f^2 \text{ et } P = (-f''h' + h''f'), Q = 0, R = fh'.$$

On en déduit que

$$K = \frac{h'[h''f' - f''h']}{f} = -\frac{f''}{f},$$

en rappelant que  $f'(s)^2 + h'(s)^2 \equiv 1$ , donc  $h'h'' = -f'f''$ .  $\square$

**Exemple 2.5.3.** *Un tore de révolution est la surface obtenue en faisant tourner un cercle autour d'une droite qui ne le rencontre pas. La paramétrisation par longueur d'arc de ce « pneu » est donnée par*

$$f(s) = R + r \cos(s/r), h(s) = r \sin(s/r), \text{ avec } R > r.$$

Le calcul précédent donne donc

$$K(s, \theta) = \frac{\cos(s/r)}{r[R + \cos(s/r)]}$$

qui est positive pour  $s/r \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  (côté pneu) et négative sinon (côté jante).

Nous considérons à présent les surfaces de révolution à courbure de Gauss constante :

*Courbure constante nulle.* C'est le cas le plus simple :

**Proposition 2.5.4.** *Si  $K \equiv 0$ , alors  $S$  est un plan, un cylindre ou un cône.*

*Démonstration.* Dans ce cas  $f'' \equiv 0$ , donc  $f' \equiv \text{constante}$ . Il s'ensuit que  $h'$  est également constante, donc  $f$  et  $h$  sont affines, c'est-à-dire que  $\mathcal{C}$  est un morceau de droite.

On en déduit que  $S$  est du type annoncé, en fonction de la position relative de la droite  $\mathcal{C}$  par rapport à l'axe  $Oz$  (parallèles, perpendiculaires ou autres). Plus précisément, il vient  $f(s) = as + b$  et  $h(s) = \pm\sqrt{1 - a^2}s + c$ , où  $a \in [-1, 1]$  et  $b, c \in \mathbb{R}$ . Quitte à changer d'origine, on se ramène aux trois cas suivants :

- 1)  $f(s) = as$ ,  $h(s) \equiv \text{cst}$  et  $a \in \{-1, 1\}$ , dans ce cas  $S$  est un plan ;
- 2)  $f(s) = as$ ,  $h(s) = \pm\sqrt{1 - a^2}s$  et  $a \notin \{\pm 1, 0\}$ , alors  $S$  est un cône ;
- 3)  $f(s) = b$ ,  $h(s) = s$ , et  $a = 0$ , dans ce cas  $S$  est un cylindre.  $\square$

*Courbure constante positive.* Nous avons déjà observé que les sphères sont des surfaces de révolution à courbure de Gauss constante positive. Supposons que  $K$  est une constante positive. La fonction  $f$  vérifie donc  $f'' + Kf \equiv 0$ , d'où, après changement d'origine,

$$f(s) = a \cos(\sqrt{K}s) \text{ et } h(s) = \int_0^s \pm \sqrt{1 - a^2 K \sin^2(\sqrt{K}u)} du.$$

La fonction définissant  $h$  s'appelle une intégrale elliptique. On retrouve les sphères lorsque  $a^2 K = 1$ .

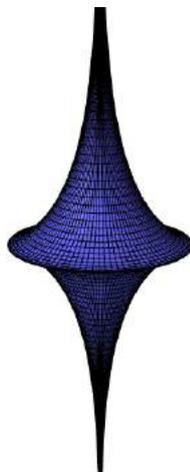
*Courbure constante négative.* Supposons à présent que la courbure de Gauss  $K$  est une constante négative. Il vient

$$f(s) = a \exp(\sqrt{-K}s) + b \exp(-\sqrt{-K}s) = c \text{Ch}(\sqrt{-K}s) + d \text{Sh}(\sqrt{-K}s)$$

où Ch et Sh désignent le cosinus et le sinus hyperboliques. La surface qui correspond à

$$f(s) = e^s \text{ et } h(s) = \int_0^s \sqrt{1 - e^{2t}} dt$$

s'appelle la *pseudosphère*. En voici une représentation graphique :



Elle a une courbure  $K \equiv -1$  et possède de nombreuses propriétés remarquables. Notons que la courbe plane  $\mathcal{C}$  que l'on fait tourner pour définir la pseudosphère a été rencontrée au Chapitre 1, il s'agit de la tractrice.

### Surfaces réglées

Ce sont les surfaces obtenues en faisant passer par tout point d'une courbe  $\mathcal{C}$ , une droite qui dépend de façon lisse du paramètre. Si la courbe  $\mathcal{C}$  est paramétrée par  $t \in I \mapsto \alpha(t) \in \mathbb{R}^3$ , la droite passant par  $\varphi(t)$  peut être définie par son vecteur directeur  $\beta(t) \in \mathbb{R}^3$ . La surface admet ainsi la paramétrisation

$$(t, s) \in I \times \mathbb{R} \mapsto \alpha(t) + s\beta(t) \in \mathbb{R}^3.$$

Un exemple particulièrement important est la surface obtenue en considérant l'ensemble des tangentes à la courbe  $\mathcal{C}$ .

**Proposition 2.5.5.** *Les surfaces réglées sont à courbure de Gauss négative.*

Tous les points d'une surface réglée sont donc hyperboliques ou paraboliques.

*Démonstration.* Rappelons que la courbure de Gauss est donnée par

$$K = \frac{PQ - R^2}{EG - F^2}.$$

Comme  $EG - F^2 \geq 0$  est toujours positif (inégalité de Cauchy-Schwarz<sup>8</sup>), il s'agit donc de contrôler le signe du numérateur. Or, si  $\varphi = \varphi(s, t) = \alpha(t) + s\beta(t)$  désigne la paramétrisation ci-dessus, il vient  $\varphi_{ss} \equiv 0$ . En notant  $n$  le vecteur normal à la surface, on obtient donc

$$P = \langle \varphi_{ss}, n \rangle = 0.$$

Le numérateur est donc égal à  $-R^2$ , d'où  $K \leq 0$ . □

### 2.5.2 Surfaces minimales

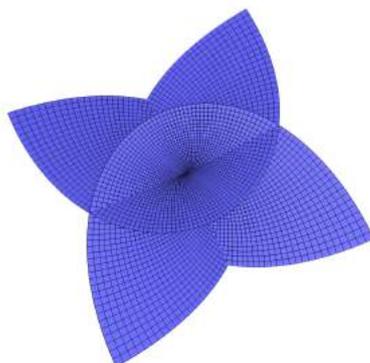
**Définition 2.5.6.** *On dit qu'une surface est minimale lorsque sa courbure moyenne est identiquement nulle.*

Rappelons que l'annulation de la courbure de Gauss ne dépend pas du choix de la paramétrisation, mais qu'il n'en est pas de même pour la courbure moyenne.

Voici une représentation graphique de la surface minimale d'Enneper<sup>9</sup> de paramétrisation  $\varphi(u, v) = \left( u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right)$  :

8. Augustin Louis Cauchy, mathématicien français (1789-1857); Hermann Amandus Schwarz, mathématicien allemand (1843-1921).

9. Alfred Enneper, mathématicien allemand (1830-1885).



Vous vérifierez en exercice qu'il s'agit bien d'une surface minimale. De telles surfaces tiennent leur nom de la propriété suivante :

**Théorème 2.5.7.** *Si une surface  $S$  minimise l'aire parmi les surfaces  $S'$  proches qui coïncident avec  $S$  hors d'un compact, alors sa courbure moyenne est identiquement nulle.*

*Démonstration.* Soit  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  une paramétrisation de  $S$ . On note  $N(u, v)$  le vecteur normal unitaire associé. Soit  $\chi$  une fonction lisse à support compact dans  $U$ . Pour  $t \in \mathbb{R}$  petit, la paramétrisation

$$\phi_t(u, v) = \varphi(u, v) + t\chi(u, v)N(u, v)$$

définit une surface régulière  $S_t$  qui coïncide avec  $S$  hors du support de  $\chi$ , comme on le vérifie en calculant les vecteurs tangents

$$\partial_u \phi_t = \varphi_u + t\chi_u N + t\chi \partial_u N \quad \text{et} \quad \partial_v \phi_t = \varphi_v + t\chi_v N + t\chi \partial_v N.$$

Rappelons que  $\langle \varphi_u, N \rangle = 0$  et  $\langle \varphi_u, \partial_u N \rangle = -P$ . On en déduit

$$E_t = \langle \partial_u \phi_t, \partial_u \phi_t \rangle = E - 2t\chi P + O(t^2).$$

Il vient de même  $F_t = F - 2t\chi Q + O(t^2)$  et  $G_t = G - 2t\chi R + O(t^2)$ , donc

$$\begin{aligned} E_t G_t - F_t^2 &= EG - F^2 - 2t\chi(ER + GP - 2FQ) + O(t^2) \\ &= (EG - F^2)[1 - 4t\chi H + O(t^2)]. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\text{Aire}(S_t) = \text{Aire}(S) - 2t \int_U \sqrt{EG - F^2} \chi H \, dudv.$$

Pour que l'aire de  $S$  soit plus petite que celle de  $S_t$  pour tout  $t$  petit, il faut donc que  $\int_U \sqrt{EG - F^2} \chi H \, dudv = 0$  quelle que soit la fonction test  $\chi$ , ce qui nécessite que la courbure moyenne  $H$  s'annule identiquement.  $\square$

L'étude des surfaces minimales est un sujet riche et classique qui a des interactions fortes avec l'analyse complexe. Voici une connexion simple entre ces deux domaines :

**Proposition 2.5.8.** Soit  $\varphi : (u, v) \in U \rightarrow (\alpha(u, v), \beta(u, v), \gamma(u, v)) \in S \subset \mathbb{R}^3$  une paramétrisation conforme. Alors  $S$  est minimale si et seulement si chacune des fonctions coordonnées  $\alpha, \beta, \gamma$  est harmonique.

*Démonstration.* Rappelons que la paramétrisation  $\varphi$  est conforme si et seulement si  $E = G > 0$  et  $F \equiv 0$ . On dérive la première égalité par rapport à  $u$  et  $v$  pour obtenir

$$\langle \varphi_u, \varphi_{uu} \rangle = \langle \varphi_v, \varphi_{uv} \rangle \quad \text{et} \quad \langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle = \langle \varphi_v, \varphi_{vv} \rangle.$$

En dérivant la seconde égalité on obtient

$$\langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle = -\langle \varphi_v, \varphi_{uu} \rangle \quad \text{et} \quad \langle \varphi_v, \varphi_{uv} \rangle = -\langle \varphi_u, \varphi_{vv} \rangle.$$

En combinant ces relations, il vient

$$\langle \varphi_u, \varphi_{uu} + \varphi_{vv} \rangle = \langle \varphi_v, \varphi_{uu} + \varphi_{vv} \rangle = 0,$$

autrement dit le vecteur  $\varphi_{uu} + \varphi_{vv}$  est proportionnel au vecteur normal  $N$ . Or  $\langle \varphi_{uu}, N \rangle = P$  et  $\langle \varphi_{vv}, N \rangle = R$ , tandis que

$$H = \frac{ER + GP - 2FQ}{2(EG - F^2)} = \frac{P + R}{2E}.$$

Il s'ensuit que

$$(\Delta\alpha, \Delta\beta, \Delta\gamma) = \varphi_{uu} + \varphi_{vv} = EHN.$$

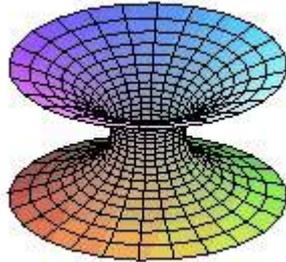
Comme  $E > 0$ , la courbure moyenne est identiquement nulle si et seulement si les fonctions coordonnées sont harmoniques.  $\square$

**Proposition 2.5.9.** Les seules surfaces minimales (connexes) de révolution dans  $\mathbb{R}^3$  sont le plan et la caténoïde, qui peut être paramétrée par

$$\varphi : (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (a \operatorname{Ch} s \cos t, a \operatorname{Ch} s \sin t, as) \in \mathbb{R}^3$$

où  $a$  est un paramètre réel positif.

Voici une représentation graphique de la caténoïde :



*Démonstration.* Nous reprenons les notations de la preuve du lemme 2.5.2. Nous cherchons une paramétrisation de  $S$  du type

$$\varphi : (s, \theta) \in I \times ]0, 2\pi[ \mapsto (f(s) \cos \theta, f(s) \sin \theta, h(s)) \in \mathbb{R}^3$$

avec  $(f')^2 + (h')^2 \equiv 1$ . Nous avons obtenu

$$E = 1, F = 0, G = f^2 \text{ et } P = (-f''h' + h''f'), Q = 0, R = fh',$$

ainsi donc

$$\begin{aligned} H &= \frac{ER + GP - 2FQ}{2(EG - F^2)} = \frac{f(h')^2 - f^2 f''}{2h'(EG - F^2)} \\ &= \frac{f}{2h'(EG - F^2)} [1 - (f')^2 - f f'']. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que  $H \equiv 0$  si et seulement si  $(f')^2 + f f'' \equiv 1$ .

Cette équation différentielle s'intègre en remarquant que la fonction  $g = f^2$  vérifie l'équation  $g'' \equiv 2$ . On en déduit, quitte à translater en  $s$ , que  $f(s) = \sqrt{s^2 + a^2}$ , avec  $a \geq 0$  (le cas  $f(s) = \sqrt{s^2 - a^2}$  est exclu car il conduirait à  $(h')^2(s) < 0$ ). Pour  $a = 0$ , on obtient  $|f'| \equiv 1$  donc  $h' \equiv 0$ , et  $S$  est un morceau de plan. Pour  $a > 0$ , on obtient

$$h'(s) = \frac{a}{\sqrt{s^2 + a^2}} \implies h(s) = a \operatorname{ArgSh} \left( \frac{s}{a} \right) + c,$$

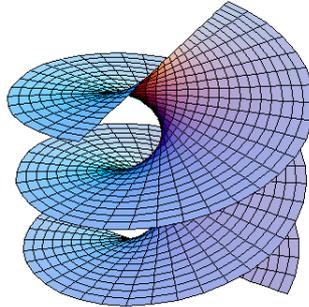
ce qui fournit la paramétrisation par longueur d'arc de la caténoïde.  $\square$

**Proposition 2.5.10.** *Les seules surfaces réglées minimales sont le plan et l'hélicoïde qui admet la paramétrisation*

$$\varphi : (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (a \operatorname{Sh} s \cos t, a \operatorname{Sh} s \sin t, at) \in \mathbb{R}^3$$

où  $a$  est un paramètre réel positif.

Voici une représentation graphique de l'hélicoïde :



Nous renvoyons le lecteur intéressé à [DoCarmo, pp. 201-204] pour une démonstration de ce dernier résultat.

## 2.6 Propriétés métriques

### 2.6.1 Géodésiques

**Définition 2.6.1.** Une courbe lisse régulière  $\gamma : I \rightarrow S$  est une géodésique si et seulement si elle vérifie, pour tout  $t \in I$ ,

$$\pi_{\gamma(t)}\gamma''(t) = 0$$

où  $\pi_{\gamma(t)}$  désigne la projection orthogonale sur le plan  $T_{\gamma(t)}(S)$ , i.e. ssi le vecteur accélération  $\gamma''(t)$  est orthogonal au plan tangent  $T_{\gamma(t)}(S)$ .

#### Exemple 2.6.2.

1) Les (segments de) droites sont les géodésiques du plan. En effet, dans ce cas  $\pi_{\gamma(t)}$  est la projection orthogonale sur un plan fixe, l'équation se réduit donc à  $\gamma''(t) \equiv 0$ , i.e.  $t \mapsto \gamma(t)$  est affine.

2) Les grands cercles (intersection d'un plan passant par l'origine avec la sphère) sont des géodésiques de la sphère.

3) Les hélices sont des géodésiques du cylindre droit : soit

$$\varphi(s, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta, s),$$

une courbe  $\gamma(t) = \varphi(s(t), \theta(t))$  est une géodésique si et seulement si

$$\gamma''(t) \perp \varphi_s(s(t), \theta(t)) \iff s''(t) \equiv 0$$

et

$$\gamma''(t) \perp \varphi_\theta(s(t), \theta(t)) \iff \theta''(t) \equiv 0.$$

4) Les géodésiques du tore se calculent à l'aide d'intégrales elliptiques, vous en trouverez une représentation graphique à l'adresse suivante :

<http://www.mathcurve.com/courbes3d/lignes/geodesictore.shtml>

Les géodésiques sont des courbes paramétrées à vitesse constante :

**Proposition 2.6.3.** Soit  $\gamma : I \rightarrow S$ , alors  $t \mapsto \|\gamma'(t)\|$  est constante.

*Démonstration.* Par définition,  $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}S$  et  $\gamma''(t)$  est orthogonal au plan  $T_{\gamma(t)}S$ , donc

$$\frac{d}{dt} \|\gamma'(t)\|^2 = 2\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle = 0.$$

□

L'existence en temps court des géodésiques est garantie par le théorème de Cauchy-Lipschitz :

**Théorème 2.6.4.** Soit  $p \in S$  et  $v \in T_pS \setminus \{0\}$ . Il existe  $\varepsilon > 0$  et une unique géodésique  $\gamma : ]-\varepsilon, +\varepsilon[ \rightarrow S$  telle que  $\gamma(0) = p$  et  $\gamma'(0) = v$ .

L'existence en temps long (i.e. pour  $t \in \mathbb{R}$ ) des géodésiques est liée au théorème de Hopf-Rinow (voir plus loin).

*Démonstration.* Soit  $\varphi : (x, y) \in U \mapsto \varphi(x, y) \in S \subset \mathbb{R}^3$  une paramétrisation (régulière) de  $S$  et  $\gamma : t \in I \mapsto \varphi(x(t), y(t)) \in S$  une courbe tracée sur  $S$ . La courbe  $\gamma$  est une géodésique si et seulement si  $\gamma''(t)$  est orthogonal à  $T_{\gamma(t)}S$  pour tout  $t$ . Or  $\gamma' = x'\varphi_x + y'\varphi_y$  et

$$\gamma'' = x''\varphi_x + (x')^2\varphi_{xx} + 2x'y'\varphi_{xy} + (y')^2\varphi_{yy} + y''\varphi_y.$$

En utilisant l'expression de  $\varphi_{xx}, \varphi_{xy}, \varphi_{yy}$  en fonction des symboles de Christoffel, on décompose  $\gamma''(t)$  dans la base  $\{\varphi_x, \varphi_y, N\}$ . Le vecteur accélération  $\gamma''$  est orthogonal à  $T_{\gamma(t)}S$  si et seulement si ses composantes selon  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$  sont nulles, i.e.

$$x'' + \Gamma_{11}^1(x')^2 + 2\Gamma_{12}^1x'y' + \Gamma_{22}^1(y')^2 = 0$$

et

$$y'' + \Gamma_{11}^2(x')^2 + 2\Gamma_{12}^2x'y' + \Gamma_{22}^2(y')^2 = 0.$$

L'équation des géodésiques est donc une équation différentielle non linéaire (et vectorielle) d'ordre deux. Si on note  $Z = (x', y')$ , elle peut s'écrire sous la forme  $Z' = F(Z)$ , avec  $F$  lisse. Il résulte du théorème de Cauchy-Lipschitz qu'elle admet des solutions en temps court (i.e. sur un petit intervalle de temps  $] -\varepsilon, \varepsilon[$ ,  $\varepsilon > 0$ ), pour toute donnée initiale de Cauchy  $(p, v) \in S \times T_pS$ .  $\square$

On déduit de l'unicité que si  $\gamma(t, v)$  désigne cette géodésique, alors pour  $\lambda \neq 0$ ,

$$\gamma(t, \lambda v) = \gamma(\lambda t, v).$$

Pour tout vecteur  $v$  de norme assez petite, il s'ensuit que la géodésique  $\gamma(\cdot, v)$  est définie sur un intervalle de longueur au moins 2.

**Définition 2.6.5.** Pour  $v \in T_p(S)$  de longueur assez petite, on définit

$$\exp_p(v) := \gamma(1, v).$$

**Proposition 2.6.6.** L'application exponentielle réalise un difféomorphisme local d'un voisinage de 0 dans  $T_p(S)$  sur un voisinage de  $p$  dans  $S$ , avec

$$D \exp_p = \text{Id}.$$

*Démonstration.* Le fait que  $\exp_p$  soit lisse résulte du théorème de Cauchy-Lipschitz : la solution  $\gamma(t, v)$  dépend de façon lisse des données initiales  $(p, v) \in S \times T_pS$ . Pour montrer que c'est un difféomorphisme local, il suffit donc de vérifier que sa différentielle en  $p$  est l'identité. Cela résulte de l'homogénéité déjà utilisée :

$$\exp_p(tv) = \gamma(1, tv) = \gamma(t, v) = \gamma(0, v) + t\gamma'(0, v) + o(t) = p + tv + o(t).$$

$\square$

### 2.6.2 Distance intrinsèque

Rappelons que la longueur d'une courbe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$  tracée sur une surface  $S$  est

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt.$$

Elle ne dépend que de la première forme fondamentale.

Étant donnés deux points  $p$  et  $q$  sur  $S$ , on peut toujours trouver une courbe tracée sur  $S$  qui les joint. Il est naturel d'essayer d'en construire une qui soit de longueur minimale et de mesurer ainsi la distance entre  $p$  et  $q$  :

**Définition 2.6.7.** *La distance entre deux points d'une surface régulière  $S \subset \mathbb{R}^3$  est la borne inférieure de la longueur des courbes qui les joignent :*

$$d_S(p, q) = \inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma \text{ courbe tracée sur } S \text{ t.q. } \gamma(0) = p \text{ et } \gamma(1) = q\}.$$

Notez que la définition ne prétend pas qu'il existe une courbe de longueur minimale! Cette distance ne coïncide pas avec la distance dans  $\mathbb{R}^3$ , sauf lorsque  $S$  est un plan. Pour la sphère unité, vous montrerez en exercice que

$$d_{S^2}(p, q) = 2 \arcsin \frac{\|p - q\|}{2}.$$

Notons que  $d_S$  définit bien une distance sur  $S$  :

**Proposition 2.6.8.** *La fonction  $d_S : S \times S \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifie*

1.  $d_S(p, q) = d_S(q, p)$  ;
2.  $d_S(p, q) \leq d_S(p, r) + d_S(r, q)$  ;
3.  $d_{\mathbb{R}^3}(p, q) \leq d_S(p, q)$ .

*En particulier  $d_S$  est une distance.*

*Démonstration.* Il faut commencer par s'assurer que l'infimum ne vaut pas  $+\infty$ , c'est-à-dire qu'il existe au moins une courbe ( $\mathcal{C}^1$  par morceaux) qui relie deux points donnés : c'est clair si les deux points appartiennent à une même carte locale, sinon on peut concaténer des courbes qui passent par un nombre fini de points intermédiaires appartenants aux ouverts d'intersection des cartes : étant donnés  $r$  chemins  $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow S$  qui joignent  $p_i$  à  $q_i$  avec  $p_1 = p$  et  $q_r = q$ , le chemin  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$  défini par

$$\gamma(t) = \gamma_i(rt - (i-1)) \quad \text{si} \quad \frac{i-1}{r} \leq t \leq \frac{i}{r}$$

est  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et tel que  $\gamma(0) = p$  et  $\gamma(1) = q$ .

La relation de symétrie résulte de ce que la longueur d'un chemin  $\gamma$  reliant  $p$  à  $q$  est le même que celle du chemin  $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(1-t)$  qui relie  $q$  à  $p$ .

Si  $\gamma_1$  est un chemin  $\mathcal{C}^1$  par morceaux qui relie  $p$  à  $r$ , et  $\gamma_2$  est un chemin  $\mathcal{C}^1$  par morceaux qui relie  $r$  à  $q$ , alors

$$\gamma(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{pour } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_2(2t-1) & \text{pour } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

définit un chemin  $\mathcal{C}^1$  par morceaux qui relie  $p$  à  $q$ . On a donc

$$d_S(p, q) \leq \ell(\gamma) = \int_0^{1/2} \|2\gamma_1'(2t)\| dt + \int_{1/2}^1 \|2\gamma_2'(2t-1)\| dt = \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2).$$

On en déduit  $d_S(p, q) \leq d_S(p, r) + d_S(r, q)$  en faisant varier  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ .

Comme il y a plus de chemins joignant  $p$  à  $q$  dans  $\mathbb{R}^3$  que sur  $S$ , la distance  $d_S$  domine la distance euclidienne.  $\square$

Une propriété essentielle des géodésiques est qu'elles minimisent localement la distance  $d_S$  :

**Théorème 2.6.9.** *Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface régulière. Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$  une courbe tracée sur  $S$  joignant  $p$  à  $q$  à vitesse constante. Si  $\gamma$  minimise la distance, i.e.  $\ell(\gamma) = d_S(p, q)$ , alors  $\gamma$  est une géodésique.*

*Réciproquement, toute géodésique minimise localement la distance.*

*Démonstration.* Soit  $\gamma$  une courbe qui minimise la distance  $d_S$  entre deux points  $p$  et  $q$ . On peut effectuer un changement admissible de paramétrisation pour se ramener au cas où  $\gamma$  évolue à vitesse constante (cela ne modifie pas la longueur bien sûr). Dans ce cas,  $\gamma$  minimise également l'énergie

$$\mathcal{E}(\gamma) := \int_0^1 \|\gamma'(t)\|^2 dt$$

qui, elle, dépend de la paramétrisation. Il résulte en effet de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que si  $\tilde{\gamma}$  est un autre chemin joignant  $p$  à  $q$ , alors

$$\mathcal{E}(\gamma) = \ell(\gamma)^2 \leq \ell(\tilde{\gamma})^2 \leq \mathcal{E}(\tilde{\gamma}).$$

On va montrer qu'un chemin qui minimise  $\mathcal{E}$  est nécessairement une géodésique. Considérons  $\gamma_s(t) = \gamma(s, t)$  une famille de chemins joignant  $p$  à  $q$  tels que  $\gamma_0(t) = \gamma(t)$  est le chemin minimisant de départ. Observons que

$$\gamma_s(t) = \gamma_0(t) + s \frac{\partial \gamma}{\partial s}(0, t) + o(s)$$

avec

$$\frac{\partial \gamma}{\partial s}(0, 0) = \frac{\partial \gamma}{\partial s}(0, 1) = 0$$

puisque les extrémités  $p, q$  sont fixes.

On décompose

$$\gamma'_s(t) = \gamma'_0(t) + s \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s \partial t}(0, t) + o(s)$$

pour obtenir

$$\mathcal{E}(\gamma_s) = \mathcal{E}(\gamma_0) + 2s \int_0^1 \langle \gamma'_0(t), \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) (0, t) \rangle dt + o(s).$$

On souhaite intégrer par parties. Il ne faut pas oublier que le produit scalaire dépend de  $t$  ! On peut décomposer en coordonnées en utilisant une paramétrisation locale  $\varphi(u, v)$  de  $S$  : il vient  $\gamma_s(t) = \varphi(u_s(t), v_s(t))$  et

$$\begin{aligned} \langle \gamma'_0(t), \frac{\partial \gamma}{\partial s}(0, t) \rangle &= \langle u'_0 \varphi_u + v'_0 \varphi_v, \frac{\partial u_0}{\partial s} \varphi_u + \frac{\partial v_0}{\partial s} \varphi_v \rangle \\ &= u'_0 \partial_s u_0 E + [u'_0 \partial_s v_0 + v'_0 \partial_s u_0] F + v'_0 \partial_s v_0 G. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \gamma'_0(t), \frac{\partial \gamma}{\partial s}(0, t) \rangle &= \{u''_0 E + v''_0 F + u'_0 \partial_t E + v'_0 \partial_t F\} \partial_s u_0 \\ &+ \{u''_0 F + v''_0 G + u'_0 \partial_t F + v'_0 \partial_t G\} \partial_s v_0 \\ &+ \langle \gamma'_0(t), \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) (0, t) \rangle. \end{aligned}$$

On intègre à présent par parties en observant qu'il n'y a pas de partie variationnelle car  $\frac{\partial \gamma}{\partial s}(0, 0) = \frac{\partial \gamma}{\partial s}(0, 1) = 0$ . Il vient ainsi

$$\mathcal{E}(\gamma_s) = \mathcal{E}(\gamma_0) + 2s \int_0^1 \{A \partial_s u_0 + B \partial_s v_0\} dt + o(s).$$

Comme on peut choisir les vecteurs tangents  $\partial_s u_0$  et  $\partial_s v_0$  de façon arbitraire, on en déduit que les quantités  $A$  et  $B$  sont identiquement nulles, i.e.

$$u''_0 E + v''_0 F + u'_0 \partial_t E + v'_0 \partial_t F = 0$$

et

$$u''_0 F + v''_0 G + u'_0 \partial_t F + v'_0 \partial_t G = 0.$$

Le lecteur vérifiera qu'il s'agit précisément de l'équation d'une géodésique.

On peut réciproquement montrer qu'une géodésique minimise localement la distance. Cela résulte du « lemme de Gauss » qui affirme que l'application exponentielle est une isométrie radiale. Nous renvoyons le lecteur aux références pour une preuve.  $\square$

Notez bien que cette propriété n'est pas nécessairement vraie globalement, comme vous vous en rendrez compte dans les exercices : une géodésique « longue » ne minimise pas nécessairement la distance entre ses extrémités (pensez aux arcs de grands cercles sur la sphère).

Soit  $p \in S$  et fixons  $\varepsilon > 0$  petit. Pour tout  $v \in T_p S$  de norme 1, il existe une géodésique  $\gamma(t, v)$  de  $S$  issue de  $p$  et de vecteur initial  $v$ . Lorsque  $v$  parcourt l'ensemble des vecteurs unitaires de  $T_p S$ , les géodésiques  $\{\gamma(t, v) \mid -\varepsilon < t < \varepsilon\}$  remplissent la boule  $B_{d_S}(p, \varepsilon)$  de rayon  $\varepsilon$ . De plus,  $\gamma$  est l'unique plus court chemin qui relie ses extrémités. Bien que  $d_S$  ne soit pas équivalente à la distance induite par la distance euclidienne, on en déduit cependant que ces deux distances induisent la même topologie.

Il est naturel d'essayer d'étendre le domaine de définition des géodésiques. Lorsque celui-ci est maximal (i.e. si une géodésique est définie sur  $\mathbb{R}$ ), on se trouve dans une situation très particulière. Nous mentionnons sans démonstration l'important résultat de Hopf-Rinow<sup>10</sup> :

**Théorème 2.6.10.** *Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface. Il y a équivalence entre les trois propriétés suivantes :*

1. *Il existe un  $p \in S$  tel que l'application exponentielle  $\exp_p$  est définie sur tout l'espace tangent  $T_p(S)$  ;*
2. *Pour tout point  $p \in S$ , l'application exponentielle  $\exp_p$  est définie sur tout  $T_p(S)$  ;*
3. *L'espace métrique  $(S, d_S)$  est complet.*

Dans ce cas, toutes les géodésiques sont définies sur la droite réelle  $\mathbb{R}$  et on peut montrer que deux points sont toujours reliés par une géodésique qui minimise la longueur.

Il en va ainsi de l'application exponentielle de la sphère en un de ses points. Lorsque l'on identifie celle-ci au globe terrestre en prenant comme point le pôle nord, on obtient la projection de Postel des cartographes.

**Remarque 2.6.11.** *En poussant un cran plus loin l'étude des variations de la longueur d'arc, il est possible de montrer le résultat suivant : si une surface  $S$  complète est à courbure uniformément minorée positivement ( $K \geq \delta > 0$ ), alors  $S$  est compacte et le diamètre  $\text{diam}(S)$  de  $S$  vérifie*

$$\text{diam}(S) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}.$$

*Nous renvoyons le lecteur au livre de DoCarmo (p. 352) pour une preuve de ce magnifique théorème de Bonnet<sup>11</sup>.*

---

10. Heinz Hopf, mathématicien allemand (1894-1971), pionnier de la topologie algébrique ; Willi Rinow (1907-1979) était son étudiant.

11. Pierre-Ossian Bonnet, mathématicien français (1819-1892).

## 2.7 Théorème de Gauss-Bonnet

### 2.7.1 Surface strictement convexe

**Définition 2.7.1.** On dit qu'une surface  $S \subset \mathbb{R}^3$  est strictement convexe si sa courbure de Gauss garde un signe constant.

La sphère est un exemple évident de surface strictement convexe, mais vous en connaissez bien d'autres.

**Théorème 2.7.2.** Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface fermée strictement convexe. Alors

$$\int_S K d\sigma_S = 4\pi.$$

On intègre ici  $K$  contre la mesure d'aire  $d\sigma_S$  qui est définie, dans une paramétrisation  $\varphi : U \rightarrow S$  par

$$\varphi^* d\sigma_S = \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| du \wedge dv.$$

Nous avons observé précédemment que  $d\sigma_S$  ne dépend pas du choix de la paramétrisation.

*Démonstration.* Comme  $S$  est strictement convexe, l'application de Gauss réalise un difféomorphisme de  $S$  sur la sphère  $S^2$ , dont le jacobien est précisément la courbure de Gauss. Il s'ensuit que

$$\int_S K d\sigma_S = \text{Aire}(S^2) = 4\pi.$$

□

Que se passe-t-il lorsque  $K$  change de signe? Comme nous l'indiquons ci-après, on dispose d'une formule analogue qui fait intervenir un terme topologique (la caractéristique d'Euler de la surface) qui encode les changements de signes de  $K$ .

### 2.7.2 Polyèdres convexes

Soit  $P \subset \mathbb{R}^2$  un *polygone convexe* du plan, c'est-à-dire un ensemble convexe compact du plan dont le bord est constitué d'un nombre fini d'*arêtes*  $\gamma_i$  (i.e. des segments de droites). On appelle *sommets* les intersections  $\gamma_i \cap \gamma_j$ ,  $i \neq j$ , des arêtes et *face* l'intérieur du polygone.

**Définition 2.7.3.** Un *polyèdre convexe* de  $\mathbb{R}^3$  est la généralisation naturelle des polygones convexes en dimension trois. Ce sont des ensembles convexes compacts de  $\mathbb{R}^3$  dont le bord est constitué d'un nombre fini  $s$  de polygones convexes  $(P_i)_{1 \leq i \leq s}$  tels que pour tout  $i \neq j$ ,  $P_i \cap P_j$  est soit vide, soit une arête commune  $\gamma_\ell$  à  $P_i$  et  $P_j$ .

On note

- $S$  le nombre de *sommets* du polyèdre (intersections  $\gamma_i \cap \gamma_j \neq \emptyset, i \neq j$ ),
- $A$  le nombre d'arêtes,
- et  $F = s$  le nombre de faces.

Euler et Descartes ont observé une formule remarquable reliant ces quantités :

**Proposition 2.7.4.** *Pour tout polyèdre convexe de  $\mathbb{R}^3$ , on a*

$$S - A + F = 2.$$

Nous laissons le lecteur démontrer cette très jolie formule.

**Exemple 2.7.5.** *Un polyèdre convexe est dit régulier si*

- toutes ses faces sont des polygones réguliers convexes isométriques ;
- aucune des faces ne se coupe excepté sur les arêtes ;
- le même nombre de faces se rencontrent en chacun des sommets.

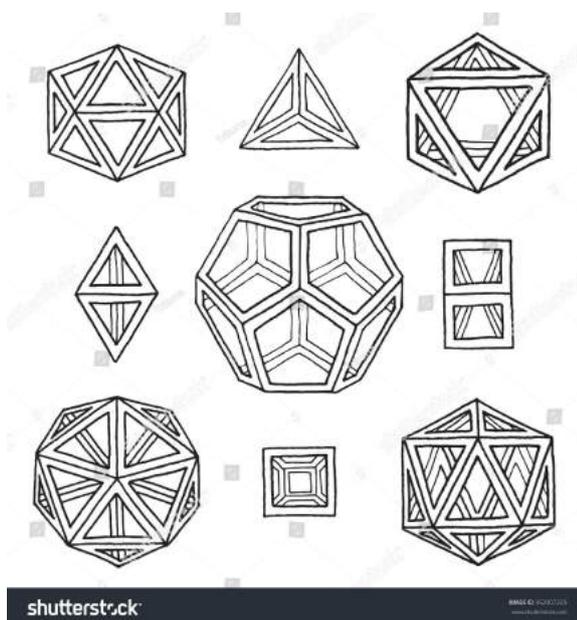
On note  $p$  le nombre de sommets sur chaque face et  $q$  le nombre de faces se rencontrant en chaque sommet. En observant que

$$pF = 2A = qS$$

et en utilisant la formule d'Euler ci-dessus, on montre qu'il y a exactement cinq polyèdres convexes réguliers (les solides de Platon) :

1. le tétraèdre vérifie  $S = 4, A = 6, F = 4$  et  $p = q = 3$  ;
2. le cube (hexaèdre) vérifie  $S = 8, A = 12, F = 6$  et  $p = 4, q = 3$  ;
3. l'octaèdre vérifie  $S = 6, A = 12, F = 8$  et  $p = 3, q = 4$  ;
4. le dodécaèdre (régulier) vérifie  $S = 20, A = 30, F = 12, p = 5, q = 3$  ;
5. l'icosaèdre vérifie  $S = 12, A = 30, F = 20$  et  $p = 3, q = 5$ .

En voici une représentation historique :





*Cette figure vous rappelle-t-elle quelque chose ?*

**Exemple 2.7.6.** *Un ballon de football est une approximation de la sphère constituée d'un certain nombre de pentagones et d'hexagones. On note  $P$  le nombre de pentagones,  $H$  le nombre d'hexagones, et  $S, A, F$  les caractéristiques de la décomposition cellulaire qu'ils définissent. Nous allons montrer que le nombre  $P$  de pentagones est nécessairement égal à 12.*

*Un pentagone compte 5 arêtes, un hexagone en compte 6. Comme chaque arête délimite deux faces, on en déduit que le nombre total d'arêtes  $A$  vérifie*

$$A = \frac{5P + 6H}{2}.$$

*De façon similaire, un pentagone compte 5 sommets, un hexagone en compte 6. Dans une décomposition cellulaire, trois arêtes partent de chaque sommet, on en déduit que le nombre total de sommets  $S$  vérifie*

$$S = \frac{5P + 6H}{3}.$$

*Nous expliquons ci-après que la « caractéristique d'Euler-Poincaré » de la sphère est égale à 2. On obtient ainsi*

$$2 = F - A + S = (P + H) - \frac{5P + 6H}{2} + \frac{5P + 6H}{3} = \frac{P}{6}.$$

*Il y a donc nécessairement 12 pentagones.*

*Le ballon de football « classique » est un icosaèdre tronqué dans lequel on a placé un pentagone régulier aux 12 sommets de l'icosaèdre, obtenant ainsi  $P = 12$  et  $H = 20$ .*

### 2.7.3 Caractéristique d'Euler

**Définition 2.7.7.** Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface. On appelle décomposition cellulaire (lisse) de  $S$  la donnée d'une famille finie d'arcs lisses  $\gamma_i$  tracés sur  $S$  (appelés arêtes) tels que

1. deux arêtes sont disjointes ou partagent une extrémité ;
2. pour chaque composante connexe  $\Omega$  de  $S \setminus \cup \gamma_i$ , il existe un difféomorphisme  $\Phi$  d'un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  sur un voisinage de  $\Omega$  tel que  $\Phi^{-1}(\Omega)$  soit un polygone convexe ;
3. si  $S$  a un bord, alors une face a au plus une arête dans le bord de  $S$ .

On appelle *sommet* les extrémités des arêtes et *faces* les composantes connexes du complémentaire de la réunion des arêtes. Lorsque toutes les faces sont des triangles, on parle de *triangulation* (lisse).

On note  $S$  le nombre de sommets,  $A$  le nombre d'arêtes et  $F$  le nombre de faces d'une telle décomposition cellulaire  $\mathcal{C}$ , et on définit la caractéristique d'Euler-Poincaré<sup>12</sup> de  $\mathcal{C}$  :

$$\chi(\mathcal{C}) := S - A + F.$$

**Exemple 2.7.8.** Considérons un disque plan  $S \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ .

1) Une première décomposition cellulaire  $\mathcal{C}_1$  consiste à découper le disque en deux (par un diamètre). On obtient alors

- deux sommets (les extrémités du diamètre),  $S = 2$  ;
- trois arêtes (le diamètre et les deux demi-cercles),  $A = 3$  ;
- et deux faces (les deux moitiés du disque),  $F = 2$ .

Il vient ainsi  $\chi(\mathcal{C}_1) = 2 - 3 + 2 = 1$ .

2) Une seconde décomposition cellulaire  $\mathcal{C}_2$  consiste à découper le disque en quatre (par deux diamètres). On obtient alors

- cinq sommets (les extrémités des diamètres, mais également leur intersection),  $S = 5$  ;
- huit arêtes (les quatre demi-diamètres et les quatre quarts de cercles),  $A = 8$  ;
- et quatre faces (les quatre quarts du disque),  $F = 4$ .

Il vient ainsi  $\chi(\mathcal{C}_2) = 5 - 8 + 4 = 1$ .

3) On pourrait aussi considérer la décomposition cellulaire la plus simple  $\mathcal{C}_3$ , à un sommet, une arête et une face qui donne encore  $\chi(\mathcal{C}_3) = 1$  !

On admettra le résultat important suivant :

**Théorème 2.7.9.** Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface compacte. Elle admet des décompositions cellulaires. Celles-ci ont toutes la même caractéristique d'Euler-Poincaré, notée  $\chi(S)$  et appelée caractéristique d'Euler-Poincaré de  $S$ .

12. Henri Poincaré, mathématicien, physicien, philosophe et ingénieur français (1854-1912). Fondateur de l'étude qualitative des systèmes d'équations différentielles et de la théorie du chaos ; il est considéré comme l'un des derniers grands savants universels.

**Exemple 2.7.10.** La décomposition cellulaire la plus simple  $C_1$  de la sphère  $S^2$  consiste à la découper le long d'un grand cercle. Il faut bien garder en tête que le cercle est constitué d'un sommet et d'une arête, et remarquer qu'il y a deux faces (les deux calottes sphériques) pour obtenir

$$\chi(C_1) = 1 - 1 + 2 = 2.$$

Si on découpe la sphère en quatre morceaux à l'aide de deux grands cercles, on obtient une décomposition cellulaire  $C_2$  telle que que  $S = 2, A = 4$  et  $F = 4$ , d'où

$$\chi(C_2) = \chi(C_1) = \chi(S^2) = 2.$$

**Exemple 2.7.11.** Vous vérifierez qu'un tore de révolution a une caractéristique d'Euler-Poincaré nulle, tandis qu'un tore à 2 trous a une caractéristique d'Euler-Poincaré égale à  $-2$ .

### Somme connexe

La somme connexe  $S_1 \# S_2$  de deux surfaces est obtenue en enlevant un disque à chacune des surfaces et en les recollant le long du bord des disques enlevés.

**Proposition 2.7.12.** La caractéristique d'Euler de  $S_1 \# S_2$  est

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

Nous laissons le lecteur démontrer ce fait.

Remarquez que la sphère  $S^2$  est un élément neutre pour cette opération. En effet, si on enlève un disque à la sphère  $S^2$ , on obtient un disque qui va simplement remplacer celui qu'on a enlevé à la deuxième surface.

La somme connexe d'une surface  $S$  et d'un tore, revient à attacher un anneau à  $S$ . On appelle tore à  $g$  trous la somme connexe de  $g$  copies d'un tore. Lorsque  $g = 3$ , on parle également de Bretzel :



### 2.7.4 Gauss-Bonnet intrinsèque

**Théorème 2.7.13.** *Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface régulière compacte. Alors*

$$\int_S K d\sigma_S = 2\pi\chi(S).$$

Comme la sphère est la seule surface compacte de  $\mathbb{R}^3$  dont la caractéristique d'Euler est positive, une conséquence immédiate du théorème de Gauss-Bonnet est le corollaire suivant.

**Corollaire 2.7.14.** *Une surface compacte de courbure positive est homéomorphe à une sphère.*

Nous énonçons sans la démontrer la proposition suivante :

**Proposition 2.7.15.** *Soit  $T = (ABC)$  un triangle géodésique dans une surface  $S$  et  $\alpha, \beta, \gamma$  les angles intérieurs associés. On a*

$$\int_T K = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Il résulte de cette observation que la somme des angles dans un triangle géodésique est

1. égale à  $\pi$  si la courbure est nulle (géométrie euclidienne) ;
2. plus grande que  $\pi$  si la courbure est positive (géométrie sphérique) ;
3. plus petite que  $\pi$  si la courbure est négative (géométrie hyperbolique).

Nous renvoyons le lecteur curieux au chapitre 4 du livre de M. Audin pour des preuves élémentaires de certaines des propriétés évoquées dans cette dernière section. Pour une démonstration enrichie du théorème de Gauss-Bonnet, nous recommandons le chapitre 8 du livre de J. Lafontaine.

## 2.8 Exercices

### Premiers exemples

**Exercice 30.** On pose  $U = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / 0 < a < \pi, 0 < b < 2\pi\}$  et

$$\varphi : (a, b) \in U \mapsto (\sin a \cos b, \sin a \sin b, \cos a) \in \mathbb{R}^3.$$

1) Montrer que  $(\varphi, U)$  est une paramétrisation régulière d'une partie de la sphère unité  $S^2$ . Laquelle ?

2) Donner une deuxième application  $(\psi, V)$  de sorte que la réunion de ces deux nappes recouvre complètement  $S^2$ .

3) Est-il possible de couvrir la sphère unité à l'aide d'une seule nappe ?

**Exercice 31.** Démontrer qu'une quadrique de  $\mathbb{R}^3$ , c'est-à-dire le lieu d'annulation d'un polynôme de degré deux en trois variables réelles, est conjuguée par une isométrie de  $\mathbb{R}^3$  à l'une des formes indiquées dans la section 2.1.2.

**Exercice 32** (Conoïde de Plücker).

1) Pour quelles valeurs de  $(x, y)$  l'équation

$$z(x^2 + y^2) = xy$$

définit-elle une surface régulière ?

2) Dessiner cette surface. Montrer que c'est une surface réglée.

**Exercice 33.** Soit  $0 < r < R$ . On considère le tore  $\mathcal{T}$  de révolution donné par la paramétrisation

$$\varphi : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto ((r \cos u + R) \cos v, (r \cos u + R) \sin v, r \sin u) \in \mathbb{R}^3.$$

On considère la courbe gauche tracée sur  $\mathcal{T}$ ,

$$\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(at, bt) \in \mathcal{T}.$$

1) Montrer que  $\Gamma = \gamma(\mathbb{R})$  est fermée ssi  $b/a$  ou  $a/b$  est rationnel.

2) Montrer que  $\Gamma$  est dense dans  $\mathcal{T}$  ssi  $b/a$  est irrationnel.

### Espaces tangents

**Exercice 34** (Parapluie de Whitney). On considère la surface paramétrée par

$$\varphi : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (uv, v, u^2) \in \mathbb{R}^3.$$

1) Montrer que la demi-droite  $(x = y = 0, z > 0)$  est une ligne de points doubles et que l'origine est un point singulier.

2) Montrer que pour  $v \neq 0$ , le vecteur

$$N(u, v) = (-2u/v, 2u^2/v, 1)$$

est normal à la surface et n'admet pas de limite quand  $(u, v)$  tend vers  $(0, 0)$ .

**Exercice 35.** On considère une fonction lisse  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et la surface régulière

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2 / z = xf(y/x)\}.$$

Montrer que tous les plans tangents à  $S$  contiennent l'origine  $(0, 0, 0)$ .

**Exercice 36.** Soit  $S_1$  et  $S_2$  deux surfaces régulières de  $\mathbb{R}^3$  qui s'intersectent en un point  $p$ . On suppose que les plans tangents  $T_p S_1$  et  $T_p S_2$  sont distincts. Montrer qu'au voisinage de  $p$ , l'intersection  $S_1 \cap S_2$  est une courbe dont la tangente en  $p$  est l'intersection  $T_p S_1 \cap T_p S_2$  des deux plans tangents.

**Exercice 37.** Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface régulière. Montrer que si toutes les droites normales à  $S$  sont concourantes, alors  $S$  est une portion de sphère.

**Exercice 38.** Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface régulière et  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse définie dans  $\mathbb{R}^3$ . Montrer que la différentielle de la restriction  $f$  de  $F$  à  $S$  est la restriction de  $DF$  à l'espace tangent à  $S$ . Autrement dit,  $\forall p \in S$ ,

$$Df_p = D(F|_S)_p = (DF_p)|_{T_p(S)}.$$

### Première forme fondamentale, orientabilité

**Exercice 39.** Expliciter les coefficients de la première forme fondamentale du cylindre  $C$ , de la caténoïde  $\mathcal{C}$  et de l'hélicoïde  $H$  définis par les paramétrisations suivantes :

$$C = \{(R \cos \theta, R \sin \theta, s) \in \mathbb{R}^3 / (\theta, s) \in \mathbb{R}^2\};$$

$$\mathcal{C} := \{(\operatorname{Ch} u \cos v, \operatorname{Ch} u \sin v, u) \in \mathbb{R}^3 / (u, v) \in \mathbb{R}^2\};$$

$$H := \{(u \cos v, u \sin v, v) \in \mathbb{R}^3 / (u, v) \in \mathbb{R}^2\}.$$

**Exercice 40.** Soit  $N : S \rightarrow S^2$  l'application de Gauss d'une surface régulière  $S \subset \mathbb{R}^3$ . Décrire l'image  $N(S)$  dans les cas suivants :

- 1)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x/a)^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ ,  $a > 0$  ;
- 2)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\}$  ;
- 3)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = x^2 + y^2\}$  ;
- 4)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$  ;
- 5)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = (\operatorname{Ch} z)^2\}$ .

**Exercice 41.** Soit  $S$  une surface de révolution obtenue en faisant tourner une courbe  $\mathcal{C}$  autour de l'axe  $(Oz)$ . On peut la paramétrer par

$$(s, \theta) \mapsto (f(s) \cos \theta, f(s) \sin \theta, h(s)).$$

On suppose que  $\mathcal{C}$  est paramétrée par la longueur d'arc.

- 1) Montrer que les coefficients de la première forme fondamentale sont

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = G(s).$$

2) Montrer que l'aire de  $S$  est  $\operatorname{Aire}(S) = 2\pi \int_0^L |f(s)| ds$ , où  $L$  désigne la longueur de  $\mathcal{C}$ . En déduire que l'aire de la sphère unité  $S^2$  est  $\operatorname{Aire}(S^2) = 4\pi$  et retrouver l'aire du tore de révolution.

**Exercice 42** (Surfaces tubulaires). Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  la paramétrisation par longueur d'arc d'une courbe gauche dont la courbure ne s'annule nulle part. Soit  $(T, N, B)$  le repère de Frenet et

$$\varphi : (s, \theta) \in I \times \mathbb{R} \mapsto \alpha(s) + \varepsilon[\cos \theta N(s) + \sin \theta B(s)]$$

où  $\varepsilon > 0$  est une constante positive.

- 1) Montrer que le vecteur normal à la surface tubulaire est

$$\mathcal{N}(s, \theta) = -[\cos \theta N(s) + \sin \theta B(s)]$$

et en déduire que la surface tubulaire  $S_\varepsilon = \varphi((0, \ell(\Gamma)) \times (0, 2\pi))$  est régulière si  $\varepsilon > 0$  est assez petit.

- 2) Calculer l'aire de la surface  $S_\varepsilon$ .

**Exercice 43.** Soit  $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$  deux surfaces régulières et  $f : S_1 \rightarrow S_2$  une application surjective différentiable qui est un difféomorphisme local en tout point.

Montrer que  $S_2$  est orientable si  $S_1$  l'est. En déduire que l'orientabilité est préservée par les difféomorphismes.

**Exercice 44.**

- 1) Montrer que le ruban de Möbius n'est pas une surface orientable.
- 2) Montrer que si une surface  $S$  a un ouvert difféomorphe au ruban de Möbius, alors  $S$  n'est pas orientable.

### Deuxième forme fondamentale

**Exercice 45.** Soit  $N : S \rightarrow S^2$  l'application de Gauss d'une surface régulière  $S \subset \mathbb{R}^3$ . Soit  $\alpha : I \rightarrow S$  une courbe paramétrée régulière qui ne contient aucun point planaire, ni aucun point parabolique. Montrer que

$$N \circ \alpha : I \rightarrow S^2$$

définit une courbe régulière de la sphère unité  $S^2$ .

**Exercice 46.** Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface paramétrée.

1) Montrer que si l'opérateur  $F_p$  est nul pour tout  $p$  dans  $S$ , alors  $S$  est incluse dans un plan.

2) Montrer que si  $S \subset \mathbb{R}^3$  est une sphère alors  $F_p$  est une homothétie dont on calculera le rapport. Que pensez-vous de la réciproque ?

**Exercice 47.** Soit  $t \in I \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^3$  une courbe  $\Gamma$  paramétrée. On considère le cône  $C$  de sommet  $O \notin P$  s'appuyant sur  $\Gamma$ . En choisissant  $O$  comme origine dans  $\mathbb{R}^3$ , on peut paramétrer  $C$  par

$$(s, t) \in \mathbb{R} \times I \mapsto \varphi(s, t) = s\gamma(t) \in \mathbb{R}^3.$$

Montrer que le vecteur normal est indépendant de  $s$ . Quelle est la courbure de Gauss en un point  $\varphi(s, t)$  du cône, avec  $s \neq 0$  ?

**Exercice 48.** Soit  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = h(x, y)\}$  le graphe d'une fonction lisse. Montrer que la courbure de Gauss est donnée par la formule

$$K = \frac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{[1 + h_x^2 + h_y^2]^2}.$$

**Exercice 49.** Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface régulière et  $p \in S$  avec  $K(p) \neq 0$ . En utilisant le fait que la courbure de Gauss est le jacobien de l'application de Gauss, montrer que

$$K(p) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A}$$

où  $A$  est l'aire d'une région  $B \subset S$  contenant  $p$ , et  $A'$  est l'aire de l'image de  $A$  par l'application de Gauss (avec des restrictions naturelles sur la façon de prendre la limite).

**Exercice 50.** Soit  $a, b, c > 0$ . On considère l'ellipsoïde

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

1) Pour  $p \in E$ , on note  $d$  la distance de 0 au plan tangent  $T_p(E)$ . Montrer que la courbure de Gauss de  $E$  au point  $p$  est donnée par

$$K(p) = \frac{d^4}{a^2 b^2 c^2}.$$

2) Montrer que l'ellipsoïde et la sphère unité sont difféomorphes mais pas isométriques si  $(a, b, c) \neq (1, 1, 1)$ .

**Exercice 51.** Montrer qu'un tore de révolution n'a aucun ombilic (points en lesquels les courbures principales coïncident).

**Exercice 52.** Soit  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  une nappe régulière dont tous les points sont des ombilics.

1) Montrer qu'il existe  $k \in \mathbb{R}$  et  $v \in \mathbb{R}^3$  tels que  $N = -k\varphi + v$ .

2) Montrer que  $\varphi(U)$  est un (morceau de) plan si  $k = 0$ , et que c'est une (partie d'une) sphère centrée en  $v/k$  si  $k \neq 0$ .

**Exercice 53.**

1) Calculer la courbure de la surface de révolution  $S$  paramétrée par

$$\varphi : (t, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mapsto (t \sin \theta, t \cos \theta, \log t) \in \mathbb{R}^3.$$

2) On considère l'hélicoïde  $H$  paramétré par

$$\psi : (t, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (t \cos \theta, t \sin \theta, \theta) \in \mathbb{R}^3.$$

Montrer que sa courbure est la même que celle de  $S$ .

3) Montrer que  $S$  et  $H$  ne sont pas localement isométriques.

**Exercice 54.** Soit  $a > 0$ . Montrer que la caténoïde

$$\varphi : (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (a \operatorname{Ch} s \cos t, a \operatorname{Ch} s \sin t, as) \in \mathbb{R}^3$$

est une surface minimale.

**Exercice 55.** Soit  $a > 0$ . Montrer que l'hélicoïde

$$\varphi : (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (a \operatorname{Sh} s \cos t, a \operatorname{Sh} s \sin t, at) \in \mathbb{R}^3$$

est une surface minimale.

**Exercice 56.** On souhaite montrer que la surface d'Enneper

$$\varphi : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left( u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right) \in \mathbb{R}^3$$

est une surface minimale.

1) Calculer les coefficients de la première forme fondamentale.

2) Calculer les coefficients de la seconde forme fondamentale et les courbures principales pour conclure.

### Distance intrinsèque et géodésiques

**Exercice 57.** Soit  $N$  le vecteur normal à une surface régulière  $S \subset \mathbb{R}^3$ . Soit  $\gamma : I \rightarrow S$  une courbe tracée sur  $S$  à vitesse constante. Montrer que  $\gamma$  est une géodésique si et seulement si  $\det(N, \gamma', \gamma'') \equiv 0$ .

**Exercice 58.** Soit  $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto (t^2, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$  une courbe tracée sur la surface plane  $S = \{(x, y, z) \mid z = 0\}$ . Est-ce une géodésique ?

**Exercice 59.** Calculer les géodésiques de la sphère unité.

**Exercice 60.** On note  $\|p - q\|$  la distance euclidienne dans  $\mathbb{R}^3$ . Montrer que la distance intrinsèque de la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$  est donnée par

$$d_{S^2}(p, q) = 2 \arcsin \frac{\|p - q\|}{2} = \arccos \langle p, q \rangle,$$

où  $\langle p, q \rangle$  désigne le produit scalaire euclidien.

**Exercice 61.** Soit  $f : (S^2, d_{S^2}) \rightarrow (S^2, d_{S^2})$  une isométrie de la sphère unité munie de sa distance intrinsèque. Montrer que  $f$  est la restriction d'une isométrie euclidienne de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 62.**

- 1) Calculer les géodésiques d'un cylindre droit.
- 2) Vérifier que deux points d'une génératrice sont joints par une hélice et que celle-ci est une géodésique qui ne minimise pas la distance.

**Exercice 63.** Soit  $S$  une surface de révolution,

$$\varphi : (s, \theta) \mapsto (f(s) \cos \theta, f(s) \sin \theta, h(s))$$

avec  $(f')^2 + (h')^2 \neq 0$  et  $f > 0$ , de sorte que  $S$  est régulière. Soit  $\gamma : t \mapsto \varphi(s(t), \theta(t))$  une géodésique de  $S$ . Montrer la relation de Clairaut :

$$f^2(s(t))\theta'(t) \equiv \text{constante.}$$

**Exercice 64.** Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface régulière définie localement par une paramétrisation  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ . On note  $n$  son vecteur normal unitaire.

Soit  $\gamma : I \rightarrow S$  une courbe paramétrée à vitesse unité, tracée sur  $S$ . Le vecteur  $t = \gamma'$  est donc un vecteur unitaire tangent à  $\gamma$  et à  $S$ . On note  $g = n \wedge t$  : c'est un vecteur tangent à  $S$  qui constitue avec  $t$  une base de l'espace tangent à  $S$  en  $p = \gamma(s)$ .

Les vecteurs  $(t, g, n)$  constituent une base directe de  $\mathbb{R}^3$ , le repère correspondant (avec origine le point  $p = \gamma(s)$ ) s'appelle le repère de Darboux.

- 1) Montrer qu'il existe des coefficients  $\gamma_n$  (courbure normale),  $\gamma_g$  (courbure géodésique) et  $\tau_g$  (torsion géodésique) tels que

$$\begin{pmatrix} t' \\ g' \\ n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_g & \gamma_n \\ -\gamma_g & 0 & -\tau_g \\ -\gamma_n & \tau_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ g \\ n \end{pmatrix}.$$

- 2) Montrer que  $\gamma$  est une géodésique de  $S$  si et seulement si sa torsion (en tant que courbe gauche) est égale à sa torsion géodésique.



## Chapitre 3

# Variétés

Ce dernier chapitre est consacré à la généralisation des courbes et des surfaces en dimension supérieure : les variétés.

Nous commençons par quelques rappels et compléments de calcul différentiel, en décrivant notamment l'allure locale des immersions, des submersions, et des hypersurfaces près d'une singularité non dégénérée.

Nous étudions ensuite les sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$ , leurs espaces tangents, et introduisons quelques propriétés fondamentales des applications différentielles entre sous-variétés (plongements, difféomorphismes).

Après quelques rappels d'algèbre multilinéaire, nous définissons les formes différentielles et construisons la différentielle extérieure. Nous définissons l'intégrale d'une forme volume sur une variété orientée, abordons la notion de changement de variables et établissons la formule de Stokes.

Nous introduisons ensuite la notion de variété abstraite et de structure différentiable. Une variété abstraite est, à une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$ , ce qu'un espace vectoriel abstrait est à un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  : ce sont les mêmes objets via un théorème de plongement de Whitney, mais avec un point de vue plus intrinsèque qui s'avère très utile.

Nous passons en revue de nombreux exemples de variétés, orientables ou non (sphères, tores, espaces projectifs, bouteille de Klein), ainsi que les premiers exemples de variétés complexes (surfaces de Riemann).

Les groupes de Lie sont une source d'exemples particulièrement intéressants pour la géométrie différentielle. Nous donnons des informations parcelaires sur les groupes les plus classiques (groupes linéaire et orthogonal).

Afin de vous inciter à compléter vos lectures en lien avec la recherche récente, nous indiquons (sans démonstration) quelques éléments de la classification des variétés de basse dimension, à difféomorphisme près.

Ce chapitre est plus difficile que les précédents. Il s'agit d'un premier contact avec des notions fondamentales que vous aborderez plus en profondeur dans un deuxième temps. Les exercices doivent vous aider à vous familiariser avec ce formalisme qui va s'avérer extrêmement puissant.

## 3.1 Plongements

### 3.1.1 Rappels de calcul différentiel

On ne peut pas faire de géométrie différentielle sans une maîtrise minimale du calcul différentiel. Nous avons déjà fait appel dans les deux premiers chapitres au théorème d'inversion locale et au théorème des fonctions implicites, deux outils fondamentaux dont nous allons rappeler les énoncés précis.

#### Applications différentiables

Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert. Voici quelques propriétés de base que nous utilisons dans ce texte :

- une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est *différentiable* en  $a \in U$  s'il existe une forme linéaire  $\ell : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(a+h) = f(a) + \ell(h) + o(h)$ ;
- on note  $D_a f := \ell$  la différentielle de  $f$  au point  $a$  et  $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \rightarrow \mathbb{R}$  les dérivées partielles de  $f$  définies par  $D_a f(h) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ;
- une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est *différentiable* (dans  $U$ ) si elle est différentiable en tout point  $a \in U$  ; elle est de classe  $\mathcal{C}^1$  si toutes ses dérivées partielles sont continues ;
- par récurrence : une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  si elle est différentiable, et si toutes ses dérivées partielles sont de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$  ;
- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est *lisse* (ou  $\mathcal{C}^\infty$ ) si elle est de classe  $\mathcal{C}^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  ;
- une application  $F : x \in U \rightarrow (f_1(x), \dots, f_p(x)) \in \mathbb{R}^p$  est différentiable (resp.  $\mathcal{C}^k$ , ou lisse) si et seulement si chacune de ses fonctions coordonnées  $f_1, \dots, f_p$  est différentiable (resp.  $\mathcal{C}^k$ , ou lisse).

Toutes les applications  $f$  que nous considérons dans ce texte sont lisses.

#### Difféomorphismes

**Définition 3.1.1.** Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  et  $V \subset \mathbb{R}^p$  des ouverts. Une application  $f : U \rightarrow V$  lisse est un *difféomorphisme* si elle est bijective, et si son application inverse  $f^{-1} : V \rightarrow U$  est également lisse.

On dit dans ce cas que les ouverts  $U$  et  $V$  sont *difféomorphes*. La définition nécessite que les différentielles  $D_a f$  soient des isomorphismes.

#### Exemples 3.1.2.

1) Tout intervalle ouvert est *difféomorphe* à  $\mathbb{R}$  : les intervalles bornés  $]a, b[$  sont *difféomorphes* entre eux via un *difféomorphisme affine* ; la fonction  $\tan$  réalise un *difféomorphisme* de  $] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$  sur  $\mathbb{R}$ .

2) L'application  $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = x^3 \in \mathbb{R}$  est lisse et bijective, mais ce n'est pas un *difféomorphisme* : sa différentielle en 0 est nulle (non inversible), et son application inverse  $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$  n'est pas différentiable en zéro.

3) L'application  $x \in B^n \mapsto \frac{x}{1-\|x\|^2} \in \mathbb{R}^n$  réalise un *difféomorphisme* de la boule unité  $B^n$  de  $\mathbb{R}^n$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

### Théorème d'inversion locale

**Théorème 3.1.3.** *Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  une application lisse. On suppose que  $D_a f$  est inversible en un point  $a \in U$ . Alors il existe  $V \subset U$  un petit voisinage de  $a$  dans  $U$  tel que la restriction de  $f$  à  $V$  réalise un difféomorphisme de  $V$  sur  $f(V)$ .*

La preuve repose sur le théorème du point fixe, nous renvoyons le lecteur à [Rouvière]. Attention, l'énoncé ne permet pas de conclure que  $f$  réalise un difféomorphisme global de  $U$  sur  $f(U)$ , c'est d'ailleurs faux en général : l'exponentielle complexe  $\exp : z \in \mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2 \mapsto e^z \in \mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$  est un difféomorphisme local en tout point  $z \in \mathbb{C}$ , mais elle n'est pas injective et ne peut donc pas être globalement inversible sur  $\mathbb{C}$ .

Voici un critère simple qui permet de montrer que certaines applications sont en fait des difféomorphismes globaux :

**Proposition 3.1.4.** *Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application lisse. Si  $f$  est injective et si  $D_a f$  est inversible en tout point  $a \in U$ , alors  $f(U)$  est ouvert et  $f : U \rightarrow f(U)$  est un difféomorphisme.*

*Démonstration.* Il résulte du théorème d'inversion locale que l'application  $f$  réalise un difféomorphisme au voisinage de chaque point  $a \in U$ , on en déduit que  $f(U)$  est ouvert.

Comme  $f : \Omega \rightarrow f(\Omega)$  est bijective, l'application réciproque  $f^{-1} : f(\Omega) \rightarrow \Omega$  est globalement bien définie et coïncide avec les inverses locaux de  $f$ . On en déduit que  $f^{-1}$  est lisse.  $\square$

### Théorème des fonctions implicites

**Théorème 3.1.5.** *Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  et  $V \subset \mathbb{R}^p$  des ouverts, et  $f = (g, h) : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^p$  une application lisse. Soit  $a = (b, c) \in U \times V$  tel que  $f(a) = 0$ . On suppose que  $D_a h : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  est inversible au point  $a \in U$ . Alors il existe des ouverts  $U' \subset U, V' \subset V$  contenant  $b, c$  et une application lisse  $\tau : U' \rightarrow \mathbb{R}^n$  tels que*

$$f(x, y) = 0 \iff y = \tau(x)$$

pour tout  $(x, y) \in U' \times V'$ .

*Démonstration.* La preuve résulte assez simplement du théorème d'inversion locale. Par hypothèse, l'application lisse  $\phi(x, y) = (x, f(x, y))$  a une différentielle inversible au point  $a$ , elle induit donc un difféomorphisme local au voisinage de  $a$ . On note  $\phi^{-1}(x, y) = (x, \alpha(x, y))$  l'inverse local. On observe alors que

$$f(x, y) = 0 \iff \phi(x, y) = (x, 0) \iff (x, y) = \phi^{-1}(x, 0) \iff y = \tau(x)$$

avec  $\tau(x) = \alpha(x, 0)$ . Nous renvoyons le lecteur à [Rouvière] pour plus de détails.  $\square$

### 3.1.2 Immersions et submersions

#### Immersion

**Définition 3.1.6.** Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert. Une application lisse  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  est une immersion si sa différentielle est injective en tout point.

Notez que cela nécessite  $n \leq p$ .

**Théorème 3.1.7** (Allure locale d'une immersion). Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert tel que  $0 \in U$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  une immersion. Alors il existe  $U' \subset U$  un voisinage de  $0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $V$  un voisinage ouvert de  $f(0)$ ,  $W \subset \mathbb{R}^p$  un voisinage ouvert de  $0 \in \mathbb{R}^p$  et  $\phi : W \rightarrow V$  un difféomorphisme tel que, pour tout  $x \in U'$ ,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \phi(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0).$$

Autrement dit, le modèle local d'une immersion est l'application d'inclusion  $\pi : x \in \mathbb{R}^n \mapsto (x, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^p$  où  $n \leq p$ .

*Démonstration.* On note  $f = (f_1, \dots, f_p)$  les coordonnées de  $f$ . Quitte à permuter celles-ci, on peut supposer que la matrice

$$A = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0) \right]_{1 \leq i, j \leq n}$$

est inversible. On note  $(x_1, \dots, x_n, y_{n+1}, \dots, y_p)$  des coordonnées dans  $\mathbb{R}^p$  et on considère

$$\phi(x, y) = (f_1(x), \dots, f_n(x), y_{n+1} + f_{n+1}(x), \dots, y_p + f_p(x)).$$

La différentielle de  $\phi$  à l'origine est une matrice blocs du type

$$D_{(0,0)}\phi = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & \text{Id} \end{bmatrix},$$

elle est donc inversible. Il résulte du théorème d'inversion locale que  $\phi$  est un difféomorphisme local au voisinage de l'origine tel que  $\phi(x, 0) = f(x)$ .  $\square$

#### Submersions

**Définition 3.1.8.** Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert. Une application lisse  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  est une submersion si sa différentielle est surjective en tout point.

Notez que cela nécessite  $n \geq p$ .

**Théorème 3.1.9** (Allure locale d'une submersion). Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert tel que  $0 \in U$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  une submersion. Alors il existe  $U' \subset U$  un voisinage de  $0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $W \subset \mathbb{R}^n$  un voisinage ouvert de  $0$  et  $\phi : W \rightarrow U'$  un difféomorphisme tel que  $\phi(0) = 0$  et pour tout  $x \in W$

$$f \circ \phi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_p).$$

Autrement dit, le modèle local d'une submersion est l'application de projection  $\pi : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$  où  $n \geq p$ .

*Démonstration.* Par hypothèse,  $D_0f$  est surjective donc  $n \geq p$ . On note  $f = (f_1, \dots, f_p)$  les coordonnées de  $f$ . Quitte à permuter les coordonnées  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , on peut supposer que la matrice

$$A = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0) \right]_{1 \leq i, j \leq p}$$

est inversible. On considère

$$\psi(x, y) = (f_1(x), \dots, f_p(x), x_{p+1}, \dots, x_n).$$

La différentielle de  $\psi$  à l'origine est une matrice blocs du type

$$D_0\psi = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & \text{Id} \end{bmatrix},$$

elle est donc inversible. Il résulte du théorème d'inversion locale que  $\psi$  est un difféomorphisme local au voisinage de l'origine. On note  $\phi = \psi^{-1}$  son inverse et on observe que  $f \circ \phi(x) = (x_1, \dots, x_p)$ .  $\square$

Une application qui est à la fois une immersion et une submersion est un difféomorphisme local. Nous avons indiqué plus haut un critère qui permet de vérifier si l'application est un difféomorphisme global. Le même type de préoccupation conduit à la notion importante de plongement.

### Plongement

**Définition 3.1.10.** Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert. Une application lisse  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  est un plongement si

- $f$  est une immersion ;
- $f$  induit un homéomorphisme de  $U$  sur  $f(U)$ .

Attention, il ne suffit pas que  $f$  soit injective pour que  $f$  induise un homéomorphisme de  $U$  sur  $f(U)$  : il faut également s'assurer que  $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$  est continue, ce qui n'est pas automatique. Vous vérifierez par exemple que

$$f : t \in ]-1, +\infty[ \mapsto (t^2 - 1, t(t^2 - 1)) \in \mathbb{R}^2$$

est une immersion injective qui n'est pas un plongement.

Un critère simple pour assurer la continuité de  $f^{-1}$  est de demander que  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  soit *propre* (l'image réciproque d'un compact est un compact). Attention, l'application

$$g : t \in \mathbb{R} \mapsto (t^2, t^3) \in \mathbb{R}^2$$

est injective et propre, mais n'est pas un plongement car  $D_0g$  s'annule (vous reconnaissez la cubique cuspidale rencontrée au chapitre 1).

### 3.1.3 Lemme de Morse

Soit  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une application lisse. L'ensemble

$$H_F = \{x \in \mathbb{R}^n, F(x) = 0\}$$

est une *hypersurface*, i.e. un objet de dimension  $n - 1$  ou de codimension 1, comme les hyperplans sont des sous-espaces vectoriels de codimension 1. La terminologie généralise également le cas  $n = 3$  qui correspond au cas des surfaces plongées dans  $\mathbb{R}^3$ , étudiées au chapitre 2.

On suppose que  $F(0) = 0$  et on souhaite étudier le comportement de l'hypersurface  $H_F$  au voisinage de l'origine. Si  $D_0F$  est surjective, alors  $F$  est une submersion au voisinage de l'origine, et  $H_F$  est une hypersurface régulière que nous allons étudier dans la suite de ce chapitre (on parlera de sous-variété).

Si  $D_0F$  n'est pas surjective, c'est qu'elle est nulle : l'origine est alors un point critique et il faut pousser le développement de Taylor un cran plus loin. La Hessienne  $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right)$  contient l'information à l'ordre 2, on la suppose non dégénérée (i.e. de rang  $n$ ) :

**Lemme 3.1.11.** *Soit  $(p, q)$  la signature de la forme quadratique définie par la Hessienne  $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right)$ . Si  $p + q = n$ , alors il existe un difféomorphisme  $\phi : U \rightarrow V$  entre deux voisinages de l'origine tel que  $\phi(0) = 0$  et*

$$F \circ \phi(y) = \sum_{i=1}^p y_i^2 - \sum_{i=p+1}^n y_i^2$$

pour tout  $y \in U$ .

Autrement dit, quitte à composer par un difféomorphisme local, l'hypersurface  $H_F$  se comporte au voisinage de 0 comme

$$\left\{ y \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^p y_i^2 - \sum_{i=p+1}^n y_i^2 = 0 \right\},$$

qui est une *hyperquadrique*.

Une fonction dont tous les points critiques sont non dégénérés est appelée fonction de Morse<sup>1</sup>. La théorie de Morse relie l'étude de la topologie d'une variété à celle des points critiques de ses fonctions de Morse. Nous renvoyons le lecteur curieux au très beau livre de John Milnor [Milnor] sur ce sujet.

---

1. Harold Calvin Marston Morse, mathématicien américain (1892-1977), spécialiste de calcul des variations et de topologie différentielle.

*Démonstration.* Comme  $F$  s'annule en 0, on obtient

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{d}{dt} F(tx) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(tx) dt = \sum_{i=1}^n x_i f_i(x)$$

avec  $f_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x_i}(tx) dt$ . Comme  $f_i(0) = 0$ , on peut à nouveau décomposer

$$f_i(x) = \int_0^1 \frac{d}{ds} f_i(sx) ds = \int_0^1 \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(sx) ds = \sum_{j=1}^n x_j h_{ij}(x)$$

avec

$$h_{ij}(x) = \int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(sx) ds = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(stx) t ds dt = h_{ji}(x).$$

Ainsi,  $F(x) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j h_{ij}(x)$  avec  $h_{ij}(0) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(0)$ .

On peut effectuer un changement de base orthonormée pour se ramener à une matrice Hessienne  $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(0)$  diagonalisée, puis composer par des dilatations sur chaque coordonnée pour se ramener à des sommes et différences de carrés. Dans la suite, on peut donc supposer que  $h_{ij}(0) = \pm 1$ .

Pour obtenir la forme annoncée dans tout un voisinage de l'origine, on peut établir un théorème de réduction des formes quadratiques "en famille". Nous allons procéder de façon directe en utilisant des factorisations successives. On commence par mettre sous forme canonique la partie quadratique de  $F$  en  $x_1$ . Il vient

$$\begin{aligned} F(x) &= x_1^2 h_{11}(x) + \sum_{j=2}^n x_1 x_j h_{1j}(x) + \sum_{i,j \geq 2} x_i x_j h_{ij}(x) \\ &= \pm \left[ x_1 \sqrt{|h_{11}(x)|} + \sum_{j=2}^n x_j \frac{h_{1j}(x)}{2\sqrt{|h_{11}(x)|}} \right]^2 + \sum_{i,j=2}^n x_i x_j \tilde{h}_{ij}(x) \end{aligned}$$

où le signe est celui de  $h_{11}(0)$  si  $x$  reste proche de l'origine. L'application

$$x \mapsto \phi_1(x) = \left( x_1 \sqrt{|h_{11}(x)|} + \sum_{j=2}^n x_j \frac{h_{1j}(x)}{2\sqrt{|h_{11}(x)|}}, x_2, \dots, x_n \right)$$

a une différentielle inversible en  $x = 0$ . Il résulte donc du théorème d'inversion locale qu'elle réalise un difféomorphisme au voisinage de l'origine tel que

$$F \circ \phi_1^{-1}(x) = \pm x_1^2 + \sum_{i,j=2}^n x_i x_j \hat{h}_{ij}(x).$$

On poursuit et conclut la preuve par récurrence.  $\square$

### 3.1.4 Partitions de l'unité

#### Fonctions plateau

Nous laissons le lecteur vérifier que la fonction

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{t^2-1}\right) & \text{si } |t| < 1 \\ 0 & \text{si } |t| \geq 1 \end{cases}$$

est lisse sur  $\mathbb{R}$ , identiquement nulle hors de l'intervalle  $[-1, 1]$ . On en déduit que la fonction lisse  $g : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\int_{-\infty}^t f(s)ds}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)ds} \in [0, 1]$  est nulle pour  $t \leq -1$  et identique à 1 pour  $t \geq 1$ . La fonction lisse  $h : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto g(2-t) \in [0, 1]$  vérifie enfin  $h \equiv 1$  sur  $[0, 1]$  et  $h \equiv 0$  hors de  $[0, 3]$ .

On peut à présent considérer des compositions  $h \circ \|x-a\|^2$  pour construire des fonctions lisses dans  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $[0, 1]$ , égales à 1 sur une boule de rayon 1 autour du point  $a \in \mathbb{R}^n$  et identique à zéro hors d'une autre boule concentrique. En dilatant, en additionnant, et en renormalisant, on obtient le résultat suivant :

**Lemme 3.1.12.** *Étant donnés deux ouverts  $V \subset U \subset \mathbb{R}^n$  avec  $\bar{V} \subset U$ , on peut construire une fonction lisse  $\chi \in [0, 1]$  telle que*

- $\chi \equiv 1$  au voisinage de  $\bar{V}$  ;
- $\chi \equiv 0$  hors d'un compact de  $U$ .

*Démonstration.* On recouvre  $\bar{V}$  par un nombre fini de petites boules ouvertes  $B_i$ . Pour chaque  $B_i$  on considère une boule concentrique  $B'_i$  telle que  $\bar{B}_i \subset B'_i$  et  $\bar{B}'_i \subset U$ , et une fonction  $\chi_i$  lisse à support dans  $B'_i$  telle que  $\chi_i \equiv 1$  sur  $\bar{B}_i$ . On observe alors que  $\chi := 1 - \prod_i (1 - \chi_i)$  remplit les conditions souhaitées.  $\square$

#### Doubles recouvrements

Soit  $\{U_i\}$  un recouvrement ouvert localement fini de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 3.1.13.** *On appelle partition de l'unité subordonnée au recouvrement  $\{U_i\}$  une collection de fonctions lisses  $\chi_i \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  telles que*

- $\chi_i \equiv 0$  hors d'un compact  $U_i$  ;
- $0 \leq \chi_i \leq 1$  et  $\sum_i \chi_i \equiv 1$ .

Il existe de nombreuses partitions de l'unité. On peut trouver en effet un second recouvrement ouvert localement fini  $\{V_i\}$  tel que  $V_i$  est relativement compact dans  $U_i$ , i.e.  $\bar{V}_i \subset U_i$ . Il résulte alors du Lemme 3.1.12 que l'on peut trouver des fonctions lisses  $\theta_i$  à valeurs dans  $[0, 1]$  telles que

- $\theta_i \equiv 1$  au voisinage de  $\bar{V}_i$  ;
- $\theta_i \equiv 0$  hors d'un compact de  $U_i$ .

La fonction  $\theta = \sum_i \theta_i$  est une fonction lisse bien définie, puisque la somme est localement finie. Il s'ensuit que  $\chi_i = \frac{\theta_i}{\theta}$  définit une partition de l'unité.

## 3.2 Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$

Dans la suite,  $V_p$  (resp.  $W_p$ ) désigne un voisinage ouvert d'un point  $p$  dans  $\mathbb{R}^n$  et on note  $B^n$  la boule unité de  $\mathbb{R}^n$ .

### 3.2.1 Définition

**Définition 3.2.1.** Soit  $M$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ . Une paramétrisation régulière  $f : B^d \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$  d'une partie de  $M$  est un plongement, i.e. une immersion de la boule unité  $B^d$  dans  $\mathbb{R}^n$  qui induit un homéomorphisme sur son image  $f(B^d) \subset M$ .

On dit que  $M$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  dimension  $d$  si, pour tout  $p \in M$ , il existe une paramétrisation régulière  $f : B^d \rightarrow M$  telle que  $p \in f(B^d)$ .

Comme nous l'avons déjà réalisé dans le cas des courbes et des surfaces, il y a plusieurs façons équivalentes de définir les sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposition 3.2.2.** Soit  $M$  un sous-ensemble (non vide) de  $\mathbb{R}^n$  et  $1 \leq d \leq n$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout  $p \in M$ , il existe une paramétrisation régulière  $f : B^d \rightarrow V_p \cap M$  de la boule unité de  $\mathbb{R}^d$  sur un voisinage  $V_p \cap M$  de  $p$  dans  $M$ .
2. Pour tout  $p \in M$ , il existe une application  $h : B^d \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$  différentiable et un voisinage ouvert  $V_p \cap M$  de  $p$  tels que

$$V_p \cap M = \{(x, y) \in B^d \times \mathbb{R}^{n-d} \mid y = h(x)\} \cap V_p.$$

3. Pour tout  $p \in M$ , il existe une submersion  $g : V_p \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$  définie dans un voisinage  $V_p \subset \mathbb{R}^n$  de  $p$ , telle que

$$V_p \cap M = g^{-1}(g\{p\}).$$

4. Pour tout  $p \in M$ , il existe un difféomorphisme  $f$  d'un ouvert  $V \subset \mathbb{R}^n$  à valeurs dans un voisinage  $W_p \subset \mathbb{R}^n$  de  $p$ , tel que

$$f(V \cap \mathbb{R}^d \times \{0\}) = W_p \cap M.$$

*Démonstration.* La démonstration est une conséquence du théorème d'inversion locale et du théorème des fonctions implicites, de même que dans le cas des courbes et des surfaces.

Si  $M$  admet une paramétrisation régulière  $f : B^d \rightarrow M$  avec  $f(0) = p$ , alors  $D_0f$  est de rang  $d$ . Quitte à changer l'ordre des  $f_j$ , on peut supposer que la matrice  $[\partial f_i / \partial x_j(0)]_{1 \leq i, j \leq d}$  est inversible. Le théorème d'inversion locale assure que

$$\phi : x \in B^d \mapsto (f_1(x), \dots, f_d(x)) \in \mathbb{R}^d$$

est inversible au voisinage de 0. On peut alors, au voisinage de  $p$ , exprimer  $M$  comme le graphe de

$$h : x \in B^d(\varepsilon) \mapsto (f_{d+1} \circ \phi^{-1}(x), \dots, f_n \circ \phi^{-1}(x)) \in \mathbb{R}^{n-d}.$$

Cela montre que (1)  $\Rightarrow$  (2). Réciproquement, si  $M$  est le graphe d'une telle application  $h$ , alors

$$f : x \in B^d \mapsto (x_1, \dots, x_d, h(x)) \in \mathbb{R}^n$$

est une paramétrisation régulière de  $M$ , donc (2)  $\Rightarrow$  (1).

Supposons à nouveau que  $M$  admet une paramétrisation régulière  $f : B^d \rightarrow M$  avec  $f(0) = p$  et que la matrice  $[\partial f_i / \partial x_j(0)]_{1 \leq i, j \leq d}$  est inversible. Le théorème d'inversion locale assure que

$$\phi : (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} \mapsto f(x) + (0, y) \in \mathbb{R}^n$$

est un difféomorphisme local puisque la différentielle à l'origine

$$D_0\phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} & \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \\ 0 & I_{n-d} \end{bmatrix}$$

est inversible. Comme  $\phi(y=0) = M$ , on en déduit (1)  $\Rightarrow$  (4).

Réciproquement, si  $M = \phi(y=0)$  est localement l'image du sous-espace  $(y_1 = \dots = y_{n-d} = 0)$  par un difféomorphisme  $\phi$ , alors

$$f : x \in B^d \mapsto \phi(x, 0) \in M \subset \mathbb{R}^n$$

est une paramétrisation régulière de  $M$ , donc (4)  $\Rightarrow$  (1).

Soit  $g : x \in V \subset \mathbb{R}^n \mapsto (g_{d+1}(x), \dots, g_n(x)) \in \mathbb{R}^{n-d}$  une submersion telle que  $p \in M = g^{-1}(0)$ . Puisque  $D_p g$  est surjective, on peut supposer (quitte à changer l'ordre des  $x_j$ ) que la matrice  $[\partial g_i / \partial x_j(0)]_{d+1 \leq i, j \leq n}$  est inversible. Il résulte du théorème des fonctions implicites qu'il existe une application lisse  $h : B^d \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$  telle que  $g^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n ; y = h(x)\}$ , donc (3)  $\Rightarrow$  (2).

Réciproquement, si  $M$  est le graphe de  $h : B^d \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$  alors  $M = g^{-1}(0)$  où

$$g : (x, y) \in \mathbb{R}^n \mapsto (y_1 - h_1(x), \dots, y_{n-d} - h_{n-d}(x)) \in \mathbb{R}^{n-d}$$

est une submersion. Il s'ensuit que (2)  $\Rightarrow$  (3). □

**Exemple 3.2.3.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . La sphère unité

$$S^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}$$

est une sous-variété de  $\mathbb{R}^{n+1}$  de dimension  $n$ . Vous pouvez le justifier en vérifiant par exemple que 1 est une valeur régulière de la fonction

$$f : x \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \|x\|^2 \in \mathbb{R}.$$

Donc  $S^n = f^{-1}(1)$  vérifie le troisième item de la Proposition 3.2.2.

**Exemple 3.2.4.** *L'ensemble des matrices symétriques réelles*

$$\text{Sym}(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \mid {}^t A = A\}$$

est une sous-variété de dimension  $n(n+1)/2$  de  $\mathbb{R}^{n^2} \simeq \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ . Cela résulte aisément du premier item de la Proposition 3.2.2 puisque  $\text{Sym}(n, \mathbb{R})$  admet la paramétrisation linéaire qui associe aux  $n(n+1)/2$  coefficients

$$a_{ij}, 1 \leq i \leq n, i \leq j \leq n$$

la matrice  $(a_{ij})$ , dont les coefficients pour  $j < i$  sont définis par  $a_{ij} = a_{ji}$ .

Plus généralement, tout sous-espace vectoriel de dimension  $d$  de  $\mathbb{R}^n$  est une sous-variété de dimension  $d$ .

**Remarque 3.2.5.** *La cubique cuspidale  $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y^2 = x^3\}$  rencontrée au chapitre 1 n'est pas une sous-variété de  $\mathbb{R}^2$  de dimension 1. L'origine est un point singulier qui pose problème, on peut observer par exemple que le seul vecteur tangent à  $\mathcal{C}$  à l'origine est le vecteur nul.*

### 3.2.2 Espaces tangents

L'espace tangent à une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  en un point  $p$  est défini comme pour le cas des courbes et des surfaces par :

**Définition 3.2.6.** *Soit  $M \subset \mathbb{R}^n$  une sous-variété et  $p \in M$ . On note  $T_p M$  l'espace tangent à  $M$  en  $p$ , constitué des vecteurs  $p + v \in \mathbb{R}^n$  tels qu'il existe une courbe  $\gamma : ]-\varepsilon, +\varepsilon[ \rightarrow M$  tracée sur  $M$  avec*

$$\gamma(0) = p \quad \text{et} \quad \gamma'(0) = v.$$

L'espace tangent  $T_p M$  est un sous-espace affine de  $\mathbb{R}^n$  de dimension égale à celle de  $M$ . Nous laissons le lecteur vérifier ce fait dans l'Exercice 69, en établissant qu'il peut également être défini ainsi :

**Proposition 3.2.7.** *Soit  $M \subset \mathbb{R}^n$  une sous-variété de dimension  $d$  et  $g : V_p \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$  une submersion définie dans un voisinage  $V_p$  de  $p \in M$ , telle que  $V_p \cap M = g^{-1}(g\{p\})$ . Alors*

$$T_p M = p + \ker D_p g.$$

Étant donnée  $M \subset \mathbb{R}^n$  une sous-variété de dimension  $d$ , on note

$$TM = \cup_{p \in M} T_p^{\text{vect}} M = \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^n \mid v \in T_p^{\text{vect}} M\}$$

où  $T_p^{\text{vect}} M$  désigne la partie vectorielle de  $T_p M$ .

**Lemme 3.2.8.** *L'ensemble  $TM$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  de dimension  $2d$ . On l'appelle le fibré tangent.*

*Démonstration.* Le fibré tangent est le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  défini par

$$TM = \{(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid p \in M \text{ et } v \in T_p^{vect} M\}.$$

Écrivons localement  $M$  sous-forme d'un graphe,

$$M \cap V_p = \{(x, y) \in B^d \times \mathbb{R}^{n-d} \mid y = h(x)\}$$

où  $h = (h_1, \dots, h_{n-d})$  est une application lisse des  $d$  variables  $x = (x_1, \dots, x_d)$ . L'espace tangent  $T_p^{vect} M$  au point  $p = (x, h(x))$  est l'espace vectoriel engendré par les  $d$  vecteurs tangents

$$\left(1, 0, \dots, 0, \frac{\partial h_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h_{n-d}}{\partial x_1}\right), \dots, \left(0, 0, \dots, 1, \frac{\partial h_1}{\partial x_d}, \dots, \frac{\partial h_{n-d}}{\partial x_d}\right).$$

En notant  $T_1(x), \dots, T_d(x)$  ces vecteurs tangents, on en déduit une paramétrisation locale régulière de  $TM$ ,

$$TM \cap (V_p \cap \mathbb{R}^n) = \varphi(B^d \times \mathbb{R}^d)$$

où

$$\varphi : (x, \lambda) \in B^d \times \mathbb{R}^d \mapsto \left(x, h(x), \sum_{i=1}^d \lambda_i T_i(x)\right) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

□

Vous étudierez en topologie différentielle la notion de fibré vectoriel sur une variété. Il s'agit d'une famille d'espaces vectoriels de dimension  $d$  paramétrée par la variété, qui est localement isomorphe au produit cartésien d'un ouvert de la variété et de  $\mathbb{R}^d$ , mais dont la structure globale est plus riche que le simple produit cartésien.

Le fibré tangent et son dual, le fibré cotangent, sont les exemples les plus importants. Les sections du premier, i.e. les applications différentiables

$$X : M \rightarrow TM$$

qui associent à chaque  $p \in M$  un élément  $X(p)$  de son espace tangent  $T_p M$ , sont les *champs de vecteurs*. Les sections du second

$$\omega : M \rightarrow T^*M$$

sont les *1-formes différentielles* que nous étudierons dans la section 3.3.

### 3.2.3 Applications différentiables

#### Différentielle

**Définition 3.2.9.** Soit  $M_1 \subset \mathbb{R}^n$  et  $M_2 \subset \mathbb{R}^m$  des sous-variétés et  $f : M_1 \rightarrow M_2$  une application continue. On dit que  $f$  est différentiable si, pour toute paramétrisation locale  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^d \rightarrow M_1$ , la fonction

$$f \circ \varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

est différentiable.

Il est clair que la définition ne dépend pas du choix de la paramétrisation locale  $(\varphi, U)$ . Une définition alternative utile est fournie par le résultat suivant :

**Lemme 3.2.10.** Soit  $M_1 \subset \mathbb{R}^n$  et  $M_2 \subset \mathbb{R}^m$  des sous-variétés. Une application continue  $f : M_1 \rightarrow M_2$  est différentiable si et seulement si elle est localement la restriction d'une application différentiable  $F : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

*Démonstration.* Écrivons localement  $M_1$  sous forme du graphe d'une fonction de  $d$  variables, à valeurs dans  $\mathbb{R}^{n-d}$ ,

$$M_1 \cap V_p = \{(x, y) \in B^d \times \mathbb{R}^{n-d} \mid y = h(x)\}.$$

On lui associe la paramétrisation locale

$$x \in B^d \mapsto \varphi(x) = (x, h(x)) \in \mathbb{R}^n.$$

Si  $f$  est (localement) la restriction à  $M_1$  d'une application différentiable  $F$  d'un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ , alors

$$x \mapsto f \circ \varphi(x) = F(x, h(x))$$

est différentiable, comme composée de fonctions différentiables.

Réciproquement, on écrit localement  $M_1$  comme l'image (d'une partie) du plan de coordonnées  $(x_{d+1} = \dots = x_n = 0)$  par un difféomorphisme local  $\psi$ . On note  $p$  la projection sur les  $d$  premières coordonnées,

$$p : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0),$$

et  $P = \psi \circ p \circ \psi^{-1}$  la projection correspondante sur  $M$ . L'application  $F = f \circ P$  est une extension différentiable de  $f$ .  $\square$

On vérifie que la différentielle d'un tel prolongement  $F$  au voisinage d'un point  $p \in M_1$  envoie un vecteur tangent  $v \in T_p M_1$  linéairement sur un vecteur tangent de  $T_{f(p)} M_2$ , de façon indépendante du choix de l'extension. Cela permet de définir ainsi la différentielle de  $f$  en  $p$  :

**Définition 3.2.11.** Soit  $M_1 \subset \mathbb{R}^n$  et  $M_2 \subset \mathbb{R}^m$  des sous-variétés, et  $f : M_1 \rightarrow M_2$  une application différentiable. La différentielle de  $f$  en  $p \in M_1$  est l'application linéaire

$$D_p f : v \in T_p M_1 \mapsto D_{f(p)} F(v) \in T_p M_2$$

où  $F : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  est n'importe quelle extension différentiable locale de  $f$ .

**Exemple 3.2.12.** Considérons

$$M_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x^2 + y^2 = z^2 + t^2 = 1\} \sim S^1 \times S^1$$

et

$$M_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\} = S^3.$$

Ce sont deux sous-variétés différentielles de  $\mathbb{R}^4$ , de dimension  $\dim M_1 = 2$  et  $\dim M_2 = 3$ . Pour  $p = (1, 0, 1, 0)$  et  $q = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1, 0)$ , on calcule

$$T_p M_1 = \mathbb{R}(0, 1, 0, 0) \oplus \mathbb{R}(0, 0, 0, 1) \quad \text{et} \quad T_q M_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x+z=0\}.$$

L'application différentiable

$$f : (x, y, z, t) \in M_1 \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(x, y, z, t) \in M_2$$

est la restriction à  $M_1$  de l'homothétie  $\frac{1}{\sqrt{2}}\text{Id}$  qui envoie  $p$  sur  $q$ . La différentielle de  $f$  en  $p = (1, 0, 1, 0)$  est donc

$$D_p f : v \in T_p M_1 \mapsto \frac{v}{\sqrt{2}} \in T_q M_2.$$

### Difféomorphismes

**Définition 3.2.13.** Soit  $M_1 \subset \mathbb{R}^n$  et  $M_2 \subset \mathbb{R}^m$  des sous-variétés et  $f : M_1 \rightarrow M_2$  une application différentiable. On dit que  $f$  est un difféomorphisme si  $f$  est bijective et admet un inverse différentiable.

Vous vérifierez en exercice que la quadrique

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p; \|x\|^2 - \|y\|^2 = 1\}$$

est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  qui est difféomorphe à  $S^{n-1} \times \mathbb{R}^p$  via

$$\Phi : (u, v) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}^p \mapsto (u\sqrt{1+\|v\|^2}, v) \in Q.$$

Notons que si  $f : M_1 \rightarrow M_2$  est un difféomorphisme, alors  $M_1$  et  $M_2$  ont même dimension et, pour tout  $p \in M_1$ ,  $D_p f$  est un isomorphisme de  $T_p M_1$  sur  $T_p M_2$ . Mais faites attention : la réciproque est fautive.

Toutes les notions de calcul différentiel s'étendent au cadre des sous-variétés différentielles de  $\mathbb{R}^n$ , par exemple :

**Définition 3.2.14.** Soit  $M_1 \subset \mathbb{R}^n$  et  $M_2 \subset \mathbb{R}^m$  des sous-variétés. Une application différentiable  $f : M_1 \rightarrow M_2$  est

- une immersion si, pour tout  $p \in M_1$ ,  $D_p f$  est injective ;
- une submersion si, pour tout  $p \in M_1$ ,  $D_p f$  est surjective ;
- un plongement si c'est une immersion qui induit un homéomorphisme sur son image.

Lorsque  $f : M_1 \rightarrow M_2$  est un plongement, l'ensemble image  $f(M_1) \subset M_2$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^m$  qui est difféomorphe à  $M_1$ . On dira un peu plus loin que  $f(M_1)$  est une sous-variété de  $M_2$ .

Vous étudierez dans les exercices des exemples, ainsi que des critères pour établir qu'une application est un plongement.

### Points critiques et valeurs régulières

**Définition 3.2.15.** Soit  $M_1 \subset \mathbb{R}^n$  et  $M_2 \subset \mathbb{R}^m$  des sous-variétés et  $f : M_1 \rightarrow M_2$  une application différentiable. On dit que

1.  $p \in M_1$  est un point critique si  $D_p f$  n'est pas surjective ;
2.  $q \in M_2$  est une valeur critique de  $f$  si c'est l'image d'un point critique ;
3.  $p \in M_1$  est un point régulier si  $D_p f$  est surjective ;
4.  $q \in M_2$  est une valeur régulière de  $f$  si ce n'est pas une valeur critique.

Notez que la définition n'est intéressante que lorsque  $\dim M_1 \geq \dim M_2$ .

**Lemme 3.2.16.** Soit  $M_1 \subset \mathbb{R}^n$  et  $M_2 \subset \mathbb{R}^m$  des sous-variétés telles que  $\dim M_1 \geq \dim M_2$ , et  $f : M_1 \rightarrow M_2$  une application différentiable. La préimage de toute valeur régulière de  $f$  est une sous-variété de dimension  $\dim M_1 - \dim M_2$ .

Il s'agit d'une généralisation de l'item iii de la Proposition 3.2.2.

*Démonstration.* Soit  $p \in M_1$  un point régulier de  $f$  et  $q = f(p) \in M_2$  une valeur régulière. On note  $d_i = \dim M_i$  et on fixe une paramétrisation  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^{d_1} \rightarrow M_1$  de  $M_1$  au voisinage de  $p = \varphi(0)$ .

On fixe également  $\psi : (M_2, q) \rightarrow (\mathbb{R}^{d_2}, \psi(q))$  un difféomorphisme local au voisinage de  $q$ . Alors  $\psi(q)$  est une valeur régulière de

$$F := \psi \circ f \circ \varphi : U \subset \mathbb{R}^{d_1} \rightarrow \mathbb{R}^{d_2}.$$

Il résulte de la Proposition 3.2.2 que  $F^{-1}(F(0))$  est une variété de dimension  $d_1 - d_2$ . Il en va de même de

$$f^{-1}(q) = f^{-1}(f(p)) = \varphi(F^{-1}(F(0))).$$

□

### 3.3 Formes différentielles

#### 3.3.1 Champs de vecteurs

Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 3.3.1.** *Un champ de vecteurs*

$$X : x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto (X_1(x), \dots, X_n(x)) \in \mathbb{R}^n$$

est une application (lisse) qui, à un point  $x$  de l'ouvert  $\Omega$ , associe un vecteur  $X(x)$ . On le note traditionnellement

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

#### Dérivations

Cette notation provient de ce que  $X$  définit une *dérivation* :

**Définition 3.3.2.** *Une dérivation  $D$  sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est un endomorphisme de l'algèbre  $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$  qui vérifie la règle de Leibnitz<sup>2</sup>, i.e. tel que pour tout  $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ , on a*

$$D(fg) = fD(g) + gD(f).$$

On note  $L_X$  la dérivation associée à un champ de vecteurs  $X$  (appelée dérivée de Lie du champ  $X$ ), elle est définie par

$$L_X : f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \mapsto \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}).$$

On vérifie aisément qu'il s'agit bien d'une dérivation. Réciproquement :

**Proposition 3.3.3.** *Soit  $D$  une dérivation sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Alors il existe un unique champ de vecteurs  $X$  tel que  $D = L_X$ .*

*Démonstration.* On peut supposer sans perdre de généralité que  $\Omega$  est convexe. Soit  $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ . Rappelons que

$$f(x) - f(y) = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(t(x - y) + y) dt = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) h_{i,y}(x)$$

avec

$$h_{i,y} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad h_{i,x} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

---

2. Gottfried Wilhelm Leibniz, philosophe, scientifique, mathématicien, logicien, diplomate, juriste, bibliothécaire et philologue allemand (1646-1716).

Soit  $D$  une dérivation et posons  $X_i := D(x_i)$ . Comme  $D$  annule les fonctions constantes, il vient

$$\begin{aligned} Df(x) &= D(f - f(y))(x) = D\left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)h_{i,y}(x)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n X_i(x)h_{i,y}(x) + \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)Dh_{i,y}(x). \end{aligned}$$

En particulier, pour  $y = x$  on obtient

$$Df(x) = \sum_{i=1}^n X_i(x)h_{i,x}(x) = \sum_{i=1}^n X_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = L_X f(x).$$

□

**Remarque 3.3.4.** Notez que la composée de deux dérivations n'est pas une dérivation (donnez un exemple).

### Crochet de Lie<sup>3</sup>

Soit  $X$  et  $Y$  deux champs de vecteurs. Observez que  $L_X(L_Y f)$  et  $L_Y(L_X f)$  ne sont pas nécessairement égaux. Le crochet de Lie  $[X, Y]$  mesure ce défaut de commutativité. L'observation remarquable est que le crochet de Lie est encore un champ de vecteurs (i.e. une dérivation) :

**Lemme 3.3.5.** *L'application  $L_X L_Y - L_Y L_X$  est une dérivation. On note  $[X, Y]$  le champ de vecteurs correspondant.*

*Démonstration.* L'application

$$f \mapsto L_X(L_Y f) - L_Y(L_X f)$$

est clairement un endomorphisme de  $\mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ . Il s'agit de montrer qu'il vérifie la règle de Leibnitz.

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions lisses. On calcule

$$L_X(L_Y(fg)) = fL_X(L_Y g) + L_X f L_Y g + L_X g L_Y f + gL_X(L_Y f)$$

et

$$L_Y(L_X(fg)) = fL_Y(L_X g) + L_Y f L_X g + L_Y g L_X f + gL_Y(L_X f)$$

d'où

$$(L_X L_Y - L_Y L_X)(fg) = f(L_X(L_Y g) - L_Y(L_X g)) + g(L_X(L_Y f) - L_Y(L_X f)),$$

ce qui montre que  $L_X L_Y - L_Y L_X$  est une dérivation. □

<sup>3</sup>. Sophus Lie, mathématicien norvégien (1842-1899).

Si  $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $Y = \sum_{j=1}^n Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}$  et  $f$  est une fonction lisse, il vient

$$\begin{aligned} (L_X L_Y - L_Y L_X)(f) &= \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{j=1}^n Y_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) - \sum_j Y_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i,j} \left( X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i,j} \left( X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que les coordonnées du crochet de Lie sont

$$[X, Y]_i = \sum_j \left( X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right).$$

### Exemples 3.3.6.

1) Si  $X$  et  $Y$  sont à coefficients constants, alors  $[X, Y] = 0$  (on dit que les champs de vecteurs commutent).

2) Pour  $X = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}$  et  $Y = \frac{\partial}{\partial x_2}$ , on obtient  $[X, Y] = -\frac{\partial}{\partial x_1}$ .

3) Pour  $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$  et  $Y = \frac{\partial}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}$ , on obtient  $[X, Y] = -\frac{\partial}{\partial x_3}$ .

### Identité de Jacobi<sup>4</sup>

**Proposition 3.3.7.** Soit  $X, Y, Z$  trois champs de vecteurs. Alors

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0.$$

*Démonstration.* La preuve est une simple vérification en adoptant le point de vue dérivation.  $\square$

### Champs tangents à une surface

Soit  $X$  et  $Y$  deux champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^3$  qui sont en chaque point linéairement indépendants. Les champs de vecteurs  $X, Y, [X, Y]$  sont, en général, également linéairement indépendants (voir Exemple 3.3.6.3). Ce n'est pas le cas dans une situation bien précise que nous vous laissons caractériser en exercice :

**Proposition 3.3.8.** Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. En tout point  $[X, Y] \in \text{Vect}(X, Y)$ .
2. Au voisinage de tout point  $m \in \mathbb{R}^3$ , il existe une surface  $S \subset \mathbb{R}^3$  contenant  $m$  et dont le plan tangent contient  $X$  et  $Y$ .

4. Carl Gustav Jakob Jacobi, mathématicien allemand (1804-1851).

### 3.3.2 Formes multilinéaires alternées

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in [1, n] \cap \mathbb{N}$ . Rappelons qu'une application  $\alpha : E^k \rightarrow \mathbb{R}$  est dite  $k$ -linéaire si elle est linéaire en chacun de ses facteurs.

#### Formes $k$ -linéaires et déterminant

On note  $\Sigma_k$  le groupe symétrique sur  $k$  éléments.

**Définition 3.3.9.** On note  $\Lambda^k(E)$  l'espace des formes  $k$ -linéaires alternées. Ce sont les applications  $k$ -linéaires  $\alpha : E^k \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\alpha(x_1, \dots, x_k) = \varepsilon(\sigma)\alpha(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)})$$

pour toute permutation  $\sigma \in \Sigma_k$ , où  $\varepsilon$  est la signature de  $\sigma \in \Sigma_k$ .

On notera dans la suite  $\deg \alpha = k$  le degré de  $\alpha$ . Voici quelques propriétés élémentaires que vous devez connaître :

- pour  $k = 1$ , la condition d'antisymétrie est vide. L'espace des formes 1-linéaires alternées est simplement  $\Lambda^1(E) = E^*$ .
- une 2-forme linéaire  $\alpha$  est alternée si et seulement si  $\alpha(x, y) = -\alpha(y, x)$  pour tout  $x, y \in E$ , ou encore si et seulement si  $\alpha(x, x) = 0$ .
- une  $k$ -forme linéaire  $\alpha$  est alternée si et seulement si  $\alpha(x_1, \dots, x_k) = 0$  dès qu'il existe deux indices  $i \neq j$  tels que  $x_i = x_j$ .

Soit  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$  une base de  $E$ . Si  $\alpha \in \Lambda^k E$ , on obtient en décomposant les vecteurs  $x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$  dans la base  $\mathcal{B}$ ,

$$\alpha(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n a_{i_1 1} \cdots a_{i_k k} \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$$

avec  $\alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = 0$  si deux indices sont égaux, et  $\alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \varepsilon(\sigma)\alpha(e_{i'_1}, \dots, e_{i'_k})$  sinon, en réordonnant les indices de façon strictement croissante  $i'_1 < i'_2 < \dots < i'_k$  grâce à la permutation  $\sigma \in \Sigma_k$ . On en déduit le résultat suivant :

**Lemme 3.3.10.** L'espace  $\Lambda^k(E)$  est de dimension  $\binom{n}{k}$ . En particulier, l'espace  $\Lambda^n(E)$  est de dimension 1.

Notez qu'il n'existe pas de  $k$ -forme alternée non nulle lorsque  $k \geq n + 1$ . Pour  $k = n$ , la forme  $\alpha$  est entièrement déterminée par sa valeur sur  $\mathcal{B}$  :

$$\alpha(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \alpha(e_1, \dots, e_n).$$

Vous retrouvez ici la définition originale du déterminant par rapport à une base fixée : c'est l'unique forme  $n$ -linéaire alternée  $\det \in \Lambda^n(E)$  telle que  $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$ .

**Définition 3.3.11.** Orienter l'espace vectoriel  $E$ , c'est choisir l'une des deux composantes connexes de  $\Lambda^n(E) \setminus \{0\}$ .

### Produit extérieur

**Définition 3.3.12.** On définit  $\Lambda : \Lambda^k(E) \times \Lambda^\ell(E) \rightarrow \Lambda^{k+\ell}(E)$ , le produit extérieur de formes multilinéaires alternées par

$$\alpha \wedge \beta(x_1, \dots, x_{k+\ell}) = \sum_{\sigma \in \Sigma_k \times \Sigma_\ell} \frac{\varepsilon(\sigma)}{k!\ell!} \alpha(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) \beta(x_{\sigma(k+1)}, \dots, x_{\sigma(k+\ell)}).$$

La forme  $\alpha \wedge \beta$  ainsi obtenue est une forme  $(k + \ell)$ -linéaire alternée. Par récurrence, on peut considérer le produit extérieur de plusieurs formes multilinéaires alternées en posant  $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma := (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$ . Voici quelques propriétés qui découlent simplement de la définition :

- Le produit extérieur est associatif  $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ .
- On a la relation d'anticommutativité  $\beta \wedge \alpha = (-1)^{\deg \alpha \cdot \deg \beta} \alpha \wedge \beta$ .
- Lorsque  $k = \ell = 1$  et  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux 1-formes linéaires, on obtient

$$\alpha \wedge \beta(x, y) = \alpha(x)\beta(y) - \alpha(y)\beta(x).$$

- Le produit de formes 1-linéaires alternées est donné par

$$\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k(x_1, \dots, x_k) = \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \varepsilon(\sigma) \alpha_1(x_{\sigma(1)}) \dots \alpha_k(x_{\sigma(k)}).$$

- Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $e^1, \dots, e^n$  sa base duale. Les formes  $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$ ,  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ , constituent une base de  $\Lambda^k E$ .
- Le produit extérieur correspond au produit vectoriel lorsque  $E = \mathbb{R}^3$ .

Vous pourrez montrer que le produit extérieur  $\alpha \wedge \alpha$  est nul si  $\deg \alpha$  est impair. Ce n'est pas vrai pour une forme de degré pair : si, par exemple,  $\alpha_1, \dots, \alpha_4$  sont des 1-formes linéaires, alors la 4-forme

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 + \alpha_3 \wedge \alpha_4) \wedge (\alpha_1 \wedge \alpha_2 + \alpha_3 \wedge \alpha_4) = 2\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_4$$

est non nulle en général (si  $n \geq 4$ ). Notez que la relation d'anticommutativité assure que les formes de degré pair commutent entre elles.

Si  $f$  est un isomorphisme de  $E$ , la transposée de  $f$  agit sur les formes linéaires par composition via  $f^* \alpha(x_1, \dots, x_k) = \alpha(f(x_1), \dots, f(x_k))$ . Si  $\alpha \in \Lambda^k E$ , on a également  $f^* \alpha \in \Lambda^k E$ . Cette opération de « tiré en arrière » (pull-back) commute avec le produit extérieur :

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^* \alpha \wedge f^* \beta.$$

**Exemple 3.3.13.** Lorsque  $E = \mathbb{R}^n$ , on note  $dx_1, \dots, dx_n$  la base duale de la base canonique. Toute forme  $n$ -linéaire alternée est un multiple de la  $n$ -forme  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ . Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une application linéaire, alors

$$f^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = \det f \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

### 3.3.3 Formes différentielles

#### Tirés en arrière

Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Une forme différentielle  $\alpha$  de degré  $k$  dans  $U$  est la donnée en tout point  $x \in U$  d'une  $k$ -forme linéaire alternée, qui dépend de façon lisse de  $x$ . Concrètement,

$$\alpha = \sum \alpha_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

où les  $\alpha_{i_1 \dots i_k}$  sont des fonctions lisses. Par convention, les formes différentielles de degré 0 sont les fonctions lisses.

Soit à présent  $M$  une sous-variété différentielle de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 3.3.14.** Une forme différentielle  $\alpha$  de degré  $k$  sur  $M$  est la donnée, sur chaque espace tangent  $T_x M$  d'une  $k$ -forme linéaire alternée, qui dépend de façon lisse de  $x$ .

On note  $\Omega^k(M)$  l'espace des  $k$ -formes différentielles sur  $M$ . L'espace  $\Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$  est l'ensemble des fonctions lisses sur  $M$ .

On définit le produit extérieur  $\alpha \wedge \beta$  de formes différentielles, en considérant le produit extérieur  $\alpha(x) \wedge \beta(x)$  des formes multilinéaires alternées sur les espaces tangents  $T_x M$ .

De même, si  $f : N \rightarrow M$  est une application lisse entre deux sous-variétés différentielles, et si  $\alpha \in \Omega^k(M)$ , on définit  $f^* \alpha \in \Omega^k(N)$  par

$$f^* \alpha(x)(v_1, \dots, v_k) = \alpha(f(x))(D_x f(v_1), \dots, D_x f(v_k))$$

où  $v_1, \dots, v_k \in T_x N$  et  $D_x f(v_1), \dots, D_x f(v_k) \in T_{f(x)} M$ . Lorsque  $f = (f_1, \dots, f_m)$  avec  $M$  ouvert de  $\mathbb{R}^m$  et  $\alpha = \sum_I \alpha_I dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_k}$ , on obtient

$$f^* \alpha = \sum_I \alpha_I \circ f df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_k}$$

en notant  $df_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j$  la différentielle de la fonction coordonnée  $f_i$ .

**Proposition 3.3.15.** Le produit extérieur  $\alpha \wedge \beta$  d'une  $k$ -forme différentielle  $\alpha$  et d'une  $\ell$ -forme différentielle  $\beta$  sur  $M$  est une  $(k + \ell)$ -forme différentielle. Si  $\gamma$  est une troisième forme différentielle, alors :

- 1)  $\alpha \wedge \beta = (-1)^{\deg \alpha \cdot \deg \beta} \beta \wedge \alpha$  ;
- 2)  $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$  ;
- 3) si  $f : N \rightarrow M$  est une application lisse, alors

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^* \alpha \wedge f^* \beta.$$

*Démonstration.* Ces propriétés résultent des propriétés correspondantes pour les applications multilinéaires.  $\square$

**Exemple 3.3.16.** Si  $f : U \rightarrow V$  est un difféomorphisme entre deux ouverts de  $\mathbb{R}^n$ , alors

$$f^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = \text{Jac}(f) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

où  $\text{Jac}(f) = \det \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]$  est le jacobien de l'application  $f$ .

### Champs de vecteurs et 1-formes différentielles

Une 1-forme différentielle  $\alpha$  sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est la donnée de  $n$  fonctions lisses  $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$  telles que  $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i$ .

Un cas particulier est celui où  $\alpha = df$  est la différentielle d'une fonction lisse  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . On a alors  $a_i = \partial f / \partial x_i$  puisque

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Dans ce cas, le théorème de Schwarz assure que pour tout  $i, j$ ,

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}.$$

Le lemme de Poincaré (voir Lemme 3.3.27) assure réciproquement que cette condition est localement suffisante.

**Lemme 3.3.17.** Étant donnée  $\alpha$  une 1-forme différentielle sur  $\Omega$ , il existe un unique champ de vecteurs  $X$  sur  $\Omega$  tel que, pour tout  $(x, h) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ ,

$$\alpha(x)(h) = \langle X(x), h \rangle.$$

Lorsque  $\alpha = df$ , le champ de vecteurs  $X$  est le gradient de  $f$ , noté  $\nabla f$ .

*Démonstration.* L'application  $\omega(x) : h \in \mathbb{R}^n \mapsto \omega(x)(h) \in \mathbb{R}$  est une forme linéaire continue. Il résulte du théorème de Riesz qu'il existe un unique vecteur  $X(x) \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\alpha(x)(h) = \langle X(x), h \rangle$ . Les coordonnées  $X_j(x) = \alpha(x)(e_j)$  dépendent de façon lisse de  $x$ , puisque c'est le cas pour  $x \mapsto \alpha(x)$ .  $\square$

Pour comprendre ces concepts sur les variétés, il faut savoir effectuer des changements de coordonnées. Cela revient à savoir composer une 1-forme différentielle  $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i(y) dy_i$  sur  $\Omega$  par une application lisse  $\Phi : \Omega' \rightarrow \Omega$ . On obtient ainsi, pour  $x \in \Omega'$  et  $y = \Phi(x) \in \Omega$ ,

$$\Phi^* \alpha(x) = \sum_{i=1}^n a_i \circ \Phi(x) d\Phi_i = \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \circ \Phi(x) \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(x) \right\} dx_j.$$

### Formes volumes et orientation

**Définition 3.3.18.** Une sous-variété différentielle  $M \subset \mathbb{R}^N$  est orientable si elle admet une forme volume, i.e. une forme différentielle de degré  $\dim M$  qui ne s'annule nulle part.

La définition est cohérente avec le point de vue adopté au chapitre 2 :

**Proposition 3.3.19.** Une variété  $M$  est orientable si et seulement si on peut la définir par une famille de paramétrisations  $(\varphi_i, U_i)$  dont les applications de transition  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  préservent l'orientation.

*Démonstration.* Supposons  $M$  orientable et soit  $\omega$  une forme volume. Soit  $\varphi_i : U_i \subset \mathbb{R}^d \rightarrow V_i \subset M \subset \mathbb{R}^N$  des paramétrisations régulières de  $M$ , telles que les  $V_i$  sont des ouverts connexes et  $\cup_i V_i = M$ . La forme  $\varphi_i^* \omega$  est de degré  $d$  dans  $U_i \subset \mathbb{R}^d$  et ne s'annule pas. On a donc

$$\varphi_i^* \omega = f_i dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$$

avec  $f_i$  lisse qui est soit strictement positive, soit strictement négative. Notez que changer  $x_1$  en  $-x_1$  sans changer les autres coordonnées change  $f_i$  en  $-f_i$ . On peut donc supposer que chaque fonction  $f_i$  est positive ; les fonctions de transition ont alors comme jacobien le quotient de  $f_i$  par  $f_j$  qui est positif.

Réciproquement, étant donné des paramétrisations  $(\varphi_i, U_i)$  avec fonctions de transition de jacobien positif, on considère  $\omega_i = (\varphi_i^{-1})^* dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$  et  $\omega = \sum_i \chi_i \omega_i$  où  $\{\chi_i\}$  est une partition de l'unité associée au recouvrement de  $M$  par les ouverts  $V_i = \varphi_i(U_i)$ . Le facteur de proportionnalité entre les formes  $\omega_i$  est positif puisque le jacobien de  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  est positif. Il s'ensuit que  $\omega$  est une forme volume.  $\square$

Si  $M$  est une variété orientable connexe de dimension  $d$  munie d'une forme volume  $\omega$ , toute forme différentielle  $\alpha$  de degré  $d$  s'écrit de façon unique  $\alpha = f\omega$  avec  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ , comme on le vérifie dans des paramétrisations locales.

En particulier deux formes volumes  $\omega_1, \omega_2$  diffèrent d'une fonction lisse  $f$  qui est de signe constant. On dit qu'elles induisent la même orientation si  $f$  est positive. Il y a donc deux orientations possibles pour une variété donnée.

**Exemple 3.3.20.** La sphère unité  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$  est orientable. Considérons en effet la restriction à  $S^n$  de la forme différentielle

$$\omega = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} x_i dx_{[1, n+1] \setminus \{i\}}$$

où  $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}$  si  $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ . Observons que si  $\{v_1, \dots, v_n\}$  est une base de  $T_x S^n$ , alors

$$\omega_x(v_1, \dots, v_n) = \det(x, v_1, \dots, v_n)$$

ne s'annule pas sur  $S^n$ , donc  $\omega$  est une forme volume.

### 3.3.4 Différentielle extérieure

#### Construction

Soit  $M$  une sous-variété différentielle de  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposition 3.3.21.** *Il existe une application linéaire  $d : \Omega^\bullet(M) \rightarrow \Omega^\bullet(M)$  unique telle que*

1.  $d$  envoie  $\Omega^k(M)$  sur  $\Omega^{k+1}(M)$  ;
2.  $d : \Omega^0(M) \rightarrow \Omega^1(M)$  coïncide avec la différentiation des fonctions ;
3.  $\forall (\alpha, \beta) \in \Omega^k(M) \times \Omega^\ell(M)$ ,  $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$  ;
4.  $d \circ d = 0$ .

*Démonstration.* On commence par observer qu'une telle application est nécessairement locale : si  $\alpha$  est une forme qui s'annule dans un ouvert  $U$ , alors  $d\alpha$  s'annule dans  $U$ . En effet, soit  $\chi$  une fonction lisse identique à 1 à l'intérieur de  $U$  et qui s'annule au voisinage d'un point  $x \in U$ . Alors  $\alpha = \chi\alpha$ , donc la propriété (3) implique  $d\alpha = d\chi \wedge \alpha + \chi d\alpha$ , ce qui implique  $d\alpha(x) = 0$ .

On peut donc travailler dans une carte et se ramener à la construction de  $d$  dans un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $\alpha = \sum \alpha_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  une forme différentielle de degré  $k$ . Les propriétés (3) et (4) impliquent

$$d\alpha = \sum d\alpha_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Le terme de droite étant déterminé de façon unique par la propriété (2), on en déduit l'unicité de  $d$ .

Nous montrons à présent l'existence de  $d$ . La formule précédente définit  $d\alpha$  dans n'importe quelle carte, donc globalement puisque  $d$  est une application locale. Les deux premières propriétés sont clairement satisfaites. Par linéarité, il suffit de vérifier (3) pour des formes  $\alpha = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$  et  $\beta = g dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell}$ . Comme

$$\alpha \wedge \beta = fg dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell},$$

la règle de Leibnitz donne

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d(fg) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell} \\ &= (gdf + fdg) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell} \\ &= df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge g dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell} \\ &\quad + (-1)^k f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dg \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_\ell} \\ &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta. \end{aligned}$$

Il suffit également de démontrer la propriété (4) pour une forme  $\alpha = f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ . Il vient, en notant  $f_j = \partial f / \partial x_j$  et  $f_{j\ell} = \partial^2 f / \partial x_j \partial x_\ell$ ,

$$\begin{aligned} d^2\alpha &= d(df \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = \sum_{j=1}^n d(f_j dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) \\ &= \sum_{j=1}^n d(f_j) \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\ &= \sum_{j,\ell=1}^n f_{j\ell} dx_\ell \wedge dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\ &= - \sum_{j,\ell=1}^n f_{j\ell} dx_j \wedge dx_\ell \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = 0, \end{aligned}$$

puisque  $dx_j \wedge dx_\ell = -dx_\ell \wedge dx_j$  tandis que  $f_{j\ell} = f_{\ell j}$ .  $\square$

**Définition 3.3.22.** *L'unique application linéaire de la Proposition 3.3.21 s'appelle la différentielle extérieure.*

**Exemple 3.3.23.** *On considère la 1-forme différentielle*

$$\alpha(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

dans  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Un calcul immédiat donne

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{donc} \quad d\alpha = \left( -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx \wedge dy = 0.$$

**Proposition 3.3.24.** *La différentielle extérieure commute avec le tiré en arrière : si  $\alpha \in \Omega^k(N)$  et  $f : M \rightarrow N$ , alors  $f^*(d\alpha) = d(f^*\alpha)$ .*

*Démonstration.* L'égalité  $f^*(dg) = d(f^*g)$  lorsque  $\alpha = g$  est une fonction lisse se réduit au théorème de dérivation des fonctions composées.

Lorsque  $\alpha$  est une forme de degré 1 il suffit, par linéarité, de traiter le cas  $\alpha = gdh$  où  $g, h$  sont des fonctions lisses. Comme  $f^*$  commute avec le produit extérieur  $\wedge$ , il vient

$$\begin{aligned} f^*(d\alpha) &= f^*(dg \wedge dh) = f^*(dg) \wedge f^*(dh) = d(f^*g) \wedge d(f^*h) \\ &= d(f^*g d(f^*h)) = d(f^*(gdh)) = d(f^*\alpha), \end{aligned}$$

la troisième égalité provenant du cas de degré zéro. Plus généralement,

$$\begin{aligned} f^*(d(\alpha \wedge \beta)) &= f^*(d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta) \\ &= f^*(d\alpha) \wedge f^*\beta + (-1)^k f^*\alpha \wedge f^*(d\beta) \\ &= d(f^*\alpha) \wedge f^*\beta + (-1)^k f^*\alpha \wedge d(f^*\beta) \\ &= d(f^*(\alpha \wedge \beta)). \end{aligned}$$

On peut donc conclure par récurrence sur le degré  $k$  de  $\alpha$ .  $\square$

**Exemple 3.3.25.** On considère à nouveau la 1-forme différentielle

$$\alpha(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Soit  $f(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  le changement de coordonnées polaires. Il vient

$$dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta \quad \text{et} \quad dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta,$$

donc  $f^*\alpha = d\theta$ . On en déduit une nouvelle preuve de ce que  $d\alpha = 0$ , puisque  $f^*d\alpha = d(f^*\alpha) = d^2\theta = 0$ .

**Définition 3.3.26.** Une forme différentielle  $\alpha$  est fermée si  $d\alpha = 0$ . Elle est dite exacte s'il existe une forme différentielle  $\beta$  telle que  $\alpha = d\beta$ .

Toute forme exacte est fermée puisque  $d \circ d = 0$ . Le lemme de Poincaré fournit une réciproque partielle, en assurant que toute forme différentielle fermée est localement exacte :

**Lemme 3.3.27** (Poincaré). Soit  $\alpha$  une  $k$ -forme différentielle fermée dans un ouvert  $U$  convexe de  $\mathbb{R}^n$ . Alors il existe une  $(k-1)$ -forme différentielle  $\beta$  dans  $U$  telle que  $\alpha = d\beta$ .

*Démonstration.* On ne perd rien en supposant que  $U$  contient l'origine. Nous ne traitons que le cas des formes de degré  $k = 1$  (le cas  $k > 1$  est similaire mais techniquement plus compliqué). Soit  $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$  telle que  $d\alpha = 0$ , i.e.  $\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$ . On pose

$$f(x) := \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 a_i(tx) dt.$$

Observons que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j} &= \int_0^1 a_j(tx) dt + \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 t \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(tx) dt \\ &= \int_0^1 a_j(tx) dt + \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 t \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(tx) dt \\ &= \int_0^1 a_j(tx) dt + \int_0^1 t \frac{d}{dt}(a_j(tx)) dt = a_j(x) \end{aligned}$$

où la deuxième égalité provient de  $d\alpha = 0$ , tandis que la dernière résulte d'une intégration par parties.

On peut obtenir une formule explicite également dans le cas des  $k$ -formes différentielles, nous renvons le lecteur aux références bibliographiques.  $\square$

### 3.3.5 Intégration des formes différentielles

#### Intégration des 1-formes différentielles

Soit  $M$  une variété différentielle et  $\alpha \in \Omega^1(M)$  une 1-forme différentielle. Si  $x \in M$ , alors  $\alpha(x) \in T_x^*M$  est une forme linéaire qui associe un scalaire  $\alpha(x) \cdot v$  à un vecteur tangent  $v \in T_xM$ . Soit  $\gamma : I \rightarrow M$  une courbe paramétrée régulière tracée sur  $M$ .

**Définition 3.3.28.** *L'intégrale de  $\alpha$  le long de  $\gamma$  est*

$$\int_{\gamma} \alpha := \int_{t \in I} \alpha(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Il est entendu ici que l'on intègre sur un intervalle compact, ou bien que l'on prend la limite (au sens de l'intégrale de Lebesgue) des intégrales sur une suite exhaustive de compacts.

Lorsque  $\alpha = df$  est la différentielle d'une fonction lisse, on obtient

$$\int_{\gamma} df = f \circ \gamma(b) - f \circ \gamma(a)$$

si  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ , en particulier  $\int_{\gamma} df = 0$  si  $\gamma$  est fermé.

**Lemme 3.3.29.** *Soit  $\phi : J \rightarrow I$  un difféomorphisme croissant, i.e. un changement admissible de paramétrisation qui préserve le sens de parcours de la courbe  $\Gamma = \gamma(I)$ . Soit  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi : J \rightarrow M$ . Alors*

$$\int_{\tilde{\gamma}} \alpha = \int_{\gamma} \alpha.$$

*Démonstration.* C'est une conséquence de la formule de changement de variables. Comme  $\tilde{\gamma}'(t) = \gamma'(\phi(t))\phi'(t)$ , il vient

$$\int_{t \in J} \alpha(\tilde{\gamma}(t)) \cdot \tilde{\gamma}'(t) dt = \int_{t \in J} \alpha(\gamma(\phi(t))) \cdot \tilde{\gamma}'(\phi(t))\phi'(t) dt = \int_{t \in I} \alpha(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

□

Notez par contre que le signe de l'intégrale change si l'on change le sens de parcours de la courbe  $\Gamma = \gamma(I)$ . On peut donc définir l'intégrale  $\int_{\Gamma} \alpha$  de  $\alpha$  le long d'une *courbe géométrique compacte orientée*  $\Gamma$ .

**Définition 3.3.30.** *Une courbe géométrique  $\Gamma$  est orientée si l'on choisit de façon continue une orientation de  $T_p\Gamma$ ,  $p \in \Gamma$ .*

Lorsque  $\Gamma$  est paramétrée, fixer une orientation revient à fixer un sens parcours de la courbe. Toutes les courbes (sous-variétés de dimension 1) sont

orientables. Il n'en est pas de même en dimension plus grande, comme nous l'avons indiqué au chapitre précédent, dans le cas des surfaces.

Pour définir  $\int_{\Gamma} \alpha$ , on utilise une *partition de l'unité* : on fixe un recouvrement de  $\Gamma$  par un nombre fini d'ouverts  $(U_i)_{1 \leq i \leq s}$  tels que  $\Gamma \cap U_i$  est paramétrée. On considère une famille  $(\chi_i)$  de fonctions lisses à support compact dans les  $U_i$  telles que  $\sum_{i=1}^s \chi_i \equiv 1$  et on pose

$$\int_{\Gamma} \alpha := \sum_{i=1}^s \int_{\Gamma \cap U_i} \chi_i \alpha.$$

Nous laissons le lecteur vérifier que cette définition est indépendante du choix des  $U_i$  et des  $\chi_i$ .

**Exemple 3.3.31.** *On considère encore la 1-forme différentielle*

$$\alpha(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

dans  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Son intégrale le long du cercle  $\Gamma_R$  centré à l'origine et de rayon  $R$  (orienté dans le sens trigonométrique) vaut  $2\pi$ .

Soit en effet  $\gamma : t \in (0, 2\pi) \mapsto (R \cos t, R \sin t) \in \mathbb{R}^2$  une paramétrisation de  $\Gamma_R$ . Il vient  $\gamma'(t) = R(-\sin t, \cos t)$ , donc

$$\int_{\Gamma_R} \alpha = \int_0^{2\pi} \left\{ -\frac{R \sin t}{R^2} (-R \sin t) + \frac{R \cos t}{R^2} (+R \cos t) \right\} dt = 2\pi.$$

La 1-forme  $\alpha$  est donc fermée mais pas exacte. Notez que  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  n'est pas convexe.

### Intégration des formes volumes

Soit  $f : M \rightarrow N$  une application lisse entre deux variétés différentielles. Soit  $\alpha$  une  $n$ -forme différentielle sur  $N$ . Rappelons que  $f^* \alpha$  est une  $n$ -forme différentielle sur  $M$  définie par

$$(f^* \alpha)_p(v_1, \dots, v_n) := \alpha_{f(p)}(d_p f(v_1), \dots, d_p f(v_n)).$$

**Définition 3.3.32.** *Soit  $V$  est une variété de dimension  $n$  admettant la paramétrisation régulière  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V$ . Soit  $\alpha$  une  $n$ -forme différentielle sur  $V$ . On définit*

$$\int_V \alpha := \int_U \alpha_{\varphi(x)}(d_x \varphi(e_1), \dots, d_x \varphi(e_n)) dx = \int_U \varphi^* \alpha$$

où  $(e_1, \dots, e_n)$  désigne les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

L'intégrale  $\int_U \varphi^* \alpha$  est bien (dé)finie si la forme  $\varphi^* \alpha$  est à support compact dans l'ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$ , ce que nous supposons dans la suite pour simplifier.

Une  $n$ -forme différentielle dans un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  s'écrit

$$h(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

où  $h$  est une fonction lisse. Si  $f : U' \rightarrow U$  est un difféomorphisme, alors

$$f^*(h(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = \text{Jac}(f) \cdot h \circ f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

où  $\text{Jac}(f)$  désigne le jacobien de  $f$ . Lorsque ce dernier est positif, la formule de changement de variables dans  $\mathbb{R}^n$  assure ainsi que

$$\int_U \varphi^* \alpha = \int_{U'} (\varphi \circ f)^* \alpha,$$

c'est-à-dire que, comme dans le cas des 1-formes,  $\int_V \alpha$  dépend de l'orientation de  $V$  mais pas de la paramétrisation  $\varphi$  :

**Définition 3.3.33.** Soit  $V$  une variété différentielle orientée de dimension  $n$  et soit  $\alpha$  une  $n$ -forme différentielle sur  $V$  à support compact. Soit  $(U_i)$  un recouvrement ouvert fini tel que  $U_i \cap V$  est paramétrée, et soit  $(\chi_i)$  une partition de l'unité. On pose

$$\int_V \alpha := \sum_i \int_{V \cap U_i} \chi_i \alpha.$$

Nous laissons le lecteur vérifier que cette définition ne dépend pas des choix qui ont été faits. La formule de changement de variables s'exprime à présent ainsi :

**Théorème 3.3.34.** Soit  $M$  et  $N$  deux variétés différentielles orientées de dimension  $n$ . Soit  $f : M \rightarrow N$  un difféomorphisme qui préserve l'orientation. Soit  $\alpha$  une  $n$ -forme différentielle sur  $N$ , alors

$$\int_M f^* \alpha = \int_N \alpha.$$

### Formule de Stokes

Soit  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  un intervalle compact. Le théorème d'intégration par parties assure que

$$\int_I df = \int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a) = \int_{\partial I} f$$

dés que  $f$  est suffisamment régulière. Notez que l'on impose implicitement un sens de parcours de l'intervalle  $I$  et un sens de parcours induit de son bord  $\partial I = \{b\} - \{a\}$  (qui n'est pas connexe). On souhaite généraliser cette formule aux sous-variétés de dimension arbitraire.

**Définition 3.3.35.** On dit qu'un ouvert  $\Omega \subset M$  d'une sous-variété  $M$  de dimension  $n$  est à bord lisse si, pour tout point  $p$  du bord  $\partial\Omega$ , il existe une paramétrisation régulière  $\varphi : B^n \rightarrow U \subset M$  avec  $\varphi(0) = p$ , telle que

$$U \cap \Omega = \varphi(\{x \in B^n, x_1 < 0\}) \quad \text{et} \quad U \cap \partial\Omega = \varphi(\{x \in B^n, x_1 = 0\}).$$

Nous laissons le lecteur vérifier que  $\partial\Omega$  hérite d'une structure de sous-variété différentielle de dimension  $(n - 1)$ .

On suppose que  $M$  est orientée et on fixe  $\omega$  une forme volume sur  $M$ . Si  $\eta$  est une  $(n - 1)$ -forme différentielle sur  $\partial\Omega$ , on dira que  $\eta$  est positive si localement  $dx_1 \wedge \eta = f\omega$  avec  $f$  positive. Cela permet de définir une orientation de  $\partial\Omega$ , on parle de *l'orientation induite* par celle de  $M$ .

La formule de Stokes est la généralisation du théorème d'intégration par parties, c'est un des outils les plus importants de l'analyse moderne :

**Théorème 3.3.36.** Soit  $\Omega \subset M$  un ouvert à bord lisse d'une variété différentielle orientée de dimension  $n$ . Soit  $\eta$  une  $(n - 1)$ -forme sur  $M$  à support compact. Alors

$$\int_{\Omega} d\eta = \int_{\partial\Omega} i^*\eta.$$

Le bord  $\partial\Omega$  est ici muni de l'orientation induite par celle de  $M$ , et on a noté  $i : \partial\Omega \rightarrow M$  l'application d'inclusion.

*Démonstration.* En utilisant une partition de l'unité, on se ramène au cas où  $\Omega = \{x_1 < 0\}$  est un ouvert à bord lisse de  $\mathbb{R}^n$  et  $\eta$  est à support compact dans  $\mathbb{R}^n$ . On écrit

$$\eta = \sum_{i=1}^n \eta_i(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \cdots \wedge dx_n$$

où  $\eta_i$  est une fonction lisse à support compact, et la notation  $\widehat{dx}_i$  signifie que le terme  $dx_i$  ne figure pas. Il vient

$$d\eta = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

et

$$i^*\eta = \eta_1(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

La formule d'intégration par parties et le fait que  $\eta_i$  est à support compact assurent que, pour  $i \geq 2$ ,

$$\int_{x_i \in \mathbb{R}} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_i} dx_i = 0 \quad \text{tandis que} \quad \int_{\{x_1 < 0\}} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} dx_1 = \eta_1(0, x_2, \dots, x_n).$$

Il résulte donc du théorème de Fubini que

$$\int_{\Omega} d\eta = \int_{x'} \int_{\{x_1 < 0\}} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} dx_1 = \int_{\partial\Omega} i^*\eta.$$

□

### 3.4 Variétés abstraites

Les sous-variétés différentielles de  $\mathbb{R}^n$  sont les analogues non-linéaires des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$ . Comme en algèbre linéaire, il est très utile de s'affranchir de l'espace ambiant et de définir la notion de variétés différentielles abstraites, même si celles-ci peuvent (au final) être plongées dans  $\mathbb{R}^n$ .

#### 3.4.1 Variétés topologiques

**Définition 3.4.1.** *Un espace topologique séparé  $M$  à base dénombrable est une variété topologique de dimension  $n$  si tout point  $p \in M$  a un voisinage ouvert  $V_p$  homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .*

On parle également de variété  $\mathcal{C}^0$ , ou d'espace localement euclidien. Rappelons qu'une base d'un espace topologique est une collection d'ouverts telle que tout ouvert de l'espace s'écrit comme réunion des éléments de la base. Cette hypothèse a de nombreuses conséquences.

On appelle dimension topologique de  $M$  l'entier  $n$ . Elle est bien définie (i.e.  $V_p$  ne peut pas être homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}^p$ ,  $p \neq n$ ) grâce au théorème de Brouwer<sup>5</sup>.

Nous listons sans démonstration quelques-unes des propriétés d'une variété topologique  $M$  :

1. il y a, au plus, un nombre dénombrable de composantes connexes ;
2. la topologie est métrisable ;
3. il existe des partitions continues de l'unité ;
4. tout ouvert de  $M$  est une variété topologique de même dimension ;
5.  $M$  est connexe si et seulement si elle est connexe par arcs ;
6.  $M$  est localement compacte.

**Définition 3.4.2.** *Un couple  $(U, \varphi)$ , où  $U$  est un ouvert de  $M$  et  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un homéomorphisme de  $U$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , s'appelle une carte de  $M$ .*

*Une collection de cartes  $(U_i, \varphi_i)$  qui recouvrent  $M$  est appelée un atlas (topologique) de  $M$ .*

**Définition 3.4.3.** *Soit  $M$  une variété topologique. Si  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$  sont deux cartes telles que  $U \cap V \neq \emptyset$ , l'application*

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

*est un homéomorphisme appelé changement de carte, ou fonction de transition.*

---

5. Luitzen Egbertus Jan Brouwer, mathématicien hollandais (1881-1966).

### 3.4.2 Variétés différentielles

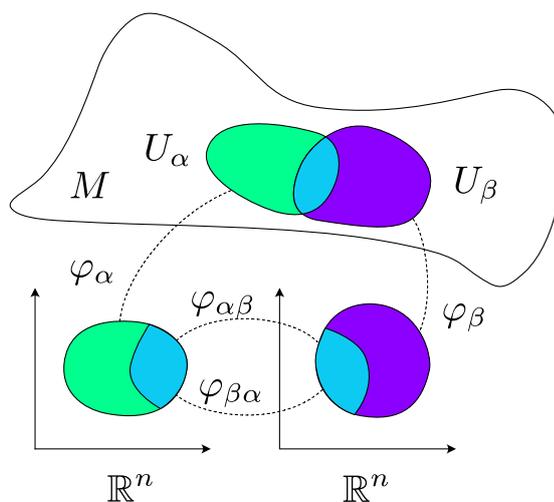
**Définition 3.4.4.** On dit qu'un atlas est différentiable si les changements de cartes sont des difféomorphismes.

On dit qu'une carte  $(U, \varphi)$  est compatible avec un atlas différentiable  $(U_i, \varphi_i)$  si les changements de coordonnées  $\varphi_i \circ \varphi^{-1}$  et  $\varphi \circ \varphi_i^{-1}$  sont différentiables sur leurs domaines de définition.

On dit que deux atlas différentiables sont compatibles si chaque carte de l'un est compatible avec l'autre atlas. Notez que la réunion de deux atlas différentiables compatibles est encore un atlas différentiable. Chaque atlas différentiable est donc contenu dans un unique atlas différentiable *maximal* (la réunion de tous les atlas différentiables compatibles avec lui).

**Définition 3.4.5.** Une structure différentiable sur une variété topologique  $M$  est la donnée d'un atlas différentiable maximal.

Une variété différentielle de dimension  $n$  est une variété topologique de dimension  $n$  munie d'une structure différentiable.



#### Exemple 3.4.6.

1) L'exemple modèle est bien entendu  $\mathbb{R}^n$  muni de l'atlas à une carte  $(\mathbb{R}^n, \varphi)$  où  $\varphi : x \in \mathbb{R}^n \mapsto x \in \mathbb{R}^n$  est l'identité. Tout ouvert de  $\mathbb{R}^n$  est également une variété différentielle de dimension  $n$ .

2) Toute surface régulière de  $\mathbb{R}^3$  munie de l'atlas associé à une famille de paramétrisations régulières est une variété différentielle de dimension 2. Plus généralement, toute sous-variété différentielle de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $d$  munie de ses paramétrisations régulières définit une variété de dimension  $d$ .

3) On considère  $M = \mathbb{R}$  muni des deux atlas à une carte  $(\mathbb{R}, \varphi_1)$  et  $(\mathbb{R}, \varphi_2)$  où

$$\varphi_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \varphi_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 \in \mathbb{R}.$$

Ces deux atlas ne sont pas compatibles, ils induisent donc deux structures différentiables distinctes pour  $\mathbb{R}$ . Celles-ci sont cependant difféomorphes (voir Exercice 91).

**Exemple 3.4.7.** Un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  est une variété différentielle (pour la structure différentielle canonique). Le groupe linéaire

$$GL(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$$

est un ouvert de  $\mathbb{R}^{n^2} \simeq \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ , c'est donc une variété différentielle de dimension  $n^2$ .

Plus généralement, toute sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  (telle que définie plus haut) est une variété différentielle.

**Exemple 3.4.8.** L'espace projectif  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  est l'ensemble des droites de  $\mathbb{R}^{n+1}$  qui passent par l'origine. Une telle droite est définie par un vecteur directeur non nul  $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ . La droite est alors l'ensemble

$$\{(tx_0, \dots, tx_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Deux vecteurs directeurs d'une même droite sont équivalents pour la relation d'équivalence « multiplication par un réel non nul ». On note

$$[x_0 : \dots : x_n] := \{(tx_0, \dots, tx_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \in \mathbb{R}^*\}$$

la classe d'équivalence correspondante : c'est la droite privée de l'origine. Il s'ensuit que l'espace projectif réel est un quotient

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \{[x]\} = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{R}^*.$$

On le munit de la topologie quotient : un ensemble  $U$  de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  est ouvert ssi  $\pi^{-1}U$  est ouvert dans  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ , où  $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  est la projection canonique. Nous laissons le lecteur vérifier que cette topologie est métrisable, et qu'ainsi  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  est une variété topologique de dimension  $n$ .

On définit un atlas différentiel comme suit. On recouvre  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  par  $(n+1)$  cartes  $(U_i, \varphi_i)$ ,  $0 \leq i \leq n$ , où

$$U_i = \{[x] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \mid x_i \neq 0\}$$

et

$$\varphi_i : [x] \in U_i \mapsto (x_0/x_i, \dots, x_{i-1}/x_i, x_{i+1}/x_i, \dots, x_n/x_i) \in \mathbb{R}^n.$$

Le lecteur vérifiera sans peine que les fonctions de transition  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  sont lisses (là où elles sont définies) : leurs fonctions coordonnées sont des fractions rationnelles simples dont les dénominateurs ne s'annulent pas.

### 3.4.3 Espace tangent, différentielle

Tout le calcul différentiel local peut être transféré aux variétés, en composant avec des cartes locales (à la source et au but).

#### Applications différentiables

Soit  $M$  et  $N$  deux variétés différentielles de dimension  $m$  et  $n$ , et  $f : M \rightarrow N$  une application continue. Soit  $p \in M$ , et  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$  des cartes de  $M, N$  au voisinage de  $p, f(p)$ . L'application

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

est différentiable si et seulement s'il en est de même de toute autre application  $\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}$  associée à des cartes  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$  et  $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$  : cela résulte aisément de ce que les changements de carte sont des difféomorphismes.

**Définition 3.4.9.** Soit  $M$  et  $N$  deux variétés différentielles de dimension  $m$  et  $n$ , et  $f : M \rightarrow N$  une application continue.

L'application  $f$  est différentiable si  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  est différentiable pour toutes les cartes  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$  de  $M$  et  $N$ .

Lorsque  $N = \mathbb{R}$ , on parle de fonction différentiable. Lorsque  $M \subset \mathbb{R}$  est un intervalle, on obtient la notion de courbe (paramétrée) tracée sur  $N$ .

De la même façon, on dira qu'un sous-ensemble  $V$  d'une variété différentielle  $M$  (de dimension  $n$ ) est une *sous-variété* différentielle, si et seulement si pour toute carte  $(U, \varphi)$  de  $M$ ,  $\varphi(U \cap V)$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemple 3.4.10.** Soit  $M$  et  $N$  deux variétés différentielles munies des atlas respectifs  $\{(U_i, \varphi_i)\}$ ,  $\{(V_j, \psi_j)\}$ . Alors  $\{(U_i \times V_j, (\varphi_i, \psi_j))\}$  définit un atlas différentiel pour  $M \times N$ , et les applications de projection  $\pi_1 : M \times N \rightarrow M$  et  $\pi_2 : M \times N \rightarrow N$  sont différentiables.

#### Fibré tangent et champs de vecteurs

**Définition 3.4.11.** Soit  $M$  une variété différentielle et  $p \in M$ .

1) Deux courbes  $\gamma_1, \gamma_2 : ]-\varepsilon, +\varepsilon[ \rightarrow M$  telles que  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$  sont dites équivalentes si, pour toute carte  $(\varphi, U)$  de  $M$  au voisinage de  $p \in M$ , on a  $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$ . On appelle vecteur tangent à  $p$  en  $M$  la classe d'équivalence de telles courbes.

2) L'espace tangent  $T_p M$  est l'ensemble des vecteurs tangents à  $M$  en  $p$ .

Notez qu'il suffit de vérifier l'égalité  $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$  pour une seule carte  $(U, \varphi)$ . Une telle carte identifie  $T_p M$  à  $\mathbb{R}^n$ , où  $n = \dim M$ . Un changement de carte donne une identification qui diffère de la première par un isomorphisme (la différentielle du changement de carte), ainsi  $T_p M$  a une structure d'espace vectoriel réel de dimension  $n$ .

Soit  $M$  et  $N$  deux variétés différentielles, et  $f : M \rightarrow N$  une application différentiable. Si  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M$  est une courbe tracée sur  $M$  passant par  $p = \gamma(0)$ , et si  $\psi : V_{f(p)} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une carte de  $N$  au voisinage de  $f(p)$ , l'application  $\psi \circ f \circ \gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  est différentiable et sa différentielle en zéro approxime  $f(p)$  dans la direction  $v = \gamma'(0)$  à l'ordre 1, ce qui motive la définition suivante :

**Définition 3.4.12.** Soit  $M$  et  $N$  deux variétés différentielles, et  $f : M \rightarrow N$  une application différentiable. L'application linéaire tangente à  $f$  en  $p \in M$ , notée  $D_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ , est l'application obtenue par passage au quotient de  $\gamma \mapsto \psi \circ f \circ \gamma$ . Elle est appelée la différentielle de  $f$  en  $p$ .

Cette définition est un peu lourde ; en pratique on utilise des cartes locales au but et à la source pour faire des calculs et établir les propriétés désirées.

**Définition 3.4.13.** Une application différentiable  $f : M \rightarrow N$  est

- une immersion si, pour tout  $p \in M$ ,  $D_p f$  est injective ;
- une submersion si, pour tout  $p \in M$ ,  $D_p f$  est surjective ;

**Lemme 3.4.14.** Soit  $f : M \rightarrow N$  une application différentiable.

- 1) Si  $f$  est une immersion surjective, alors  $\forall p \in M, T_{f(p)} N = \text{Im } D_p f$ .
- 2) Si  $f$  est une submersion, alors pour tout  $q \in f(M)$ ,  $M_q := f^{-1}(q)$  est une sous-variété de  $M$  telle que pour tout  $x \in M_q$ ,  $T_x M_q = \ker D_x f$ .

Notez en particulier que si  $V \subset M$  est une sous-variété de  $M$ , alors  $T_p V$  s'identifie à un sous-espace vectoriel de  $T_p M$ .

Vous vérifierez que les fibres  $f^{-1}(q)$  d'une submersion sont des variétés (lorsque  $q$  est dans l'image de l'application  $f$ ) et qu'une immersion envoie un petit voisinage ouvert sur une variété.

*Démonstration.* On utilise des cartes locales pour  $M$  au voisinage d'un point  $p$ , et  $N$  au voisinage de  $f(p)$  pour se ramener au cas des sous-variétés de  $\mathbb{R}^m$  (resp.  $\mathbb{R}^n$ ) qui a déjà été traité.  $\square$

Nous avons observé que la réunion  $TM$  des espaces tangents à une sous-variété  $M$  de dimension  $n$  de  $\mathbb{R}^N$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^{2N}$  de dimension  $2n$ . Il en va de même pour une variété abstraite  $M$ . Considérons

$$TM := \coprod_{p \in M} T_p M = \{(p, v) \mid p \in M \text{ et } v \in T_p M\}$$

et  $\pi : (p, v) \in TM \rightarrow p \in M$  la projection canonique sur  $M$ .

On munit le fibré tangent  $TM$  d'une structure différentielle comme suit. Si  $(\varphi, U)$  est une carte pour  $M$ , on considère la carte  $(D\varphi, \pi^{-1}U)$  de  $TM$  définie par

$$D\varphi(p, v) = (\varphi(p), D_p \varphi(v)).$$

Nous laissons le lecteur vérifier que les fonctions de transition de l'atlas correspondant sont bien lisses.

**Définition 3.4.15.** Soit  $M$  une variété différentielle. Un champ de vecteurs est une section lisse du fibré tangent  $TM$ , i.e. une application différentiable  $X : M \rightarrow TM$  telle que  $\pi \circ X = \text{Id}$ .

Autrement dit, pour tout  $p \in M$ ,  $X(p) \in T_pM$  est un vecteur tangent à  $M$  en  $p$ , et l'application  $p \mapsto X(p)$  est lisse.

### Plongements

**Définition 3.4.16.** Soit  $M$  et  $N$  deux variétés différentielles. Une application différentiable  $f : M \rightarrow N$  est un plongement si c'est une immersion et un homéomorphisme sur son image.

**Théorème 3.4.17.** Toute variété différentielle abstraite compacte  $M$  de dimension  $d \in \mathbb{N}$  se plonge dans  $\mathbb{R}^n$  pour  $n$  assez grand.

Ce célèbre résultat de Whitney assure que toute variété abstraite peut être réalisée comme une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  : s'il existe un plongement  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , alors  $f(M)$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  et la variété abstraite  $M$  est difféomorphe à  $f(M)$ .

*Démonstration.* Soit  $\{U_i, \varphi_i\}$ ,  $1 \leq i \leq s$  un atlas différentiel fini de  $M$ . On peut trouver des ouverts  $V_i$  et des fonctions lisses  $\chi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  telles que

- $\bar{V}_i \subset U_i$  et les ouverts  $V_i$  recouvrent encore  $M$  ;
- $\chi_i \equiv 1$  sur  $V_i$  et  $\chi_i \equiv 0$  hors de  $U_i$ .

Une telle famille de fonctions est appelée *partition de l'unité* subordonnée au recouvrement  $\{U_i\}$  si on impose de plus  $\sum_i \chi_i \equiv 1$  et  $0 \leq \chi_i \leq 1$ .

On peut prolonger les applications  $\varphi_i \chi_i$  par 0 dans  $M \setminus U_i$  et obtenir ainsi des applications lisses à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . On vérifie alors que l'application

$$\Phi : x \in M \mapsto (\chi_1, \dots, \chi_s, \varphi_1 \chi_1, \dots, \varphi_s \chi_s) \in \mathbb{R}^{s(d+1)}$$

est un plongement. En effet,  $\Phi$  est lisse par construction et

- $\Phi$  une immersion car  $D_x \Phi$  contient un bloc injectif  $D_x \varphi_i$  si  $x \in V_i$  ;
- $\Phi$  est injective : si  $\Phi(x) = \Phi(y)$  alors  $\chi_i(x) = \chi_i(y)$  pour tout  $i$ , donc  $x, y$  appartiennent à un même  $V_i$ , et  $\varphi_i(x) = \varphi_i(y) \implies x = y$ .

On conclut en observant qu'une immersion injective définie sur une variété compacte est automatiquement un homéomorphisme sur son image, donc un plongement (voir Exercice 66).  $\square$

On peut composer un plongement  $\Phi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  avec une projection orthogonale générique  $\pi_H$  sur un hyperplan de  $\mathbb{R}^n$ . Tant que  $n \geq 2d + 1$ , un lemme de Sard assure que la composée  $\pi_H \circ \Phi$  est encore un plongement ; on peut ainsi plonger  $M$  dans  $\mathbb{R}^{2d+1}$ . On peut même la plonger dans  $\mathbb{R}^{2d}$ , mais la preuve est plus difficile et requiert des techniques très différentes.

La borne sur la dimension est optimale, on verra des exemples de surfaces compactes (bouteille de Klein, plan projectif réel) qui ne peuvent pas être réalisées comme des surfaces compactes de  $\mathbb{R}^3$ .

### Difféomorphismes

**Définition 3.4.18.** Soit  $M$  et  $N$  deux variétés différentielles de dimension  $m, n$ . Une application  $f : M \rightarrow N$  lisse est un difféomorphisme si elle est bijective et si  $f^{-1} : N \rightarrow M$  est lisse.

Lorsque  $N = M$ , on note  $\text{Diff}(M)$  l'ensemble des difféomorphismes de  $M$ , c'est un groupe pour la composition. Il existe beaucoup de difféomorphismes :

**Théorème 3.4.19.** Soit  $M$  une variété connexe de dimension  $d$ . Le groupe  $\text{Diff}(M)$  agit transitivement sur  $M$ .

*Démonstration.* On décompose la preuve en deux temps.

Étape 1. Pour toute boule  $B$  de  $\mathbb{R}^d$ , on note  $\text{Diff}_0(B)$  l'ensemble des difféomorphismes de  $\mathbb{R}^d$  qui sont égaux à l'identité hors de la boule. On commence par montrer que  $\text{Diff}_0(B)$  agit transitivement sur la boule  $B(r_0)$  de rayon  $r_0 > 0$  pour une constante absolue  $r_0 > 0$ .

Quitte à dilater et translater, on peut supposer que  $B$  est la boule unité. Soit  $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse à support compact, avec  $0 \leq \chi \leq 1$ ,  $\chi = 1$  sur l'intervalle  $[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$  et  $\chi = 0$  hors de l'intervalle  $[-1, 1]$  (fonction plateau). La dérivée d'une telle fonction est uniformément bornée par une constante  $M_0 > 0$ . On pose  $r_0 = (2M_0)^{-1}$  et on considère l'application lisse

$$\phi : x \in \mathbb{R}^d \mapsto (x_1 + r_0\chi(x_1)\chi(x_2^2 + \dots + x_d^2), x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Observons que  $\phi(0) = (r_0, 0, \dots, 0)$ ,  $\phi$  est l'identité hors de  $B$ , et

- $\phi$  est bijective car  $x_1 \mapsto x_1 + \lambda r_0\chi(x_1)$  est une fonction strictement croissante pour tout  $\lambda \in [0, 1]$  de par notre choix de  $r_0$  ;
- $Jac(\phi) = 1 + r_0\chi'(x_1)\chi(x_2^2 + \dots + x_d^2) > 0$ , donc l'application  $\phi$  est localement inversible.

Il résulte du théorème d'inversion locale que  $\phi \in \text{Diff}_0(B)$ .

En précomposant  $\phi^{-1}$  avec une rotation, on obtient la propriété de transitivité annoncée, puisque  $O(d, \mathbb{R})$  agit transitivement sur les sphères.

Étape 2. Soit  $a \in M$  et  $(U, \varphi)$  une carte de  $M$  telle que  $\varphi(a) = 0 \in \mathbb{R}^d$ . On fixe une boule  $B \subset \varphi(U)$  et on considère  $\phi \in \text{Diff}_0(B)$ . L'application

$$F = \begin{cases} \varphi^{-1} \circ \phi \circ \varphi & \text{dans } \varphi^{-1}(B) \\ \text{Id} & \text{dans } M \end{cases}$$

est un élément de  $\text{Diff}_0(\varphi^{-1}(B)) \subset \text{Diff}(M)$ . Il résulte de plus de l'Étape 1 que  $\text{Diff}_0(\varphi^{-1}(B))$  agit transitivement dans un petit voisinage du point  $a$ .

Un point  $b \in M$  étant fixé, on considère

$$\Omega = \{x \in M, \exists F \in \text{Diff}(M) \text{ tel que } F(b) = x\}.$$

L'ensemble  $\Omega$  est un ouvert non-vide d'après ce qui précède. Il est également fermé : si  $x_j \in \Omega \rightarrow a \in M$ , alors  $x_j \in \varphi^{-1}(B)$  pour  $j$  assez grand, et la construction montre que l'on peut envoyer  $x_j$  sur  $a$  par un difféomorphisme, donc  $b$  sur  $a$  par composition. On conclut par connexité que  $\Omega = M$ .  $\square$

### 3.4.4 Formes différentielles et orientabilité

#### Fibré cotangent

Le fibré cotangent est l'ensemble des espaces tangents duaux :

**Définition 3.4.20.** Soit  $M$  une variété différentielle de dimension  $d$ . Le fibré cotangent est

$$T^*M := \cup_{p \in M} T_p^*M.$$

Nous laissons le lecteur vérifier que  $T^*M$  admet une structure de variété différentielle de dimension  $2d$ . On note

$$\tilde{\pi} : (p, \xi) \in T^*M \mapsto p \in M$$

la projection canonique.

**Définition 3.4.21.** Soit  $M$  une variété différentielle de dimension  $d$ . Une section lisse  $\alpha : M \rightarrow T^*M$  de  $\tilde{\pi}$  est une 1-forme différentielle.

On note  $\Omega^1(M)$  l'espace des 1-formes différentielles.

Nous laissons le lecteur vérifier que cette définition coïncide bien avec celle utilisée dans le cadre des variétés plongées dans  $\mathbb{R}^n$ . Si  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction lisse, alors pour tout  $p \in M$ , la différentielle

$$d_p f : T_p M \rightarrow \mathbb{R} \simeq T_{f(p)} \mathbb{R}$$

est une forme linéaire sur l'espace tangent  $T_p M$ , donc

$$df : p \in M \mapsto d_p f \in T_p^* M \subset T^* M$$

est une section lisse de  $T^*M$ .

**Définition 3.4.22.** Une 1-forme différentielle est exacte si c'est la différentielle d'une fonction lisse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

Une 1-forme différentielle  $\alpha$  fermée n'est pas nécessairement exacte. Toute 1-forme différentielle fermée est localement exacte (lemme de Poincaré). L'être mathématique qui décrit l'obstruction pour une 1-forme différentielle fermée d'être globalement exacte est un groupe : c'est le premier *groupe de cohomologie de de Rham*<sup>6</sup> de la variété  $M$ .

On peut étendre au contexte des variétés abstraites le produit, la différentielle extérieure, et toutes les opérations rencontrées dans le cadre des variétés plongées. Nous noterons  $\Omega^k(M)$  les formes différentielles de degré  $k$ .

---

6. Georges de Rham (1903-1990), mathématicien et alpiniste suisse, spécialiste de topologie différentielle.

### Variétés orientables

On définit l'orientabilité d'une variété abstraite de la même façon que pour les sous-variétés différentielles de  $\mathbb{R}^N$  :

**Définition 3.4.23.** *Soit  $M$  une variété différentielle. On dit que  $M$  est orientable s'il existe une forme volume, i.e. une  $n$ -forme différentielle sur  $M$  qui ne s'annule nulle part.*

De façon équivalente,  $M$  est orientable si et seulement si on peut choisir un atlas différentiel dont les changements de cartes ont un jacobien positif (i.e. préservent l'orientation). C'est également équivalent au fait de pouvoir choisir de façon continue une orientation des espaces tangents.

**Exemple 3.4.24.** *Soit  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une submersion propre et  $H = F^{-1}(0)$ . On sait que  $H$  est une hypersurface compacte de  $\mathbb{R}^n$  telle que, pour tout  $p \in H$ ,  $T_p H = \psi + \{v \in \mathbb{R}^n, \langle v, \nabla F \rangle = 0\}$ . Une telle hypersurface est orientable. Soit en effet  $\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  la forme volume canonique de  $\mathbb{R}^n$ , on définit une  $(n-1)$ -forme différentielle sur  $H$  en posant*

$$\alpha(p)(v_1, \dots, v_{n-1}) = \omega(v_1, \dots, v_{n-1}, \nabla F).$$

*Si  $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  est une base de  $T_p H$ , alors  $\{v_1, \dots, v_{n-1}, \nabla F\}$  est une base de  $\mathbb{R}^n$ , donc  $\omega(v_1, \dots, v_{n-1}, \nabla F) \neq 0$ ,  $\alpha$  est donc une forme volume.*

Vous vérifierez qu'un produit de variétés différentielles admet une structure de variété différentielle et qu'un produit de variétés orientables est orientable. Comme le cercle unité  $S^1$  est orientable, on en déduit que le tore

$$\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n \simeq (S^1)^n$$

est une variété compacte orientable de dimension  $n$ .

**Proposition 3.4.25.** *Le plan projectif  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  n'est pas orientable. Plus généralement, les espaces projectifs  $\mathbb{P}^{2k}(\mathbb{R})$  ne sont pas orientables.*

*Démonstration.* Rappelons que  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  est l'ensemble des droites passant par l'origine dans  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Une telle droite intersecte la sphère unité  $S^n$  en deux points antipodaux, on a ainsi une application lisse surjective

$$\pi : S^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \sim S^n / \{\sigma\}$$

qui permet de considérer  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  comme le quotient de  $S^n$  par le groupe à deux éléments engendré par l'involution antipodale  $\sigma$ .

Soit  $\omega$  une forme volume sur  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  que l'on suppose orientable. Alors  $\pi^* \omega$  est une forme volume sur  $S^n$ , donc  $\pi^* \omega = f \omega_{S^n}$  où  $\omega_{S^n}$  désigne une forme volume sur  $S^n$  et  $f$  est une fonction lisse de signe constant.

Notons que  $\sigma^* \omega = \omega$  car  $\pi \circ \sigma = \pi$ , tandis que  $\sigma^* \omega_{S^n} = (-1)^{n+1} \omega_{S^n}$ . On en déduit, pour  $n$  pair, que  $f \circ \sigma = -f$ , ce qui contredit que  $f$  est de signe constant. C'est donc que les espaces  $\mathbb{P}^{2k}(\mathbb{R})$  ne sont pas orientables.  $\square$

On représente un point du cercle unité  $S^1$  par un angle  $\theta \in [0, 2\pi[$  (passage au quotient pour la relation d'équivalence  $\theta \sim \theta + 2\pi$ ). Le quotient du tore produit  $S^1 \times S^1$  par le groupe à deux éléments engendré par l'involution

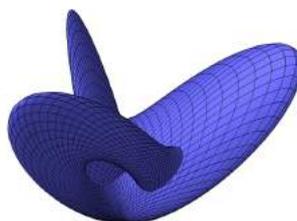
$$(\theta, \varphi) \mapsto (-\theta, \varphi + \pi)$$

est une surface compacte non orientable appelée *bouteille de Klein*<sup>7</sup>.

Le plan projectif et la bouteille de Klein ne peuvent pas être réalisés (plongés) dans  $\mathbb{R}^3$ , puisque toute surface compacte de  $\mathbb{R}^3$  est orientable. On considère, à la place, des immersions pour les représenter dans  $\mathbb{R}^3$ . Voici un exemple pour la bouteille de Klein :



Et voici la *surface de Boy*, immersion du plan projectif  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}^3$  :



La surface de Boy peut être vue comme une sphère dont on a recollé deux à deux les points antipodaux. On peut également la construire en recollant le bord d'un disque sur le bord d'un ruban de Möbius.

Ces surfaces peuvent être plongées dans  $\mathbb{R}^4$  (comme promis par le théorème de Whitney). Vous vérifierez par exemple que l'application

$$f : [x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mapsto \frac{(yz, zx, xy, x^2 + 2y^2 + 3z^2)}{x^2 + y^2 + z^2} \in \mathbb{R}^4$$

est un plongement du plan projectif dans  $\mathbb{R}^4$ .

---

7. Felix Christian Klein, mathématicien allemand (1849-1925). Il a énoncé le très influent programme d'Erlangen, qui ramène l'étude des différentes géométries à celle de leurs groupes de symétrie respectifs.

## 3.5 Variétés complexes et groupes de Lie

Nous considérons à présent deux grandes classes d'exemples de variétés qui ont des propriétés remarquables.

### 3.5.1 Variétés complexes

Soit  $M$  une variété différentielle de dimension paire  $2n$ . On identifie  $\mathbb{R}^{2n}$  à  $\mathbb{C}^n$  pour un choix de structure complexe. Un atlas  $(U_i, \varphi_i)$  est alors constitué d'ouverts  $U_i$  recouvrant  $M$ , et d'homéomorphismes

$$\varphi_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{C}^n$$

à valeurs dans  $\mathbb{C}^n$ .

**Définition 3.5.1.** *On dit que l'atlas  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  est holomorphe si les changements de carte  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  sont des biholomorphismes, i.e. des difféomorphismes holomorphes.*

Une application  $f = (f_1, \dots, f_n) : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}^n$  est holomorphe si chacune de ses fonctions coordonnées  $f_i : U \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction holomorphe, i.e. vérifie les équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f_i}{\partial \bar{z}_j} = 0, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

**Définition 3.5.2.** *Une variété complexe  $M$  de dimension complexe  $n = \dim_{\mathbb{C}} M$  est une variété topologique de dimension (réelle)  $2n$  munie d'un atlas holomorphe maximal.*

**Exemple 3.5.3.** *Les ouverts de  $\mathbb{C}^n$  et les sous-variétés complexes de  $\mathbb{C}^n$  sont des exemples de variétés complexes.*

**Exemple 3.5.4.** *L'espace projectif complexe  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ , ensemble des droites complexes de  $\mathbb{C}^{n+1}$  passant par l'origine, est une variété complexe compacte de dimension complexe  $n$  :*

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{C}^*.$$

Lorsque  $n = 1$ , on obtient la sphère de Riemann<sup>8</sup> :  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq S^2$ .

**Lemme 3.5.5.** *Toute variété complexe de dimension complexe  $n$  est une variété différentielle réelle de dimension réelle  $2n$  qui est orientable.*

*Démonstration.* La preuve se résume à observer que les jacobiens réels des changements de carte sont tous positifs : ce sont les modules au carré des jacobiens complexes.  $\square$

8. Georg Friedrich Bernhard Riemann, mathématicien allemand très influent (1826-1866).

Réciproquement, toute surface différentiable réelle orientable admet une structure complexe (un atlas holomorphe maximal) : on parle alors de *surface de Riemann*.

### Surfaces de Riemann compactes

Toute l'analyse complexe se transporte au cas des surfaces de Riemann, en pré/post-composant par les cartes locales. Les fonctions holomorphes  $f : S \rightarrow \mathbb{C}$  vérifient par exemple le *principe du maximum*, il n'y a donc aucune fonction holomorphe non constante si  $S$  est compacte :

**Proposition 3.5.6.** *Soit  $f : S \rightarrow S'$  une application holomorphe entre deux surfaces de Riemann. Si  $S$  est compacte, alors*

- soit  $f$  est constante,
- soit  $f$  est surjective et  $S'$  est également compacte.

*Démonstration.* Si  $f$  n'est pas constante, alors c'est une application ouverte et  $f(S)$  est un ouvert de  $S'$ . Si  $S$  est compacte, il en va de même de  $f(S)$  (image continue d'un compact), donc  $f(S)$  est à la fois non-vide, ouvert et fermé dans  $S'$  qui est connexe, donc  $S' = f(S)$  est compacte et  $f$  est surjective.  $\square$

Les surfaces de Riemann compactes sont classifiées topologiquement par leur *genre* (nombre de « trous ») ; leur classification à biholomorphisme près fait l'objet de la théorie des *espaces de module*, un sujet de recherches actuelles. Nous indiquons à présent trois exemples fondamentaux.

### Droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$

La droite projective complexe  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  est l'ensemble des droites complexes de  $\mathbb{C}^2$  passant par l'origine. Une telle droite a pour équation affine

$$\{(w_0, w_1) \in \mathbb{C}^2, z_0 w_1 = z_1 w_0\}$$

où  $(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . L'équation de la droite est inchangée si on remplace  $(z_0, z_1)$  par  $(\lambda z_0, \lambda z_1)$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ . Réciproquement,  $(z_0, z_1)$  et  $(z'_0, z'_1)$  définissent la même droite si et seulement s'il existe  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  tel que  $(z'_0, z'_1) = (\lambda z_0, \lambda z_1)$ . Ainsi

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} / \sim$$

où  $(z_0, z_1) \sim (z'_0, z'_1)$  s'il existe  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  tel que  $(z'_0, z'_1) = (\lambda z_0, \lambda z_1)$ . On note  $[z_0 : z_1]$  la classe d'équivalence correspondante et on appelle coordonnées homogènes les « coordonnées »  $(z_0, z_1)$  d'un point  $[z_0 : z_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ .

**Proposition 3.5.7.**  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  est une surface de Riemann compacte simplement connexe, homéomorphe à la sphère  $S^2 \simeq \overline{\mathbb{C}}$ .

*Démonstration.* On obtient presque toutes les droites complexes passant par l'origine en considérant les équations  $w_1 = zw_0$  avec  $z \in \mathbb{C}$ ; il s'agit des droites pour lesquelles  $z_0 \neq 0$ , et il manque uniquement la droite d'équation  $w_0 = 0$  qui correspond au point  $[0 : 1]$ . On note

$$U_0 := \{[z] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}), z_0 \neq 0\}.$$

Cet ouvert est isomorphe à  $\mathbb{C}$  via l'application

$$\phi_0 : [z_0 : z_1] \in U_0 \mapsto z = z_1/z_0 \in \mathbb{C}.$$

L'application réciproque est  $\phi_0^{-1} : z \in \mathbb{C} \mapsto [1 : z] \in U_0 \subset \mathbb{P}^1$ . On définit de même  $U_1 := \{[z] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}), z_1 \neq 0\}$ . Cet ouvert est isomorphe à  $\mathbb{C}$  via

$$\phi_1 : [z_0 : z_1] \in U_1 \mapsto z = z_0/z_1 \in \mathbb{C}$$

dont l'application réciproque est

$$\phi_1^{-1} : z \in \mathbb{C} \mapsto [z : 1] \in U_1 \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C}),$$

il contient toutes les droites passant par l'origine sauf celle d'équation  $w_1 = 0$ .

L'ouvert d'intersection  $U_0 \cap U_1$  a pour image  $\mathbb{C}^*$  par  $\phi_0$  et  $\phi_1$ . On a ainsi défini un atlas  $\{(U_0, \phi_0), (U_1, \phi_1)\}$  de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  dont les changements de cartes

$$\phi_0 \circ \phi_1^{-1} : z \in \mathbb{C}^* \mapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{C}^*$$

et  $\phi_1 \circ \phi_0^{-1}(z) = 1/z$  sont des biholomorphismes. Ainsi  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  est une surface de Riemann. Observons enfin que l'application

$$(z_0, z_1) \in S^3 = \{(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2, |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\} \mapsto [z_0 : z_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$

est continue et surjective, donc  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  est compacte, et l'application

$$z \in \mathbb{C} \sim U_0 \mapsto \phi_0^{-1}(z) = [1 : z] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = U_0 \cup \{[0 : 1]\} \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

s'étend en un homéomorphisme de  $\overline{\mathbb{C}}$  sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  en posant  $\phi_0^{-1}(\infty) = [0 : 1]$ . Il s'ensuit que  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq S^2$  est simplement connexe.  $\square$

### Tores complexes

Soit  $V$  un espace vectoriel réel de dimension finie  $n$ .

**Définition 3.5.8.** *Un sous-groupe  $\Gamma \subset V$  est discret si, pour tout compact  $K$  de  $V$ , l'ensemble  $K \cap \Gamma$  est fini.*

Le sous-groupe  $\mathbb{Z}^n$  de  $\mathbb{R}^n$  est discret. Si on fixe une norme sur  $V$ ,  $\Gamma$  est discret si et seulement s'il ne contient qu'un nombre fini de vecteurs de norme au plus 1. Nous vous laissons démontrer la caractérisation suivante.

**Proposition 3.5.9.** *Un sous-groupe  $\{0\} \neq \Gamma \subset V$  est discret si et seulement s'il existe  $r \in [1, n] \cap \mathbb{N}$  et des vecteurs  $e_1, \dots, e_r$  linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$  tels que*

$$\Gamma = \mathbb{Z}e_1 + \dots + \mathbb{Z}e_r.$$

L'entier  $r$  s'appelle le *rang* de  $\Gamma$ , c'est la dimension du sous-espace vectoriel de  $V$  engendré par  $\Gamma$ .

**Définition 3.5.10.** *Un réseau est un sous-groupe discret de rang maximal, i.e. égal à la dimension de  $V$ .*

On munit l'espace quotient  $V/\Gamma$  de la topologie quotient : un ensemble est ouvert si et seulement si son image réciproque par la projection canonique  $\pi : V \rightarrow V/\Gamma$  est un ouvert de  $V$ . La proposition précédente montre, lorsque  $\Gamma$  est un réseau, que  $V/\Gamma$  est un compact homéomorphe à  $(S^1)^n$ .

On suppose à présent que  $V$  est un espace vectoriel complexe de dimension complexe  $N$  (sa dimension réelle est donc  $2N$ ) et  $\Gamma$  est un réseau de  $V$  (sous-groupe discret de rang  $2N$ ). Le tore  $X = V/\Gamma$  est une variété complexe compacte de dimension complexe  $N$ . Pour  $N = 1$ , on obtient donc une surface de Riemann.

**Proposition 3.5.11.** *Le tore  $X = \mathbb{C}/\Gamma$  admet une structure complexe qui en fait une surface de Riemann compacte non simplement connexe, homéomorphe à  $S^1 \times S^1$ .*

*Démonstration.* On obtient une structure complexe en considérant la famille de cartes  $f_i : z \in U_i \mapsto \pi(z) \in \pi(U_i)$ , où  $\{U_i, i \in I\}$  est un recouvrement de  $V$  par des ouverts qui ne rencontrent aucun de leurs translatés (non nuls).

Les changements de carte sont des translations par des éléments de  $\Gamma$ , ce sont bien des fonctions holomorphes là où elles sont définies. On obtient ainsi une variété complexe compacte de dimension complexe  $N$ , en particulier  $X = \mathbb{C}/\Gamma$  est une surface de Riemann compacte homéomorphe à  $S^1 \times S^1$ .

Il existe donc de nombreux chemins lisses fermés que l'on ne peut pas déformer sur un point, ils sont tous engendrés par les deux lacets correspondants à chaque cercle  $S^1$ .  $\square$

Une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe si et seulement si  $f \circ \pi : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe et  $\Gamma$ -périodique. En particulier,  $f : X = \mathbb{C}/\Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe si et seulement si  $f \circ \pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  est holomorphe et doublement périodique, elle est donc constante.

Il existe par contre de nombreuses fonctions  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$  méromorphes, elles correspondent aux fonctions  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$  méromorphe doublement périodiques. Un exemple célèbre est la fonction  $\mathcal{P}$  de Weierstrass que vous étudierez dans les exercices.

La métrique euclidienne étant invariante par translation, elle passe au quotient et définit sur  $X = \mathbb{C}/\Gamma$  une métrique plate (courbure de Gauss nulle) et une distance qui ressemble à la distance euclidienne.

### Surfaces de Riemann hyperboliques

Soit  $g \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Soit  $D \subset \mathbb{R}^2$  le disque unité fermé et  $D_1, \dots, D_g$  des disques deux à deux disjoints contenus dans  $D$ ,

$$D_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 \leq r_i^2\}.$$

On considère

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (1 - [x^2 + y^2]) \prod_{i=1}^g ((x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 - r_i^2) \in \mathbb{R}$$

et

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = f(x, y)\}.$$

C'est une sous-variété compacte et connexe de  $\mathbb{R}^3$  qui n'est pas simplement connexe : elle a  $g$  trous.

On peut montrer que  $M$  admet une structure de surface de Riemann compacte et que son revêtement universel est le disque unité  $\Delta$ , ce qui permet de réaliser  $S$  comme un quotient du disque unité par un sous-groupe d'automorphismes de  $Aut(\Delta)$ .

### Les trois géométries

Le théorème d'uniformisation de Riemann affirme que :

**Théorème 3.5.12.** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{P}^1$  un domaine simplement connexe. Alors*

- soit  $\Omega = \mathbb{P}^1$  ;
- soit  $\Omega = \mathbb{P}^1 \setminus \{a\}$  est biholomorphe à  $\mathbb{C}$  ;
- soit  $\Omega$  est biholomorphe au disque unité.

Il y a donc trois types de domaines simplement connexes  $\Omega$  sur la sphère de Riemann. Chacun est muni d'une distance (sphérique, euclidienne, hyperbolique) invariante par le groupe  $Aut(\Omega)$ . Le théorème d'uniformisation se généralise et montre que le revêtement universel de toute surface de Riemann appartient à l'un des trois types ci-dessus.

Les surfaces de Riemann compactes sont classifiées, à difféomorphisme près, par leur genre (nombre de trous). La classification à difféomorphisme holomorphe près s'exprime en termes de la trichotomie déjà rencontrée :

- toute surface de Riemann de genre  $g = 0$  est biholomorphe à la sphère de Riemann  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ , c'est la seule surface de Riemann simplement connexe ;
- une surface de Riemann de genre  $g = 1$  est biholomorphe à un tore complexe  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[\tau]$ , où  $\Im(\tau) > 0$  (on parle de courbe elliptique) ;
- les classes d'équivalence de surfaces de Riemann de genre  $g \geq 2$  sont très nombreuses ; leur géométrie très riche fait l'objet de travaux actuels (en géométrie hyperbolique, géométrie algébrique, etc.).

### 3.5.2 Groupes de Lie

**Définition 3.5.13.** *Un groupe de Lie est une variété  $G$  munie d'une structure de groupe différentielle, i.e. telle que les opérations de multiplication*

$$(g_1, g_2) \in G \times G \mapsto g_1 \cdot g_2 \in G$$

*et d'inversion*

$$g \in G \mapsto g^{-1} \in G$$

*sont lisses.*

#### Exemples 3.5.14.

1. *Le groupe général linéaire  $GL(n, \mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices réelles inversibles de taille  $n$ . C'est un ouvert de  $\mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$  (image réciproque de  $\mathbb{R}^*$  par l'application déterminant qui est lisse), donc une variété réelle de dimension  $n^2$ . L'application  $(A, B) \mapsto A \cdot B$  est lisse sur  $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$  donc sur  $GL(n, \mathbb{R})$  également; l'application  $A \mapsto A^{-1}$  est lisse sur  $GL(n, \mathbb{R})$  puisque l'inverse s'exprime de façon lisse par*

$$A^{-1} = \frac{{}^t \text{Com} A}{\det A}$$

*où  $\text{Com} A$  désigne la matrice des cofacteurs de  $A$ .*

2. *De façon analogue, le groupe  $GL(n, \mathbb{C})$  est un groupe de Lie qui est une sous-variété réelle de  $\mathbb{R}^{4n^2}$  de dimension  $4n^2$ ; c'est également une variété complexe de dimension complexe  $n^2$ .*
3. *Le groupe orthogonal  $O(n, \mathbb{R})$  est le sous-groupe fermé de  $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$  défini par les conditions  $A^t A = \text{Id}$ . Vous vérifierez dans l'Exercice 75 que c'est une sous-variété réelle de  $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$  de dimension  $\frac{n(n-1)}{2}$ .*
4. *Le groupe unitaire  $U(n, \mathbb{C})$  est le sous-groupe fermé de  $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$  défini par les conditions  $A^t \bar{A} = \text{Id}$ . C'est une sous-variété réelle de dimension  $n^2$  (mais attention ce n'est pas une sous-variété complexe).*

Dans la suite nous noterons  $K$  en lieu et place de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , pour éviter des répétitions inutiles.

**Proposition 3.5.15.** *Un groupe de Lie est une variété orientable.*

*Démonstration.* Soit  $G$  un groupe de Lie, on note  $e$  son élément neutre. On choisit une  $n$ -forme linéaire  $\eta$  sur  $T_e G$  non nulle. La translation à droite de vecteur  $g$ ,  $h \in G \mapsto h + g \in G$ , est un difféomorphisme qui induit un isomorphisme  $g^* : T_g G \rightarrow T_e G$  entre espaces tangents. La  $n$ -forme linéaire  $g^* \eta$  est non nulle et fournit une orientation de  $T_g G$ .

Il s'ensuit que  $g \mapsto g^* \eta$  est une  $n$ -forme différentielle sur  $G$  qui ne s'annule nulle part et fournit donc une orientation de  $G$ . Notez que cette forme est invariante par translation. C'est la généralisation du cas  $G = \mathbb{R}^n$  muni de  $\eta(x) = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ .  $\square$

**Proposition 3.5.16.** *Le groupe spécial linéaire*

$$SL(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$$

des matrices carrées de taille  $n$  et de déterminant 1 est une sous-variété de dimension  $n^2 - 1$  de  $\mathbb{R}^{n^2} \simeq \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ . Son espace tangent en  $\text{Id}$  est

$$T_{\text{Id}}SL(n, \mathbb{R}) = \{H \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) ; \text{tr}H = 0\}.$$

*Démonstration.* Le lecteur vérifiera dans l'exercice 68 que

$$\det(A + H) = \det A + \text{tr}({}^t\text{Com}A \cdot H) + o(H).$$

La forme linéaire  $D_A \det(H) = \text{tr}({}^t\text{Com}A \cdot H)$  est non nulle si et seulement si la comatrice de  $A$  n'est pas nulle. Il s'ensuit que  $\det$  est une submersion au voisinage de chaque matrice  $A$  de rang  $\geq n - 1$ , en particulier au voisinage de  $A = \text{Id}$ . La Proposition 3.2.2 assure donc que  $SL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1} \det(\{\text{Id}\})$  est une hypersurface.  $\square$

### Décomposition polaire

Un résultat classique d'algèbre linéaire stipule que toute matrice inversible  $A \in GL(n, \mathbb{R})$  se décompose de façon unique comme produit  $A = O \cdot S$  d'une matrice orthogonale  $O \in O(n, \mathbb{R})$  et d'une matrice symétrique définie positive  $S \in \text{Sym}^+(n, \mathbb{R})$  : c'est sa décomposition polaire. Nous montrons ici que cette décomposition est également très régulière :

**Théorème 3.5.17.** *L'application*

$$\psi : (O, S) \in O(n, \mathbb{R}) \times \text{Sym}^+(n, \mathbb{R}) \mapsto O \cdot S \in GL(n, \mathbb{R})$$

est un difféomorphisme.

*Démonstration.* On décompose la preuve en deux temps.

*Étape 1.* Notons que l'ensemble  $\text{Sym}^+(n, \mathbb{R})$  des matrices symétriques définies positives est un ouvert de l'ensemble  $\text{Sym}(n, \mathbb{R})$  des matrices symétriques, qui est un sous-espace vectoriel (donc une sous-variété) de dimension  $\frac{n(n+1)}{2}$  de  $M(n, \mathbb{R}) \sim \mathbb{R}^{n^2}$ . L'espace tangent  $T_S \text{Sym}^+(n, \mathbb{R})$  en un point  $S \in \text{Sym}^+(n, \mathbb{R})$  s'identifie à  $\text{Sym}(n, \mathbb{R})$ .

On commence par observer que l'application

$$\phi : S \in \text{Sym}^+(n, \mathbb{R}) \mapsto S^2 \in \text{Sym}^+(n, \mathbb{R})$$

est un difféomorphisme. En effet, l'application  $\phi$  est

- bien définie (le carré d'une matrice symétrique est symétrique) ;
- bijective comme on le voit en diagonalisant en base orthonormée ;
- lisse comme restriction de l'application lisse  $A \mapsto A^2$  sur  $M(n, \mathbb{R})$  ;

- localement inversible car  $\phi(S + H) = \phi(S) + (HS + SH) + o(H)$  et  $D_S\phi : H \in \text{Sym}(n, \mathbb{R}) \mapsto HS + SH \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$  est bijective.

Pour justifier ce dernier point, on peut observer que si  $\{e_i\}$  désigne une base de vecteurs propres de  $S$  associés aux valeurs propres  $\lambda_i > 0$ , la condition  $HS + SH = 0$  se traduit par  $SHe_i = -\lambda He_i$ , donc  $He_i = 0$  pour tout  $i$  (les valeurs propres de  $S$  sont toutes positives), d'où  $H = 0$ .

*Étape 2.* Si  $A = O \cdot S$  avec  $O$  orthogonale et  $S$  symétrique définie positive, on observe que  ${}^tAA = S^2 = \phi(S)$  donc  $S = \phi^{-1}({}^tAA)$ . Par ailleurs, pour toute matrice inversible  $A \in GL(n, \mathbb{R})$ , on vérifie que la matrice  $O = A\phi^{-1}({}^tAA)$  est orthogonale. Ainsi  $\psi : (O, S) \in O(n, \mathbb{R}) \times \text{Sym}^+(n, \mathbb{R}) \mapsto O \cdot S \in GL(n, \mathbb{R})$  est lisse, bijective et d'inverse lisse  $\psi^{-1} : A \mapsto (A\phi^{-1}({}^tAA), \phi^{-1}({}^tAA))$ . Il s'ensuit que  $\psi$  est un difféomorphisme.  $\square$

### Application exponentielle

Étant donnée  $A \in \mathcal{M}(n, K)$ , on pose

$$\exp A := \sum_{j \geq 0} \frac{A^j}{j!}.$$

Cette série converge normalement sur toute partie bornée de l'espace de Banach  $\mathcal{M}(n, K)$  muni d'une de ses normes. En effet, comme celles-ci sont toutes équivalentes (dimension finie), on peut en choisir une qui est matricielle, i.e. vérifie  $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ . Il s'ensuit que  $\|A^j\| \leq \|A\|^j$  donc

$$\sum_{j \geq 0} \frac{\|A^j\|}{j!} \leq \sum_{j \geq 0} \frac{\|A\|^j}{j!} = \exp \|A\| < +\infty.$$

Le théorème de Cayley<sup>9</sup>-Hamilton<sup>10</sup> assure que  $A^n$  s'exprime en fonction des  $A^j$ ,  $0 \leq j \leq n-1$ . L'exponentielle  $\exp A$  est donc en fait un polynôme de degré  $n-1$  en la matrice  $A$ . Attention cependant : les coefficients de ce polynôme dépendent bien sûr de la matrice  $A$  ! Quelques propriétés importantes de l'exponentielle de matrice sont rappelées dans l'exercice 77.

### Sous groupes fermés de $GL(n, K)$

On commence par s'intéresser aux sous-groupes à un paramètre de  $GL(n, K)$ , i.e. aux morphismes continus du groupe additif  $\mathbb{R}$  dans  $GL(n, K)$ .

**Proposition 3.5.18.** *Les sous-groupes à un paramètre de  $GL(n, K)$  sont les  $t \mapsto \exp(tX)$ , où  $X \in \mathcal{M}(n, K)$ .*

9. Arthur Cayley (1821-1895), mathématicien anglais.

10. Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), physicien irlandais.

*Démonstration.* Soit  $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(t) \in GL(n, K)$  un sous-groupe à un paramètre. Supposons  $\varphi$  différentiable. Comme  $\varphi(s+t) = \varphi(s) \cdot \varphi(t)$ , on obtient  $\varphi(0) = \text{Id}$ , et pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\varphi'(t) = \varphi(t) \cdot \varphi'(0).$$

Posons  $X = \varphi'(0)$ . Alors  $t \mapsto \exp(-tX)\varphi(t)$  est constante et vaut  $\text{Id}$  en  $t = 0$ , donc  $\varphi(t) = \exp(tX)$ . Il reste à justifier que  $\varphi$  est différentiable. Soit  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse à support compact concentré près de l'origine, telle que  $\int_{\mathbb{R}} \rho = 1$ . La convolée  $\varphi * \rho$  est une application lisse qui vérifie

$$\varphi * \rho(t) = \int_{\mathbb{R}} \rho(t-s)\varphi(s)ds = \int_{\mathbb{R}} \rho(s)\varphi(t-s)ds = A \cdot \varphi(t)$$

avec  $A = \int_{\mathbb{R}} \rho(s)\varphi(-s)ds$ . Comme  $\varphi$  est continue et  $\varphi(0) = \text{Id}$ , on en déduit que  $A$  est inversible si le support de  $\rho$  est suffisamment proche de l'origine. Il en résulte que  $\varphi(t) = A^{-1}\varphi * \rho(t)$  est lisse.  $\square$

**Théorème 3.5.19.** *Soit  $G$  un sous-groupe fermé de  $GL(n, K)$ . Alors  $G$  est une sous-variété réelle de  $GL(n, K)$  dont l'espace tangent en  $\text{Id}$  est*

$$\mathcal{G} := \{X \in \mathcal{M}(n, K) ; \exp(tX) \in G \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}\}.$$

Tout sous-groupe fermé de  $GL(n, K)$  est donc un groupe de Lie. C'est le cas, plus généralement, de tout sous-groupe fermé d'un groupe de Lie.

*Démonstration.* L'ensemble

$$\mathcal{G} := \{X \in \mathcal{M}(n, K) ; \exp(tX) \in G \forall t \in \mathbb{R}\},$$

s'appelle l'algèbre de Lie du groupe  $G$ . C'est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}(n, K)$  qui est stable par le crochet de Lie  $(X, Y) \mapsto [X, Y] := XY - YX$ , comme vous le vérifierez.

Le point clef de la démonstration est de montrer, lorsque  $G$  est fermé, qu'il existe un voisinage  $V$  de la matrice nulle dans  $\mathcal{G}$  et un voisinage  $W$  de  $\text{Id}$  dans  $G$ , tels que l'application exponentielle réalise un homéomorphisme entre  $V$  et  $W$ . C'est l'analogie du résultat démontré au chapitre précédent dans le cas des surfaces plongées dans  $\mathbb{R}^3$ .

Le théorème d'inversion locale assure que l'exponentielle réalise un difféomorphisme entre un voisinage  $V'$  de 0 dans  $\mathcal{M}(n, K)$  et un voisinage  $W'$  de  $\text{Id}$  dans  $GL(n, K)$ , puisque nous avons calculé  $D_0 \exp = \text{Id}$ . On pose  $V = V' \cap \mathcal{G}$  et  $W' = W \cap G$ . On obtient bien ainsi des voisinages ouverts de 0 et  $\text{Id}$  dans  $\mathcal{G}$  et  $G$ . De plus,  $\exp$  envoie bien  $\mathcal{G}$  dans  $G$  donc  $V$  dans  $W'$ . La difficulté est de montrer le caractère surjectif de cette restriction. Nous renvoyons le lecteur à [Warner, chapitre 3].  $\square$

**Exemple 3.5.20.** *Le groupe  $SO(n, \mathbb{R})$  est un sous-groupe fermé, c'est donc une sous-variété de  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Son espace tangent en  $\text{Id}$  est l'ensemble des matrices antisymétriques, comme le lecteur le vérifiera.*

## 3.6 Classifications

Nous évoquons sans démonstration quelques résultats qui vous donneront une petite idée de recherches récentes en topologie et géométrie différentielle.

### 3.6.1 Structures différentielles

Une question fondamentale en topologie différentielle est de classer toutes les structures différentiables non difféomorphes existant sur un espace topologique donné. S. Donaldson<sup>11</sup> a démontré en 1985 qu'il existe une infinité de telles structures sur  $\mathbb{R}^4$ . Celles qui ne sont pas difféomorphes à la structure différentiable usuelle de  $\mathbb{R}^4$  sont appelées structures différentiables exotiques. Ce travail lui a valu la médaille Fields en 1986. Pour  $n \neq 4$ , il existe une unique structure différentiable sur  $\mathbb{R}^n$ , à difféomorphisme près.

J. Milnor a démontré en 1956 qu'il existe 28 structures différentiables distinctes sur la sphère  $S^7$ . Ces travaux lui ont valu la médaille Fields en 1962. E. Brieskorn<sup>12</sup> a montré en 1966 que l'on peut retrouver ces 28 structures en considérant l'intersection de la variété complexe

$$\{z \in \mathbb{C}^5; z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^3 + z_5^{6k-1} = 0\},$$

$1 \leq k \leq 28$ , avec une petite sphère centrée à l'origine. Ces sphères sont appelées sphères de Brieskorn.

C'est un problème encore ouvert aujourd'hui de déterminer le nombre de structures différentiables de la sphère  $S^4$ .

Le théorème de plongement de H. Whitney assure que toute variété différentielle de dimension  $n$  peut être plongée dans  $\mathbb{R}^{2n}$ . L'astuce que Whitney inventa pour démontrer ce résultat en 1936 a joué un rôle important dans la preuve de Smale de la conjecture de Poincaré en dimension  $n \geq 5$ .

### 3.6.2 Topologie de basse dimension

#### Courbes

Comme nous l'avons entraperçu au chapitre 1, il existe une seule variété compacte sans bord de dimension 1, c'est le cercle unité :

**Théorème 3.6.1.** *Toute variété compacte connexe de dimension (réelle) 1 est difféomorphe au cercle  $S^1$ .*

On peut bien entendu se poser d'autres questions plus fines, en imposant au difféomorphisme de préserver une métrique, etc. Nous renvoyons le lecteur au chapitre 1, où il a été démontré que deux courbes planes sont *globalement isométriques* si et seulement si elles ont même courbure. Un résultat similaire a également été démontré pour les courbes gauches.

11. Sir Simon Kirwan Donaldson, mathématicien britannique (1957-).

12. Egbert Valentin Brieskorn (1936-2013), mathématicien allemand.

## Surfaces

**Théorème 3.6.2.** *Toute variété compacte connexe orientable de dimension (réelle) 2 est difféomorphe*

- soit à la sphère  $S^2$ ,
- soit à un tore à  $g$  trous, où  $g = \text{genre}(X)$ .

Rappelons qu'un tore à  $g$  trous peut être défini comme une somme connexe de  $g$  copies d'un tore de révolution. Un tore à deux trous peut être réalisé comme un épaississement de la lemniscate de Bernoulli. L'exercice 70 vous propose une construction d'un tore à  $g$  trous.

Les surfaces compactes non orientables sont difféomorphes à une somme connexe de  $g$  copies de l'espace projectif  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ .

Il s'ensuit que toute surface compacte (connexe, sans bord) est donc déterminée, à homéomorphisme (ou difféomorphisme) près, par deux informations : sa caractéristique d'Euler et son orientabilité.

## Variétés de dimension trois

**Théorème 3.6.3** (Perelman 2003). *Toute variété compacte simplement connexe (sans bord) de dimension trois est homéomorphe à la 3-sphère.*

Cet énoncé fut proposé par H. Poincaré en 1904 et a fait l'objet de travaux considérables tout au long du XX<sup>e</sup> siècle, où il fut connu sous le nom de *conjecture de Poincaré*.

On peut plus généralement se demander si *toute variété compacte de dimension  $n$  qui est homotopiquement équivalente à la sphère unité est homéomorphe à la sphère unité*. Cet énoncé a été démontré

- en dimension  $n \geq 5$  par S. Smale<sup>13</sup> (médaille Fields en 1966) ;
- en dimension  $n = 4$  par M. Freedman<sup>14</sup> (médaille Fields en 1986).

Le cas  $n = 3$  a résisté très longtemps et suscité plusieurs preuves incorrectes. La preuve de Perelman<sup>15</sup> est un tour de force et une surprise : alors que le problème relève de la topologie, la démonstration utilise une machinerie analytico-géométrique spectaculaire : l'étude du flot de Ricci, une approche initiée par R. Hamilton<sup>16</sup>.

La médaille Fields a été décernée à Perelman (qui l'a refusée) en 2006 pour ses travaux, qui démontrent également la conjecture de géométrisation de Thurston<sup>17</sup> (médaille Fields en 1982), ce qui achève la classification des variétés de dimension trois.

---

13. Stephen Smale, mathématicien américain (1930-).

14. Michael Hartley Freedman, mathématicien américain (1951-).

15. Grigori Iakovlevitch Perelman, mathématicien russe (1966-).

16. Richard S. Hamilton, mathématicien américain (1943-).

17. William Paul Thurston, mathématicien américain (1946-2012).

### 3.6.3 Variétés complexes

Il est probablement illusoire de penser un jour classifier les variétés différentielles réelles de dimension quatre. Une approche raisonnable est d'imposer des conditions restrictives qui limitent le champ d'investigation.

On peut par exemple se limiter aux variétés qui admettent une structure complexe. Toutes les surfaces réelles *orientables* admettent une telle structure, ce sont les surfaces de Riemann.

Les surfaces de Riemann (i.e. variétés complexes de dimension 1) compactes sont classifiées, à difféomorphisme près, par leur genre. Il est plus naturel de les classifier à difféomorphisme holomorphe près (biholomorphisme). On obtient alors, comme on l'a déjà partiellement indiqué :

- toute surface de Riemann de genre  $g = 0$  est biholomorphe à  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  ;
- une surface de Riemann de genre  $g = 1$  est biholomorphe à un tore complexe  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[\tau]$ , où  $\Im(\tau) > 0$  ;
- il y a de très nombreuses classes d'équivalences de surfaces de Riemann de genre  $g \geq 2$ , elles forment une variété complexe de dimension  $3g - 3$ .

La classification des surfaces complexes compactes (i.e. les variétés différentielles réelles compactes de dimension quatre qui admettent une structure complexe) a été entreprise par les géomètres algébristes italiens au XIX<sup>e</sup> siècle, puis complétée par les écoles russes (notamment O. Zariski<sup>18</sup>) et japonaises (notamment K. Kodaira<sup>19</sup>, médaille Fields en 1954).

Une classe particulière de surfaces reste encore mystérieuse, ce sont les « surfaces de la classe VII<sub>0</sub> ». Elles occupent les recherches passionnées de mathématiciens actuels.

En dimension (complexe) supérieure à trois, les choses se compliquent et on se restreint parfois à considérer les variétés complexes compactes *projectives*, i.e. celles qui peuvent se plonger dans un espace projectif complexe  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . Ces variétés ont une structure plus riche et se situent au carrefour de l'analyse (complexe), de la géométrie différentielle et de la géométrie algébrique, permettant un joyeux mélange des points de vue et des techniques.

La classification de ces variétés en dimension (complexe) trois a été un tour de force du mathématicien japonais S. Mori<sup>20</sup> (médaille Fields en 1990). L'extension de ces résultats en dimension plus grande fait l'objet de recherches actuelles<sup>21</sup>, redoutables et passionnantes.

---

18. Oscar Zariski, mathématicien russe (1899-1986) très influent dans le domaine de la géométrie algébrique.

19. Kunihiko Kodaira, mathématicien japonais (1915-1997), fondateur de l'école japonaise de géométrie algébrique.

20. Shigefumi Mori, mathématicien japonais (1951-).

21. Caucher Birkar, mathématicien iranien (1978-), a obtenu la médaille Fields en 2018 pour ses contributions sur ce sujet.

### 3.7 Exercices

#### Plongements

**Exercice 65.** On considère l'application

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto (x^2 - y^2, 2xy) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Montrer que  $f$  est une application surjective qui est un difféomorphisme local au voisinage de chacun des points de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , mais que ce n'est pas un difféomorphisme global.

**Exercice 66.** Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  et  $V \subset \mathbb{R}^p$  deux ouverts, et soit  $f : U \rightarrow V$  une application lisse. On suppose que  $f$  est une immersion injective et propre. Montrer que c'est un plongement.

**Exercice 67.**

1) Montrer que l'application

$$f : t \in ]-1, +\infty[ \mapsto (t^2 - 1, t(t^2 - 1)) \in \mathbb{R}^2$$

est une immersion injective qui n'est pas un plongement.

2) Montrer que l'application

$$g : t \in \mathbb{R} \mapsto (t^2, t^3) \in \mathbb{R}^2$$

est injective, propre, mais n'est pas un plongement.

**Exercice 68.**

1) Montrer que l'application déterminant

$$\det : A \in \mathbb{R}^{n^2} \simeq \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \mapsto \det A \in \mathbb{R}$$

est telle que

$$\det(A + H) = \det A + \operatorname{tr}({}^t\operatorname{Com}A \cdot H) + o(H)$$

où  $\operatorname{Com}A$  désigne la comatrice de  $A$ .

2) Vérifier que  $\det$  est une submersion au voisinage de chaque matrice  $A$  de rang  $\geq n - 1$ , en particulier au voisinage de  $A = \operatorname{Id}$ .

**Sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$** 

**Exercice 69.** Soit  $M \subset \mathbb{R}^n$  une sous-variété de dimension  $d$  et  $g : V_p \rightarrow \mathbb{R}^{m-d}$  une submersion définie dans un voisinage  $V_p$  de  $p \in M$ , telle que  $V_p \cap M = g^{-1}g\{p\}$ . Montrer que

$$T_p M = p + \ker D_p g.$$

En déduire que  $T_p M$  est un sous-espace affine de dimension  $d$ .

**Exercice 70.** Soit  $g \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $D \subset \mathbb{R}^2$  le disque unité fermé et  $D_1, \dots, D_g$  des disques disjoints deux à deux, contenus dans  $D$ ,

$$D_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 \leq r_i^2\}.$$

On considère

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (1 - [x^2 + y^2]) \prod_{i=1}^g ((x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 - r_i^2) \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer que

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = f(x, y)\}$$

est une sous-variété compacte et connexe de  $\mathbb{R}^3$ . Représentez-la.

2) Vérifier que  $M$  n'est pas simplement connexe. Combien a-t-elle de trous ?

**Exercice 71.**

1) Soit  $S^2$  la sphère unité. Montrer que l'application

$$f : (x, y, z) \in S^2 \mapsto (-x, -y, -z) \in S^2$$

est un difféomorphisme.

2) Montrer que le paraboloïde  $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$  est difféomorphe à un plan.

3) On considère dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  la quadrique

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mid \|x\|^2 - \|y\|^2 = 1\}.$$

Montrer que  $Q$  est difféomorphe à  $S^{n-1} \times \mathbb{R}^p$ .

**Exercice 72.** On note  $S^n$  la sphère unité de  $\mathbb{R}^{n+1}$  et on considère

$$f : x \in S^n \mapsto x_{n+1} \in \mathbb{R}.$$

Montrer que les points critiques de  $f$  sont précisément les pôles Nord et Sud.

**Exercice 73.** Soit  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une application linéaire et

$$H = \left\{ x \in \mathbb{R}^n, \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + L(x) = 1 \right\}$$

où  $A = (a_{ij})$  est une matrice symétrique inversible.

Montrer que  $H$  est soit vide, soit un cône, soit une sous-variété lisse de dimension  $n - 1$ , difféomorphe à  $S^k \times \mathbb{R}^{n-1-k}$ , où  $k$  est le nombre de valeurs propres positives de  $A$ .

**Exercice 74.** Soit  $M \subset \mathbb{R}^n$  une sous-variété,  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  et

$$f : x \in M \mapsto \langle x, v \rangle \in \mathbb{R}.$$

Montrer que  $p \in M$  est un point critique de  $f$  si et seulement si  $v \in N_p M$ . Retrouver ainsi les résultats de l'exercice 72.

**Exercice 75.** Montrer que le groupe orthogonal

$$O(n, \mathbb{R}) = \{ A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \mid A^t A = \text{Id} \}$$

et le groupe spécial orthogonal

$$SO(n, \mathbb{R}) = \{ A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \mid A^t A = \text{Id} \text{ et } \det A = 1 \}$$

sont des sous-variétés de  $\mathbb{R}^{n^2}$  dont on précisera la dimension.

**Exercice 76.** Montrer que l'espace tangent à  $SO(n, \mathbb{R})$  en  $\text{Id}$  est l'espace des matrices antisymétriques.

**Exercice 77.** Montrer que l'application  $A \in \mathcal{M}(n, K) \mapsto \exp A \in \mathcal{M}(n, K)$  est une application différentiable telle que  $D_0 \exp = \text{Id}$ , qui vérifie :

- 1)  $\exp(A + B) = \exp A \cdot \exp B$  si  $AB = BA$  ;
- 2)  $\exp(-A) = \exp A^{-1}$  ;
- 3)  $\exp({}^t A) = {}^t \exp A$  ;
- 4)  $\det \exp A = \exp(\text{tr} A)$  ;
- 5)  $\exp \mathcal{M}(n, \mathbb{C}) = GL(n, \mathbb{C})$  ;

**Formes différentielles**

**Exercice 78.** Soit  $X, Y$  et  $Z$  trois champs de vecteurs. Montrer l'identité de Jacobi :

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [X, Z]] + [Z, [Y, X]] = 0.$$

**Exercice 79.** On considère le champ de vecteurs  $X = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Montrer qu'un polynôme  $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  est homogène de degré  $k$  si et seulement si  $L_X P = kP$ .

**Exercice 80.** Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface régulière. Le gradient d'une fonction lisse  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  est une application lisse  $\nabla f : p \in S \rightarrow \nabla f(p) \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$  telle que

$$\langle \nabla f(p), v \rangle_p = Df_p(v)$$

pour tout  $v \in T_p(S)$ .

1) Montrer que si  $E, F$  et  $G$  sont les coefficients de la première forme fondamentale dans une paramétrisation  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , alors

$$\nabla f = \frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2} \varphi_u + \frac{f_v E - f_u F}{EG - F^2} \varphi_v.$$

2) On fixe  $p \in S$  tel que  $\nabla f(p) \neq 0$  et on laisse varier  $v$  dans le cercle unité de  $T_p(S)$  ( $|v| = 1$ ). Montrer que  $Df_p(v)$  est maximal si et seulement si

$$v = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}.$$

3) Si  $\nabla f \neq 0$  pour tout point de la courbe  $C = \{q \in S \mid f(q) = c\}$ , montrer que  $C$  est régulière et que  $\nabla f$  est normal à  $C$  en tout point de  $C$ .

**Exercice 81.** Soit  $S \subset \mathbb{R}^n$  une hypersurface et  $q \in \mathbb{R}^n \setminus S$ . Montrer que

$$f : p \in S \mapsto \|p - q\| \in \mathbb{R}$$

est différentiable, et vérifier que  $p \in S$  est un point critique de  $f$  si et seulement si la droite joignant  $p$  à  $q$  est normale à  $S$  au point  $p$ .

**Exercice 82.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $1 \leq p \leq n$ . On dit qu'une forme  $p$ -linéaire alternée  $\varphi : E^p \rightarrow \mathbb{R}$  est décomposable s'il existe des formes linéaires  $\varphi_1, \dots, \varphi_p$  telles que  $\varphi = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_p$ .

1) Montrer que toute forme  $n$ -linéaire alternée est décomposable.

2) Montrer que toute forme  $(n-1)$ -linéaire alternée est décomposable.

3) Montrer que si  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  sont des formes linéaires indépendantes, alors la 2-forme  $\eta = \alpha \wedge \beta + \gamma \wedge \delta$  est indécomposable.

**Exercice 83.** Trouver une application  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  lisse vérifiant  $\phi(0) = 0$  et telle que la forme différentielle

$$\omega(x, y) = \frac{2xy}{(1+x^2)^2} dx + \phi(x) dy$$

soit exacte sur  $\mathbb{R}^2$ . On calculera les primitives de  $\omega$ .

**Exercice 84.** Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$  l'équation  $d\alpha = \omega$  pour les 2-formes  $\omega$  suivantes :

- 1)  $dx_1 \wedge dx_2$  ;
- 2)  $x_2 dx_2 \wedge dx_3$  ;
- 3)  $(x_1^2 + x_2^2) dx_1 \wedge dx_2$  ;
- 4)  $\cos x_1 dx_1 \wedge dx_2$ .

**Exercice 85.** Soit  $p, n \in \mathbb{N}^*$  avec  $2p \leq n$ . On considère

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \cdots + dx_{2p-1} \wedge dx_{2p}.$$

Montrer que  $\omega^p = p! dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{2p}$  et  $\omega^{p+1} = 0$ .

**Exercice 86.** Soit  $\omega = f(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$  une  $n$ -forme différentielle lisse dans  $\mathbb{R}^n$ . On pose

$$g(x) = \int_0^{x_1} f(t, x_2, \dots, x_n) dt.$$

Montrer que  $\omega = d\alpha$  où  $\alpha = g(x) dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$ .

**Exercice 87.** Soit  $f : x \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x_1 x_2, x_2 x_3, x_3^3) \in \mathbb{R}^3$ . Calculer  $f^* \omega$  lorsque

- 1)  $\omega = x_2 dx_3$  ;
- 2)  $\omega = x_1 dx_1 \wedge dx_3$  ;
- 3)  $\omega = x_1 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ .

**Exercice 88.** On considère le changement de coordonnées sphériques

$$F(r, \theta, \varphi) = (r \cos \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi).$$

Montrer que  $x dx + y dy + z dz = r dr$ .

**Exercice 89.** On note  $V_n$  le volume de la boule unité de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\lambda$  la mesure de Lebesgue, et  $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$  pour  $s > 0$ .

1) Montrer que  $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} d\lambda(x) = \pi^{n/2}$ .

2) En utilisant l'homogénéité de la fonction volume, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} d\lambda(x) = V_n \int_0^1 (-\ln t)^{n/2} dt \quad \text{et} \quad V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}.$$

3) Montrer par récurrence que  $V_n = \pi^k/k!$  si  $n = 2k$  et

$$V_n = \frac{2^{k+1} \pi^k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k + 1)} \quad \text{si } n = 2k + 1.$$

**Exercice 90.** Montrer que la 2-forme différentielle

$$\eta(x, y) = \frac{dx \wedge dy}{\pi[1 + x^2 + y^2]^2}$$

définit sur  $\mathbb{R}^2$  une mesure de probabilité qui s'étend en une forme volume lisse sur la sphère  $S^2$ .

### Variétés abstraites

**Exercice 91.** On considère  $M = \mathbb{R}$  muni des deux atlas à une seule carte  $(\mathbb{R}, \varphi_1)$  et  $(\mathbb{R}, \varphi_2)$  où

$$\varphi_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \varphi_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer que ces deux atlas ne sont pas compatibles.

2) Montrer que les deux structures différentiables correspondantes sont difféomorphes.

**Exercice 92.** Soit  $M \subset \mathbb{R}^n$  une sous-variété de dimension  $d$ . Montrer que  $M$  admet une structure différentiable (autrement dit que les sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$  sont bien des variétés « abstraites »).

**Exercice 93.** On note  $M = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  le quotient de  $\mathbb{R}$  par la relation d'équivalence

$$x' \sim x \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x' = x + k.$$

1) Définir un atlas différentiel sur  $M$ .

2) Montrer que la fonction  $F : x \in \mathbb{R} \mapsto 2x \in \mathbb{R}$  induit une application lisse  $f : M \rightarrow M$  telle que  $f \circ \pi = \pi \circ F$ , où  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow M$  désigne la projection.

**Exercice 94.**

1) Montrer que le produit de deux variétés différentiables est une variété différentiable, de dimension la somme des dimensions.

2) Montrer que le tore  $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$  admet une structure différentiable qui en fait une variété différentielle compacte, difféomorphe à  $(S^1)^n = S^1 \times \dots \times S^1$ .

**Exercice 95.** Soit  $P \in \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]$  un polynôme homogène tel que  $D_x P \neq 0$  si  $x \neq 0$ . Montrer que

$$H_P = \{[x] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \mid P(x) = 0\}$$

est une hypersurface de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ .

**Exercice 96.** Montrer que  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  est difféomorphe à  $S^1$ .

**Exercice 97.**

1) Montrer que  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , l'ensemble des droites de  $\mathbb{R}^3$  qui passent par l'origine, admet une structure de variété réelle compacte de dimension deux.

2) Montrer que l'application

$$f : [x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mapsto \frac{(yz, zx, xy, x^2 + 2y^2 + 3z^2)}{x^2 + y^2 + z^2} \in \mathbb{R}^4$$

est un plongement du plan projectif dans  $\mathbb{R}^4$ .

**Exercice 98 (Homographies).** On identifie  $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{C}})$  avec  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Une homographie est une fraction rationnelle de degré 1,

$$z \mapsto f_A(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{où} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}).$$

1) Montrer que les homographies forment un sous-groupe  $Hom$  du groupe des homéomorphismes de  $\overline{\mathbb{C}}$  et que  $A \in (GL(2, \mathbb{C}), \cdot) \mapsto f_A \in (Hom, \circ)$  est un morphisme surjectif de groupes dont on calculera le noyau.

2) Montrer que  $Hom$  agit de façon 3-transitive sur  $\overline{\mathbb{C}}$ .

3) Montrer que  $Hom$  est engendré par les transformations affines et par l'inversion  $z \mapsto 1/z$ .

4) Montrer que  $Hom$  préserve la famille des quasi-cercles (cercles et droites).

**Exercice 99.** Étant donnés deux grands cercles  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset S^2 = \overline{\mathbb{C}}$ , montrer qu'il existe une unique homographie  $f$  telle que  $f(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$ .

**Exercice 100.** Soit  $D \subset \mathbb{C}$  le disque unité. Montrer que le groupe des biholomorphismes de  $D$  est

$$\text{Aut}(D) = \left\{ z \mapsto e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}; a \in D \text{ and } \theta \in [0, 2\pi] \right\} \simeq D \times S^1.$$

**Exercice 101.** Soit  $p \geq 3$ . On se donne  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$  deux nombres complexes linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$ .

1) Montrer que

$$z \mapsto f(z) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{[z - (j\omega_1 + k\omega_2)]^p}$$

définit une fonction méromorphe doublement périodique dont le groupe des périodes est le réseau  $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ .

2) Montrer que  $f$  induit une application holomorphe  $f : X = \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{P}^1$ .

**Exercice 102.** Soit  $\Gamma$  un réseau de  $\mathbb{C}$  et  $X = \mathbb{C}/\Gamma$ . On suppose qu'il existe  $a \in \mathbb{C}^*$  tel que  $a\Gamma \subset \Gamma$ .

1) Montrer que  $z \mapsto az$  induit une application holomorphe  $f : X \rightarrow X$ .

2) Donner des exemples de tels  $a$  pour  $\Gamma = \mathbb{Z}[i]$  et  $\Gamma = \mathbb{Z}[j]$ , où  $j = e^{2i\pi/3}$ .

# Chapitre 4

## Corrections des exercices

### 4.1 Courbes

#### Courbes planes

**Exercice 1.** Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  une application lisse avec  $\varphi(0) = (0, 0)$ , dont l'image  $\Gamma$  est incluse dans la cubique cuspidale

$$\mathcal{C} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 = x^3\}.$$

Montrer qu'on a nécessairement  $\varphi'(0) = (0, 0)$ .

Les coordonnées de  $\varphi(t) = (x(t), y(t))$  doivent vérifier  $y(t)^2 = x(t)^3$ . Un développement limité à l'ordre 2 fournit  $[y'(0)]^2 t^2 + o(t^2) = o(t^2)$ , donc  $y'(0) = 0$ . En poussant à l'ordre 3 on obtient  $o(t^3) = [x'(0)]^3 t^3 + o(t^3)$ , d'où  $x'(0) = 0$ .  $\square$

**Exercice 2.** Soit  $\Gamma$  une conique du plan  $\mathbb{R}^2$  et  $A \in \Gamma$ . La droite  $D(t)$  de pente  $t$  passant par  $A$  rencontre en général la conique  $\Gamma$  en un deuxième point noté  $M_t$  de coordonnées  $(x(t), y(t))$ .

1) Montrer que l'application  $t \mapsto \varphi(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$  paramètre  $\Gamma \setminus \{1pt\}$  par des fractions rationnelles.

2) Donner un paramétrage du cercle  $x^2 + y^2 = 1$  (privé d'un point) par des fractions rationnelles.

1) Rappelons qu'une conique est le lieu géométrique d'annulation d'un polynôme de degré deux en deux variables,  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / P(x, y) = 0\}$  avec  $P$  polynôme de degré deux. Quitte à translater, on peut supposer que  $A = (0, 0)$ , ce qui revient à dire que le terme constant de  $P$  est nul, i.e.  $P(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey$ . La droite  $D(t) = \mathbb{R}(1, t) = \{(\lambda, \lambda t), \lambda \in \mathbb{R}\}$  rencontre  $\Gamma$  lorsque  $P(\lambda, \lambda t) = 0$ , ce qui correspond à  $\lambda = 0$  ou, lorsque  $a + bt + ct^2 \neq 0$ ,

$$\lambda = \lambda(t) := -\frac{d + e \cdot t}{a + bt + ct^2}.$$

On obtient donc une paramétrisation  $\varphi(t) = (\lambda(t), t\lambda(t))$  (d'une portion) de  $\Gamma$  par des fractions rationnelles. Tel qu'on s'y est pris, il manque en général le point d'intersection de  $\Gamma$  avec l'axe des ordonnées (pente infinie).

2) Dans le cas du cercle unité  $\{x^2 + (y-1)^2 = 1\}$  centré en  $(0, 1)$  de sorte que l'origine  $A = (0, 0)$  appartienne au cercle, on obtient

$$\varphi(t) = \left( \frac{2t}{1+t^2}, \frac{2t^2}{1+t^2} \right).$$

Le cercle unité  $S^1$  centré à l'origine s'obtient par translation; on obtient la paramétrisation  $\psi(t) = \left( \frac{2t}{1+t^2}, \frac{t^2-1}{1+t^2} \right)$  qui couvre  $S^1$  privé du point  $(0, 1)$ .  $\square$

**Exercice 3.** Soit  $a, b > 0$ . Déterminer le lieu géométrique défini par la paramétrisation

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto \left( a \frac{1-t^2}{1+t^2}, b \frac{2t}{1+t^2} \right) \in \mathbb{R}^2.$$

On observe que la courbe  $\varphi(\mathbb{R})$  est incluse dans l'ellipse

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x/a)^2 + (y/b)^2 = 1\}.$$

Réciproquement, on vérifie que tout point de cette ellipse (sauf le point  $(-a, 0)$ ) est atteint par la paramétrisation, donc  $\varphi(\mathbb{R}) = E \setminus (-a, 0)$ .  $\square$

**Exercice 4.**

1) Soit  $\varphi : t \in ]0, +\infty[ \mapsto (t^2, t^3) \in \mathbb{R}^2$ . Montrer que la longueur d'arc comptée à partir du point  $(0, 0)$  est la fonction algébrique

$$\ell(t) = \frac{1}{27}(4 + 9t^2)^{3/2} - \frac{8}{27}.$$

2) Savez-vous calculer le périmètre d'une ellipse? Et son aire?

1) La longueur est la moyenne du vecteur vitesse, il vient

$$\ell(T) = \int_0^T \|\varphi'(t)\| dt = \int_0^T t\sqrt{4 + 9t^2} dt = \frac{[4 + 9t^2]^{3/2} - 8}{27}.$$

Il est très rare que la longueur d'une courbe soit une fonction algébrique du paramètre.

2) On peut paramétrer (après une translation) une ellipse par  $\varphi(t) = (a \cos t, b \sin t)$ , où  $a, b > 0$ . Son périmètre est donc

$$\ell(E) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt.$$

Il s'agit d'une intégrale elliptique, elle ne s'exprime pas simplement à l'aide des fonctions « classiques ». On peut par contre calculer l'aire entourée par  $E$ . C'est le double de l'aire située sous le graphe de la fonction  $y = f(x) = b\sqrt{1 - (x/a)^2}$ . Il vient donc

$$\text{Aire}(E) = 2 \int_{-a}^{+a} b\sqrt{1 - (x/a)^2} dx = \pi ab$$

en utilisant le changement de variable  $x = a \sin t$ .  $\square$

**Exercice 5.** Donner une paramétrisation de la cubique nodale

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y^2 = x^3 + x^2\}.$$

Tracer son graphe et calculer sa courbure.

La courbe est donnée par une équation cartésienne, on en cherche une paramétrisation. Cette courbe passe par l'origine avec multiplicité deux, une droite passant par l'origine intersectera  $\Gamma$  en un « troisième point » (car  $\Gamma$  est de degré trois). Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on considère donc l'intersection de la droite d'équation  $y = tx$  avec  $\Gamma$ . Les coordonnées du point d'intersection  $\varphi(t) = (x(t), y(t))$  différent de l'origine vérifient  $y(t) = tx(t)$  et  $x(t)^3 + x(t)^2 - t^2x(t)^2 = 0$ , d'où

$$\varphi(t) = (t^2 - 1, t^3 - t).$$

Pour étudier  $\Gamma$ , il faut s'intéresser aux quantités suivantes :

- Points singuliers. On calcule  $x'(t) = 2t$  et  $y'(t) = 3t^2 - 1$ . Un point est dit singulier lorsque la différentielle de  $\varphi$  s'annule, i.e. lorsque  $x'(t) = y'(t) = 0$ . On vérifie qu'il n'y en a aucun ici : la courbe est partout régulière. On dresse le tableau des variations des fonctions coordonnées

$$\begin{array}{ccc} x(-\infty) = +\infty & & x(+\infty) = +\infty \\ & \searrow & \nearrow \\ & x(0) = -1 & \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} & 2/3^{3/2} & \\ & \nearrow & \searrow \\ y(-\infty) = -\infty & & y(+\infty) = +\infty \\ & \searrow & \nearrow \\ & -2/3^{3/2} & \end{array}$$

Les dérivées s'annulent aux extrema, ce qui correspond à des tangentes horizontales lorsque  $y' = 0$  et verticales lorsque  $x' = 0$ . Notez également que  $x(t) \geq -1$  pour tout  $t$ , la courbe  $\Gamma$  va donc se situer à droite de la droite verticale ( $x = -1$ ).

- Points doubles. On cherche à savoir si  $\varphi(s) = \varphi(t)$  pour deux valeurs distinctes  $s \neq t$  du paramètre. Ici, il vient  $x(s) = x(t) \Rightarrow t^2 = s^2$ , donc soit  $s = t$  (la solution évidente), soit  $s = -t$ . Dans ce dernier cas, la seconde identité  $y(s) = y(t) = y(-t)$  implique  $t \in \{0, \pm 1\}$ . La seule paire solution non triviale est donc  $\{t, s\} = \{+1, -1\}$ . Ainsi, l'origine ( $\varphi(1) = (0, 0) = \varphi(-1)$ ) est un point double de la courbe  $\Gamma$  : on doit voir sur le dessin que la courbe passe deux fois par l'origine.

- Symétries. Lorsque l'on change  $t$  en  $-t$ ,  $x$  reste inchangé tandis que  $y(-t) = -y(t)$ . Cela signifie que  $\Gamma$  est invariante par la symétrie d'axe  $(Ox)$ . C'est la seule symétrie apparente.

- Courbure. La courbure  $\kappa$  se calcule par

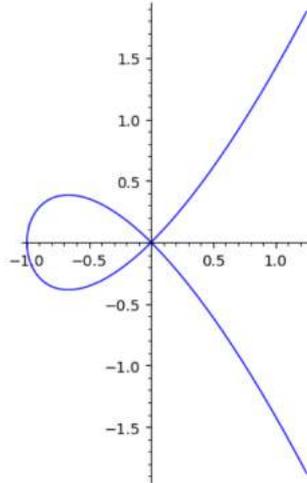
$$\kappa(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{6t^2 + 2}{[4t^2 + (3t^2 - 1)^2]^{3/2}}.$$

Elle est strictement positive, la courbe est donc convexe (attention au sens de parcours).

- Branches infinies. On observe que  $\|\varphi(t)\| \rightarrow +\infty$  uniquement lorsque  $t \rightarrow -\infty$  et  $t \rightarrow +\infty$ . Dans ce cas,  $x(t) \simeq t^2$  et  $y(t) \simeq t^3$ , donc  $x(t)/y(t) \rightarrow 0$ . La

courbe  $\Gamma$  n'admet pas d'asymptote, on dit qu'elle admet une branche asymptotique de direction l'axe ( $Oy$ ). On a en réalité une information bien plus précise : la courbe  $\Gamma$  est asymptotiquement proche de la courbe  $x = y^{2/3}$ .

Il ne reste plus qu'à tracer la courbe ! Pour cela, il faut déterminer les valeurs de quelques points particuliers de  $\varphi(t)$  en considérant notamment (mais pas uniquement) les valeurs spéciales du paramètre. Vous pouvez ici considérer par exemple  $t = \pm 1, 0, \pm 1/\sqrt{3}, \pm 2, 5$ , etc.



□

**Exercice 6.** Soit  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée telle que  $\|\varphi(t) - \varphi(s)\|^2$  est une fonction lisse de  $|t - s|^2$ . Montrer que la courbe géométrique associée est une portion de droite ou de cercle.

Il s'agit de montrer que la courbure  $\kappa$  est constante. Par hypothèse, il existe une fonction lisse  $F$  telle que pour tout  $s, t \in I$ ,

$$(\dagger) \quad [x(s) - x(t)]^2 + [y(s) - y(t)]^2 = F([s - t]^2).$$

On utilise un développement limité de  $x, y, F$  en  $s = t$  à l'ordre 2, il vient

$$x(s) = x(t) + \varepsilon x'(t) + \frac{\varepsilon^2}{2} x''(t) + o(\varepsilon^2)$$

et on obtient une expression similaire pour  $y$  et  $F$ . On a posé ici  $s = t + \varepsilon$ . Notons que le développement limité du terme  $F([s - t]^2)$  ne comporte pas de terme en  $\varepsilon^3$ ,

$$F([s - t]^2) = \varepsilon^2 F'(0) + \frac{\varepsilon^4}{2} F''(0) + o(\varepsilon^4)$$

et observons que  $F(0) = 0$ . En injectant dans l'équation  $(\dagger)$  et en identifiant les termes d'ordre 2, 3 et 4, on obtient

$$(x')^2 + (y')^2 = \text{cste}, \quad x'x'' + y'y'' = 0 \quad \text{et} \quad (x'')^2 + (y'')^2 = \text{cste}.$$

En dérivant cette dernière égalité, on obtient de plus  $x''x''' + y''y''' = 0$ . Couplée à l'égalité  $x'x'' + y'y'' = 0$ , on en déduit

$$x'y''' = y'x'''.$$

Finalement rappelons que la courbure est donnée en coordonnées cartésiennes par

$$\kappa = \frac{x'y'' - x''y'}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}}.$$

Le dénominateur est constant d'après ce que l'on a observé. La dérivée du numérateur est égale à  $x'y''' - x'''y' = 0$ , donc  $\kappa' = 0$ , i.e.  $\kappa$  est constante.  $\square$

**Exercice 7.** Étudier, tracer et calculer la courbure de la tractrice

$$\varphi : t \in ]0, \pi[ \mapsto a \left( \sin t, \cos t + \ln \tan \frac{t}{2} \right) \in \mathbb{R}^2.$$

1) Vous devez mener à bien une étude de courbe paramétrée. On calcule

$$x'(t) = a \cos t \quad \text{et} \quad y'(t) = a \left[ -\sin t + \frac{1}{\sin t} \right].$$

On en déduit le tableau des variations de  $x, y$ . On observe notamment que  $\varphi(\pi/2) = (a, 0)$  est le seul point singulier de la courbe (i.e.  $t = \pi/2$  est la seule valeur de  $t$  pour laquelle  $\varphi'(t)$  est le vecteur nul).

Il faut également étudier la position de la courbe par rapport à sa tangente, (le signe de) la courbure (voir question suivante), les branches infinies. L'axe des ordonnées est une asymptote double à la courbe, lorsque  $t \rightarrow 0^+$  et lorsque  $t \rightarrow \pi^-$ .

2) Pour calculer la courbure, on peut utiliser la formule

$$\kappa = \frac{x'y'' - x''y'}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}}.$$

Nous avons calculé  $x'$  et  $y'$  à la question précédente, on en déduit

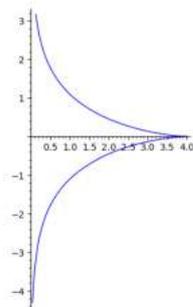
$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = a^2 \cos^2 t + a^2 (-\sin t + 1/\sin t)^2 = a^2 \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}.$$

On calcule de même  $x''$  et  $y''$ , et on obtient

$$x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t) = -a^2 \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}.$$

La courbure est donc  $\kappa(t) = -|\tan t|/a$ .

3) Il reste à tracer la courbe (avec une légère distorsion) :



**Exercice 8.** La développée d'une courbe plane  $\Gamma$  de paramétrisation  $\varphi(t)$  est le lieu de ses centres de courbure (i.e. le lieu des centres des cercles osculateurs). Elle admet la paramétrisation

$$\psi(t) = \varphi(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t)$$

où  $N(t)$  est le vecteur normal unitaire à  $\Gamma$  en  $\varphi(t)$ .

1) Montrer que la tangente en  $\psi(t)$  à la développée est portée par la normale en  $\varphi(t)$  à  $\Gamma$ .

2) Montrer que la développée de la parabole d'équation  $y = ax^2$  est la courbe d'équation  $27x^2 = 16a(y - 1/2a)^3$ .

1) Rappelons que

$$\kappa(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}} \text{ et } N(t) = \frac{1}{[(x')^2 + (y')^2]^{1/2}}(-y', x').$$

On en déduit l'expression de  $\psi(t) = (X(t), Y(t))$  dans une telle paramétrisation,

$$X(t) = x - \frac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - x''y'}y' \text{ et } Y(t) = y + \frac{(x')^2 + (y')^2}{x'y'' - x''y'}x'.$$

Supposons ici que  $\varphi$  soit la paramétrisation par longueur d'arc. Alors le vecteur tangent  $T(t) = \varphi'(t)$  est unitaire, donc  $\varphi''(t) = \kappa(t)N(t)$ . Comme  $N(t)$  est unitaire, le vecteur dérivé  $N'(t)$  est orthogonal à  $N(t)$ , donc proportionnel à  $T(t)$ . En dérivant l'égalité  $\langle T(t), N(t) \rangle = 0$ , on obtient que la constante de proportionnalité est  $-\kappa(t)$ , i.e.  $N'(t) = -\kappa(t)T(t)$ . Ainsi

$$\psi'(t) = \varphi'(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N'(t) - \frac{\kappa'(t)}{\kappa(t)^2}N(t) = -\frac{\kappa'(t)}{\kappa(t)^2}N(t),$$

la tangente en  $\psi(t)$  à la développée est donc bien portée par  $N(t)$ .

2) Considérons la paramétrisation

$$\varphi(t) = (t, at^2).$$

La formule obtenue dans la question 1) permet de calculer une paramétrisation de la développée de cette parabole, on obtient (après calculs)

$$\psi(t) = \left(-4a^2t^3, \frac{1}{2a} + 3at^2\right).$$

Une équation algébrique de cette développée est

$$(Y - 1/2a)^3 = \frac{27}{16a}X^2.$$

□

**Exercice 9.** Soit  $t \mapsto D(t)$  une famille de droites du plan. On appelle enveloppe de cette famille une courbe  $\Gamma$  paramétrée  $t \mapsto \varphi(t)$  telle que, pour tout  $t$ ,  $\Gamma$  est tangente à  $D(t)$  en  $\varphi(t)$ .

1) On suppose que pour tout  $t$ ,  $D(t)$  est la droite passant par le point  $M(t)$  de vecteur unitaire directeur  $u(t)$ . Montrer que si  $u'$  ne s'annule pas, alors la famille  $D(t)$  admet une enveloppe.

2) Que signifie le fait que  $u' \equiv 0$  ?

3) Calculer l'enveloppe de la famille de droites  $D(t)$  d'équations

$$3tX - 2Y - t^3 = 0.$$

4) Soit  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  une courbe géométrique paramétrée par son abscisse curviligne  $s \mapsto \psi(s)$ . Montrer que si  $\psi$  n'a pas de point d'inflexion, la famille de ses normales possède une enveloppe (la développée de  $\Gamma$ ).

1) On cherche  $\varphi(t) = M(t) + a(t)u(t)$  où  $a$  est une fonction inconnue. Pour que la tangente à  $\Gamma$  en  $\varphi(t)$  soit donnée par  $M(t) + \mathbb{R}u(t)$ , il est nécessaire que les vecteurs  $\varphi'(t)$  et  $u(t)$  soient colinéaires. On obtient donc

$$\varphi'(t) = M'(t) + a(t)u'(t) + a'(t)u(t) = b(t)u(t).$$

Comme  $u$  est unitaire, les vecteurs  $u$  et  $u'$  sont orthogonaux. On en déduit, si  $u' \neq 0$ , que

$$a(t) = -\frac{\langle M', u' \rangle}{\|u'\|^2}.$$

Réciproquement, on vérifie sans peine que la courbe définie par  $\varphi(t) = M(t) + a(t)u(t)$  est l'enveloppe des droites  $D(t)$  pour ce choix de fonction  $a(t)$ .

2) La fonction  $u'$  est identiquement nulle ssi les droites  $D(t)$  sont toutes parallèles. Il n'y a pas d'enveloppe dans ce cas, sauf si  $M(t)$  est constante également.

3) La droite d'équation cartésienne  $\{3tx - 2y - t^3 = 0\}$  peut s'écrire  $M(t) + \mathbb{R}u(t)$  avec  $M(t) = (0, -t^3)$  et  $u(t) = [4 + 9t^2]^{-1/2}(2, 3t)$ . La formule obtenue dans la question 1) conduit à

$$\varphi(t) = (0, -t^3) + \frac{3t^2(4 + 9t^2)}{4 + 81t^2}(2, 3t).$$

4) Soit  $\varphi(t) = \psi(t) + \kappa^{-1}(t)N(t)$  la développée  $\mathcal{C}$  de  $\Gamma$  (ensemble des centres de courbure). On observe que  $\varphi'(t) = -\kappa'(t)\kappa^{-2}(t)N(t)$  puisque  $\psi'(t) = T(t)$  et  $N'(t) = -\kappa(t)T(t)$ . Les normales à  $\Gamma$  sont les droites  $\psi(t) + \mathbb{R}N(t)$ , la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $\varphi(t)$  est

$$\varphi(t) + \mathbb{R}\varphi'(t) = \psi(t) + \kappa^{-1}(t)N(t) - \mathbb{R}\kappa'(t)\kappa^{-2}(t)N(t) = \psi(t) + \mathbb{R}N(t),$$

ce qui montre que la développée  $\mathcal{C}$  est bien l'enveloppe des tangentes à  $\Gamma$ .  $\square$

**Exercice 10.** Soit  $\Gamma$  une courbe plane fermée simple. On suppose que sa courbure vérifie

$$0 \leq \kappa \leq C$$

pour une constante  $C > 0$ . Montrer que

$$\ell(\Gamma) \geq \frac{2\pi}{C}.$$

Le théorème de Jordan assure que  $\Gamma$  décompose  $\mathbb{R}^2$  en deux parties connexes. On note  $\Omega$  l'intérieur de  $\Gamma$ , i.e. la composante connexe bornée de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ . L'inégalité isopérimétrique donne

$$4\pi \text{Aire}(\Omega) \leq \ell(\Gamma)^2.$$

Soit  $p \in \Gamma$  un point qui réalise le maximum de la courbure  $\kappa$  de  $\Gamma$ . Le cercle osculateur de  $\Gamma$  en  $p$  est entièrement contenu dans  $\Omega$ . Il est de rayon  $r = 1/\kappa_{\max} \geq 1/C$ . On en déduit que

$$\pi r^2 = \text{Aire}(D(p, r)) \leq \text{Aire}(\Omega) \leq \frac{\ell(\Gamma)^2}{4\pi}$$

d'où

$$\ell(\Gamma) \geq 2\pi r \geq \frac{2\pi}{C}.$$

□

## Courbes gauches

**Exercice 11.** Soit  $\Gamma$  une courbe paramétrée par son abscisse curviligne  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Montrer que le plan osculateur à  $\Gamma$  en  $\varphi(s)$  est la limite lorsque  $h, k \rightarrow 0$  du plan passant par les points  $\varphi(s), \varphi(s+h), \varphi(s+k)$ .

Le plan passant par les points  $\varphi(s), \varphi(s+h), \varphi(s+k)$  a pour équation cartésienne

$$\det \begin{vmatrix} X - x(s) & Y - y(s) & Z - z(s) \\ X - x(s+h) & Y - y(s+h) & Z - z(s+h) \\ X - x(s+k) & Y - y(s+k) & Z - z(s+k) \end{vmatrix} = 0.$$

On effectue un développement limité de  $\varphi(s+h)$  à l'ordre 1 et de  $\varphi(s+k)$  à l'ordre 2, et on utilise le caractère 3-linéaire alterné du déterminant pour obtenir que cette équation se réécrit

$$\det \begin{vmatrix} X - x(s) & Y - y(s) & Z - z(s) \\ x'(s) + o(1) & y'(s) + o(1) & z'(s) + o(1) \\ x''(s) + o(1) & y''(s) + o(1) & z''(s) + o(1) \end{vmatrix} = 0.$$

Lorsque  $h$  et  $k$  tendent vers zéro, on obtient ainsi l'équation du plan osculateur. □

**Exercice 12.** Étudier la façon dont une homothétie transforme la courbure et la torsion d'une courbe gauche.

Soit  $\varphi$  une paramétrisation par longueur d'arc d'une courbe gauche  $\Gamma$ , et soit  $\psi(s) = \lambda\varphi(s)$  son image par une homothétie de rapport  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . Il vient

$$\kappa_\psi = \frac{\|\psi' \wedge \psi''\|}{\|\psi'\|^3} = \frac{\lambda^2 \|\varphi' \wedge \varphi''\|}{|\lambda|^3 \|\varphi'\|^3} = \frac{\kappa_\varphi}{|\lambda|}.$$

De même, la torsion s'obtient via

$$\tau_\psi = \frac{\det(\psi', \psi'', \psi''')}{\|\psi' \wedge \psi''\|^2} = \frac{\lambda^3 \det(\varphi', \varphi'', \varphi''')}{\lambda^4 \|\varphi' \wedge \varphi''\|^2} = \frac{\tau_\varphi}{\lambda}.$$

□

**Exercice 13.** Calculer « l'appareil de Frenet », c'est-à-dire les vecteurs  $T, N$  et  $B$ , la courbure  $\kappa$  et la torsion  $\tau$  de la courbe paramétrée

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto (\sqrt{1+t^2}, t, \ln(t + \sqrt{1+t^2})) \in \mathbb{R}^3.$$

On calcule

$$\varphi'(t) = \left( \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, 1, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right).$$

Ce vecteur est de norme constante égale à  $\sqrt{2}$ , il s'agit donc d'un multiple constant du vecteur unitaire tangent  $\sqrt{2}T(t)$  à la courbe. On obtient de même

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} = \frac{(1, 0, -t)}{\sqrt{1+t^2}}$$

et

$$B(t) = T(t) \wedge N(t) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+t^2}}(-t, \sqrt{1+t^2}, -1).$$

La courbure est ainsi  $\kappa(t) = \frac{1}{\sqrt{2}[1+t^2]}$  et la torsion s'obtient en dérivant  $N$ ,

$$\tau(t) = \langle B, N' \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}[1+t^2]}.$$

□

**Exercice 14.** Soit  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  une courbe gauche dont toutes les tangentes passent par un même point. Montrer que  $\Gamma$  est une (portion de) droite.

Soit  $\varphi : I \rightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}^3$  une paramétrisation de  $\Gamma$ . La tangente à  $\Gamma$  en  $\varphi(t)$  est

$$D_t := \{\varphi(t) - \lambda\varphi'(t) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Quitte à translater, on suppose que toutes ces tangentes passent par l'origine. On en déduit que pour tout  $t \in I$ , il existe  $\lambda(t) \in \mathbb{R}$  tel que

$$\varphi(t) = \lambda(t)\varphi'(t).$$

On peut supposer que  $\Gamma$  est paramétrée à vitesse unité, il s'ensuit que  $t \mapsto |\lambda(t)| = \|\varphi(t)\|$  est continue. Notons que  $\lambda$  n'est pas identiquement nulle sinon  $\Gamma$  serait réduite à un point. On l'étudie sur un sous-intervalle  $J$  où elle ne s'annule pas. Quitte à changer de sens de parcours, on peut donc supposer que  $\lambda > 0$  sur  $J \subset I$ . Soit  $g$  une primitive de  $1/\lambda$ . L'équation différentielle vectorielle  $\varphi' = \varphi/\lambda$  se résout donc en

$$\varphi(t) = e^{g(t)}\varphi(t_0), \text{ où } t_0 \in J.$$

On en déduit que  $\varphi(J) \subset \mathbb{R}\varphi(t_0)$ , i.e.  $\Gamma$  est une (portion de) droite.  $\square$

**Exercice 15.** Une hélice généralisée est une courbe gauche dont la tangente fait un angle constant avec une direction fixe. Montrer qu'une courbe gauche est une hélice généralisée si et seulement si le quotient de sa courbure par sa torsion est constant.

Supposons que la courbe est paramétrée par sa longueur d'arc  $\varphi(s)$ . Soit  $T(s) = \varphi'(s)$  le vecteur tangent unitaire. Supposons qu'il existe un vecteur fixe unitaire  $V_0$  tel que  $\langle T(s), V_0 \rangle = \cos \theta$  est constant. En dérivant cette équation, on obtient  $\kappa(s)\langle N(s), V_0 \rangle = 0$ . En dérivant à nouveau, il vient, d'après les formules de Frenet,

$$\langle -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s), V_0 \rangle = 0.$$

Comme  $V_0$  est orthogonal à  $N(s)$ , il appartient au plan engendré par  $T(s)$  et  $B(s)$ . Puisqu'il est unitaire, on a  $\langle B(s), V_0 \rangle = \pm \sin \theta$ , et l'équation précédente montre donc que

$$\frac{\kappa(s)}{\tau(s)} = \pm \tan \theta \text{ est constant.}$$

Réciproquement, supposons que  $\kappa(s)/\tau(s) = \tan \theta$  est constant et posons

$$V(s) := \cos \theta T(s) + \sin \theta B(s).$$

On obtient en dérivant  $V'(s) = (\kappa(s) \cos \theta - \tau(s) \sin \theta)N(s) = 0$ , donc  $V(s) = V_0$  est un vecteur unitaire constant et la tangente  $T(s)$  fait un angle constant avec  $V_0$  puisque  $\langle T(s), V_0 \rangle = \cos \theta$ .  $\square$

**Exercice 16.** Soit  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée de courbure constante  $\kappa > 0$  et de torsion constante  $\tau \in \mathbb{R}$ . Montrer (par une preuve directe) que  $\Gamma$  est une hélice.

Soit  $\varphi$  une paramétrisation à vitesse 1 de la courbe. D'après l'exercice précédent, le vecteur unitaire tangent  $\varphi'(s)$  fait un angle constant avec une direction fixe que l'on peut supposer égale à  $(0, 0, 1)$ , i.e.

$$\varphi'(s) = (x'(s), y'(s), c) \text{ avec } (x')^2 + (y')^2 + c^2 \equiv 1.$$

On peut réécrire cette identité sous la forme

$$\varphi'(s) = \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \theta(s), \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \theta(s), \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

avec  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Comme  $\varphi'' = \kappa N$  avec  $\kappa$  constante, on obtient que  $\theta' \equiv d$  est constant. Soit  $d = 0$ , alors  $\kappa \equiv 0$  et  $\Gamma$  est un segment de droite, soit  $d \neq 0$  et on intègre pour obtenir (après translation en  $s$ )

$$\varphi(s) = \left( \frac{a}{d\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(ds), \frac{a}{d\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(ds), \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} s \right),$$

ce qui est bien la paramétrisation d'une hélice (d'un cercle si  $b = 0$ ).  $\square$

**Exercice 17.** Soit  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  une courbe paramétrée par la longueur d'arc  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ . On suppose qu'il existe  $s_0 \in I$  tel que  $\|\varphi(s)\| \leq \|\varphi(s_0)\|$  pour tout  $s$  dans un voisinage de  $s_0$ . Montrer que

$$\kappa(s_0) \geq \frac{1}{\|\varphi(s_0)\|}.$$

On pourra étudier la fonction  $f(s) = \|\varphi(s)\|^2$ .

On peut supposer sans perte de généralité que  $s_0 = 0$ . En effectuant un développement limité de  $\|\varphi(s)\|^2$  en  $s = 0$ , il vient

$$\begin{aligned} \|\varphi(0)\|^2 \geq \|\varphi(s)\|^2 &= \|\varphi(0) + s\varphi'(0) + s^2\varphi''(0) + o(s^2)\|^2 \\ &= \|\varphi(0)\|^2 + 2s\langle\varphi(0), \varphi'(0)\rangle + s^2\{\|\varphi'(0)\|^2 + \langle\varphi(0), \varphi''(0)\rangle\} + o(s^2). \end{aligned}$$

On en déduit que  $\langle\varphi(0), \varphi'(0)\rangle = 0$  et  $\|\varphi'(0)\|^2 + \langle\varphi(0), \varphi''(0)\rangle \leq 0$ . Or  $\varphi$  est paramétrée par longueur d'arc, donc  $\|\varphi'(0)\| = 1$ ,  $\varphi''(0) = \kappa(0)N(0)$ , et  $\langle\varphi(0), \varphi''(0)\rangle = \kappa(0)\|\varphi(0)\|\cos\theta \leq -1$  en notant  $\theta$  l'angle entre  $\varphi(0)$  et  $\varphi''(0)$ . Il vient ainsi

$$\kappa(0) = \frac{|\langle\varphi(0), \varphi''(0)\rangle|}{\|\varphi(0)\|\cos\theta} \geq \frac{1}{\|\varphi(0)\|}$$

puisque  $|\cos\theta| \leq 1$ .  $\square$

**Exercice 18.** Soit  $\Gamma$  une courbe gauche paramétrée par  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Montrer qu'il existe un unique cercle qui réalise un contact d'ordre trois (au moins) avec  $\Gamma$  au point  $\varphi(t)$ , qu'il est inclus dans le plan osculateur à  $\Gamma$  en  $\varphi(t)$ , et qu'il a pour rayon  $R = 1/\kappa(t)$  et pour centre le point  $\varphi(t) + \kappa^{-1}(t)N(t)$ .

Les équations d'un cercle  $\mathcal{C}$  dans  $\mathbb{R}^3$  dépendent de 7 paramètres. On note  $(\alpha, \beta, \gamma)$  son centre,  $R$  son rayon et  $(u, v, w)$  les coordonnées d'un vecteur normal au plan qui contient le cercle. Les équations de  $\mathcal{C}$  sont alors

$$\begin{cases} (X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 + (Z - \gamma)^2 - R^2 = 0 \\ u(X - \alpha) + v(Y - \beta) + w(Z - \gamma) = 0 \end{cases}.$$

Soit  $\Gamma$  une courbe gauche paramétrée par  $\varphi : t \in I \mapsto (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ . Le cercle  $\mathcal{C}$  a un contact d'ordre trois avec  $\Gamma$  au point  $\varphi(t)$  si et seulement si les

équations suivantes sont satisfaites

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 - R^2 = 0 \quad (A)$$

$$x'(x - \alpha) + y'(y - \beta) + z'(z - \gamma) = 0 \quad (B)$$

$$x''(x - \alpha) + y''(y - \beta) + z''(z - \gamma) + x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0 \quad (C)$$

$$u(x - \alpha) + v(y - \beta) + w(z - \gamma) = 0 \quad (D)$$

$$ux' + vy' + wz' = 0 \quad (E)$$

$$ux'' + vy'' + wz'' = 0 \quad (F)$$

Les trois dernières équations montrent que le centre du cercle  $(\alpha, \beta, \gamma)$  appartient au plan osculateur, puisque

$$\begin{vmatrix} x - \alpha & y - \beta & z - \gamma \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0. \quad (G)$$

Les équations (B), (C) et (G) forment un système linéaire de trois équations en les trois inconnues  $x - \alpha, y - \beta, z - \gamma$ . Pour le résoudre, il est commode de poser

$$A = (y'z'' - z'y''), \quad B = (z'x'' - x'z''), \quad C = (x'y'' - y'x'').$$

On obtient alors

$$x - \alpha = (Cy' - Bz') \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$y - \beta = (Az' - Cx') \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{A^2 + B^2 + C^2},$$

et

$$z - \gamma = (Bx' - Ay') \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Cela détermine les coordonnées du centre du cercle osculateur. On en déduit facilement son rayon :

$$R = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2} = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Observons que  $A, B$  et  $C$  sont les coordonnées du vecteur  $\varphi' \wedge \varphi''$ . Il s'ensuit que le rayon du cercle osculateur est l'inverse de la courbure à  $\Gamma$ . On peut de même exprimer les coordonnées du centre du cercle osculateur de façon vectorielle, il vient

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta, \gamma) &= \varphi - \frac{\|\varphi'\|^2}{\|\varphi' \wedge \varphi''\|^2} \varphi' \wedge (\varphi' \wedge \varphi'') \\ &= \varphi + \frac{\|\varphi'\|^2}{\|\varphi' \wedge \varphi''\|^2} (-\langle \varphi', \varphi'' \rangle \varphi' + \|\varphi'\|^2 \varphi'') \\ &= \varphi(t) + \kappa^{-1}(t) N(t). \end{aligned}$$

□

**Exercice 19.** Soit  $t \in [a, b] \mapsto X(t) \in \mathbb{R}^3$  une fonction vectorielle lisse telle que  $\|X(t)\| = 1$  pour tout  $t$ . On suppose que les vecteurs  $\{X(t), X'(t), X''(t)\}$  forment une base de  $\mathbb{R}^3$  pour tout  $t$ , et on considère

$$\varphi : t \in [a, b] \mapsto \varphi(t) = c \int_a^t X(s) \wedge X'(s) ds \in \mathbb{R}^3$$

où  $c \in \mathbb{R}^*$ . Montrer que la courbe géométrique  $\Gamma_\varphi$  a une torsion constante  $= 1/c$  (on pourra montrer que le vecteur binormal  $B(t)$  à  $\Gamma$  est proportionnel à  $X(t)$ ).

Nous allons (pour changer un peu) travailler dans la base orthogonale directe  $X, X', X \wedge X'$ . Attention, cette base n'est pas orthonormée (le premier vecteur est de norme 1, les deux autres de norme  $\|X'\|$ ). On décompose  $X'' = \alpha X + \beta X' + \gamma X \wedge X'$  dans cette base, et on observe pour la suite que  $X$  et  $X'$  étant orthogonaux (puisque  $X$  est unitaire), on a

$$(\langle X, X' \rangle)' = 0 \implies \alpha = \langle X, X'' \rangle = -\|X'\|^2.$$

Nous allons utiliser la formule

$$\tau = \frac{\det(\varphi', \varphi'', \varphi''')}{\|\varphi' \wedge \varphi''\|^2}$$

pour calculer la torsion.

Il vient  $\varphi' = cX \wedge X'$  et  $\varphi'' = cX \wedge X'' = -c\gamma X' + c\beta X \wedge X'$ . On en déduit que  $\varphi' \wedge \varphi'' = c^2\gamma\|X'\|^2 X$ , d'où  $\|\varphi' \wedge \varphi''\|^2 = c^4\gamma^2\|X'\|^4$ , et

$$\det(\varphi', \varphi'', \varphi''') = -c^2\gamma \det(X \wedge X', X', \varphi''').$$

Il reste donc à calculer le coefficient  $\langle \varphi''', X \rangle$  de  $\varphi'''$  par rapport à  $X$ . Il vient

$$\langle \varphi''', X \rangle = \langle (-c\gamma X' + c\beta X \wedge X')', X \rangle = -c\gamma \langle X'', X \rangle = -c\gamma\alpha = +c\gamma\|X'\|^2.$$

On obtient ainsi  $\det(\varphi', \varphi'', \varphi''') = c^3\gamma^2\|X'\|^4$  et  $\tau = 1/c$ .  $\square$

**Exercice 20.** Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par

$$\varphi(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{-1/t^2}) & \text{si } t > 0 \\ (0, 0, 0) & \text{si } t = 0 \\ (t, e^{-1/t^2}, 0) & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

- 1) Montrer que  $\varphi$  est lisse et que  $\Gamma = \varphi(\mathbb{R})$  est régulière.
- 2) Montrer que  $\kappa(t) \neq 0$  si  $t \notin \{0, \pm\sqrt{2/3}\}$  et vérifier que  $\kappa(0) = 0$ .
- 3) Montrer que le vecteur normal est discontinu en  $t = 0$ .
- 4) Montrer que  $\tau \equiv 0$  bien que  $\Gamma$  ne soit pas une courbe plane.

1) Pour montrer que les fonctions coordonnées sont lisses, on calcule les dérivées à gauche et à droite de zéro à tout ordre, et on montre que celles-ci tendent vers zéro. Cela implique, grâce au théorème des valeurs intermédiaires, que ces fonctions sont lisses en zéro avec dérivées nulles à tout ordre. Ces fonctions (infiniment plates en

zéro) sont des exemples de fonctions lisses qui ne sont pas développables en séries entières. Comme la première composante de  $\varphi'(t)$  est 1, celui-ci ne s'annule jamais, donc  $\Gamma = \varphi(\mathbb{R})$  est régulière.

2) On effectue les calculs pour  $t > 0$ , les autres valeurs s'en déduisent par symétrie et prolongement. Il vient  $\varphi'(t) = (1, 0, 2t^{-3} \exp(-t^{-2}))$  et  $\varphi''(t) = (0, 0, 2t^{-6}(2 - 3t^2) \exp(-t^{-2}))$ , donc

$$\kappa(t) = 2|t|^3|2 - 3t^2| \exp(+t^{-2})$$

s'annule en  $t = 0, \pm\sqrt{2/3}$ .

3) On calcule, pour  $t > 0$ ,  $T(t) = \varphi'(t)/\|\varphi'(t)\|$  puis

$$N(t) = [1 + 4t^{-6} \exp(-t^{-2})]^{1/2} (-2t^{-3} \exp(-t^{-2}), 0, 1).$$

Ainsi  $N(t) \rightarrow (0, 0, 1)$  lorsque  $t \rightarrow 0^+$ . Par symétrie, il vient  $N(t) \rightarrow (0, 1, 0)$  lorsque  $t \rightarrow 0^-$ .

4) Le vecteur binormal est égal à  $B(t) = (0, -1, 0)$  pour  $t > 0$  et  $B(t) = (0, 0, 1)$  pour  $t < 0$ . Il s'ensuit que la torsion est identique à zéro, bien que la courbe ne soit pas plane.  $\square$

**Exercice 21.** Soit  $\Gamma$  une courbe régulière paramétrée par  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Soit  $\pi$  la projection orthogonale sur le plan osculateur à  $\Gamma$  en  $\varphi(t)$ . Montrer que la courbure en  $t$  de la courbe plane  $\pi \circ \varphi(\mathbb{R})$  est égale à  $\kappa(t)$ .

On peut supposer que  $\Gamma$  est paramétrée à vitesse 1. Rappelons que le plan osculateur à  $\Gamma$  en  $\varphi(t)$  est engendré par  $T(t) = \varphi'(t)$  et  $N(t) = \varphi''(t)/\kappa(t)$ . Quitte à translater et composer par une rotation, on peut travailler en un point  $t = 0$  et supposer que  $\varphi(0) = 0$  et que  $T(0), N(0), B(0)$  est la base canonique.

On note  $\psi(t) = (x(t), y(t))$  la projection orthogonale de  $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t))$  sur le plan osculateur en  $t = 0$ . La courbure de  $\pi(\Gamma)$  en  $\psi(t)$  est

$$\kappa_\psi(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}}.$$

Or  $T(0) = (1, 0, 0)$  et  $N(0) = (0, 1, 0)$ , donc  $x'(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $x''(0) = 0$  et  $y''(0) = \kappa(0)$ . On en déduit que  $\kappa_\psi(0) = \kappa(0)$ .  $\square$

**Exercice 22.** Soit  $\varphi : s \in I \rightarrow \varphi(s) \in \mathbb{R}^3$  une courbe gauche  $\Gamma$ . On note  $\kappa(s)$  et  $\tau(s)$  la courbure et la torsion dont on suppose qu'elles ne s'annulent pas. On note  $R = 1/\kappa$  et  $\delta = 1/\tau$ .

1) Montrer que si  $\Gamma$  est tracée sur une sphère, alors

$$R^2 + (R')^2 \delta^2 \equiv \text{constante}.$$

On pourra supposer que la sphère est centrée à l'origine et dériver trois fois l'identité  $\|\varphi(s)\|^2 \equiv \text{constante}$ .

2) On suppose réciproquement que  $R^2 + (R')^2\delta^2 \equiv \text{constante}$ . Montrer que  $\varphi(s) + R(s)N(s) - R'(s)\delta(s)B(s)$  est constant, et en déduire que  $\Gamma$  est tracée sur une sphère.

1) Quitte à translater et reparamétriser, on peut supposer que  $\varphi$  évolue à vitesse 1 sur une sphère centrée à l'origine. En décomposant  $\varphi$  dans la base de Frenet, il vient

$$\varphi(t) = b(t)N(t) + c(t)B(t).$$

Il n'y a pas de composante selon  $T(t)$  puisque  $\|\varphi(t)\|^2 = \text{cst}$ , donc  $\langle \varphi, \varphi' \rangle \equiv 0$ . En dérivant à nouveau cette relation d'orthogonalité, on obtient

$$\langle \varphi, \varphi'' \rangle + \|\varphi'\|^2 = 0 \quad \text{et} \quad \langle \varphi, \varphi''' \rangle + 3\langle \varphi', \varphi'' \rangle = \langle \varphi, \varphi''' \rangle = 0.$$

La première relation fournit  $b = -1/\kappa$  puisque  $\|\varphi'\| = 1$  et  $\varphi'' = \kappa N$  est orthogonal à  $\varphi'$ . Pour utiliser la seconde relation, on observe que  $\varphi''' = (\kappa N)' = -\kappa T + \kappa' N + \tau B$ , ainsi

$$\langle \varphi, \varphi''' \rangle = b\kappa' + c\tau = 0 \Rightarrow c = -\frac{b\kappa'}{\tau} = +\frac{\kappa'}{\kappa\tau}.$$

On utilise enfin les identités  $\|\varphi\|^2 = \text{cst}$  et  $R' = -\kappa'/\kappa$  pour conclure à  $R^2 + (R')^2\delta^2 \equiv \text{cst}$ .

2) On suppose à nouveau que  $\varphi$  est paramétrée par longueur d'arc et on pose

$$\psi(s) := \varphi(s) + R(s)N(s) - R'(s)\delta(s)B(s) = \varphi(s) + \frac{1}{\kappa}N(s) + \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}B(s).$$

On dérive  $\psi$  pour obtenir

$$\psi' = T - \frac{\kappa'}{\kappa^2}N + \frac{1}{\kappa} \{-\kappa T + \tau B\} - \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\tau N + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)' B = \left\{ \frac{\tau}{\kappa} + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)' \right\} B.$$

On vérifie que cette quantité s'annule lorsque  $R^2 + (R')^2\delta^2 \equiv \text{cst}$ , ce qui montre que  $\psi \equiv O$  est constante. Il s'ensuit que

$$\|\varphi(s) - O\|^2 = \|\varphi(s) - \psi(s)\|^2 = \|RN + R'\delta B\|^2 = R^2 + (R')^2\delta^2 = \text{cst},$$

donc  $\Gamma$  est tracée sur une sphère centrée au point  $O$ . □

## Isométries euclidiennes et propriétés globales

**Exercice 23.** Montrer que la composée de deux rotations (affines) du plan est soit une translation, soit une rotation (affine).

Soit  $R_1$  (resp.  $R_2$ ) la rotation de centre  $z_1$  (resp.  $z_2$ ) et d'angle  $\theta_1$  (resp.  $\theta_2$ ). L'action sur le plan complexe s'écrit en coordonnée  $R_j(z) = e^{i\theta_j}(z - z_j) + z_j$ . On en déduit

$$R_1 \circ R_2(z) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}(z - z_2) + e^{i\theta_1}(z_2 - z_1) + z_1.$$

On obtient une translation si  $\theta_2 = -\theta_1 \pmod{2\pi}$ , sinon une rotation d'angle  $\theta_1 + \theta_2$  et de centre  $w$  où

$$w = \frac{z_1 + e^{i\theta_1}(z_2 - z_1) - e^{i(\theta_1+\theta_2)}z_2}{1 - e^{i(\theta_1+\theta_2)}}.$$

□

**Exercice 24.** On note  $O(n, \mathbb{R})$  l'ensemble des matrices orthogonales, et  $SO(n, \mathbb{R})$  celles qui préservent l'orientation (i.e. de déterminant 1). Montrer que :

- 1)  $O(n, \mathbb{R})$  est un groupe compact ;
- 2)  $SO(n, \mathbb{R})$  est un groupe connexe ;
- 3)  $SO(2, \mathbb{R})$  est commutatif, mais pas  $SO(n, \mathbb{R})$ ,  $n \geq 3$  ;
- 4)  $SO(n, \mathbb{R})$  agit transitivement sur la sphère  $S^{n-1}$  ( $n \geq 2$ ).

1) L'application  $\Phi : M \in M(n, \mathbb{R}) \mapsto {}^tMM \in M(n, \mathbb{R})$  est continue.  $O(n, \mathbb{R}) = \Phi^{-1}(Id)$ , image réciproque d'un singleton, est donc un fermé de  $M(n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ .

Soit  $N(M) = \sqrt{\text{Tr}({}^tMM)}$ , c'est une norme euclidienne sur  $M(n, \mathbb{R})$  associée au produit scalaire  $(N, M) \mapsto \text{Tr}({}^tNM)$ . L'ensemble  $O(n, \mathbb{R})$  est inclus dans la boule centrée à l'origine et de rayon  $\sqrt{n}$  pour cette norme, c'est donc un ensemble borné. Les compacts de  $\mathbb{R}^{n^2}$  étant les fermés bornés, il s'ensuit que  $O(n, \mathbb{R})$  est compact.

2) Pour montrer que  $SO(n, \mathbb{R})$  est connexe, il suffit de relier une matrice arbitraire  $A \in SO(n, \mathbb{R})$  à  $Id$  par un chemin continu de matrices dans  $SO(n, \mathbb{R})$ . Il résulte de la théorie de réduction des endomorphismes que  $A$  est semblable à une matrice diagonale par blocs, avec des blocs de dimension 1 (ayant des 1 ou des  $-1$  sur la diagonale) et de dimension 2 de la forme

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad A'_\theta = \begin{bmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Le chemin s'obtient par exemple en considérant  $A_{t\theta}$  et  $A'_{t\theta}$ ,  $0 \leq t \leq 1$  pour se ramener à une matrice qui n'a que des 1 et des  $-1$  (en nombre pair) sur la diagonale. On traite ces derniers deux par deux en les considérant comme une matrice de rotation d'angle  $\pi$  et en déformant continument l'angle sur zéro.

3) On vérifie aisément que l'application  $z = e^{i\theta} \in S^1 \mapsto A(z) = A_\theta \in SO(2)$  est un isomorphisme de groupes, il en résulte que  $SO(2, \mathbb{R})$  est commutatif. Notez par contre que  $AB \neq BA$  pour

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On montre de même que  $SO(n, \mathbb{R})$  n'est pas commutatif pour  $n \geq 4$ .

4) Soit  $x, x' \in S^{n-1}$ . On complète en deux bases orthonormées directes  $x_1 = x, x_2, \dots, x_n$  et  $x'_1 = x', x'_2, \dots, x'_n$ . La matrice  $A$  de passage entre ces deux bases appartient à  $SO(n, \mathbb{R})$ .  $\square$

**Exercice 25.** Soit  $f : S^1 \rightarrow S^1$  une application et  $F$  un relevé de  $f$ . Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \deg(f) = \frac{[F(t+2\pi) - F(t)]}{2\pi}.$$

Comme  $F$  est un relevé de  $f$ , il existe  $j = j(t) \in \mathbb{Z}$  tel que  $F(t+2\pi) = F(t) + 2\pi j(t)$ . L'application  $t \in \mathbb{R} \mapsto d(t) := \frac{[F(t+2\pi) - F(t)]}{2\pi} \in \mathbb{Z}$  est continue, donc d'image connexe, donc constante puisque  $\mathbb{Z}$  est discret. Par définition,  $d(0) = \deg f$  donc  $d(t) \equiv \deg f$ .  $\square$

**Exercice 26.** Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  une fonction  $2\pi$ -périodique et

$$g : t \in \mathbb{R} \mapsto g(t) = f(t) + t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que  $g$  induit une application  $G : S^1 \rightarrow S^1$  dont on calculera le degré.

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et  $k \in \mathbb{Z}$ , on a  $g(t + 2k\pi) = g(t) + 2k\pi$ , donc  $g$  induit bien une application  $G : S^1 \rightarrow S^1$  qui est de degré 1 puisque  $\deg G = \frac{g(2\pi) - g(0)}{2\pi} = 1$ .  $\square$

**Exercice 27.** Soit  $f : S^1 \rightarrow S^1$  une application continue. Montrer que le nombre  $P(f)$  de points fixes de  $f$  vérifie

$$P(f) \geq |\deg f - 1|.$$

On représente les points de  $z \in S^1 \subset \mathbb{C}$  en notation complexe. Soit  $g : z \in S^1 \mapsto \frac{f(z)}{z} \in S^1$ . On note  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un relevé de  $f$ ; c'est une application lisse telle que pour tout  $(\theta, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ , il existe  $k' \in \mathbb{Z}$  tel que  $F(\theta + 2k\pi) = F(\theta) + 2k'\pi$ . Observons que  $G : \theta \in \mathbb{R} \mapsto F(\theta) - \theta \in \mathbb{R}$  est un relevé de  $g$  puisque

$$G(\theta + 2k\pi) = F(\theta + 2k\pi) - (\theta + 2k\pi) = G(\theta) + 2(k' - k)\pi.$$

Le degré de  $g$  est donc égal à  $\frac{G(2\pi) - G(0)}{2\pi} = \deg f - 1$ .

Un point  $z \in S^1$  est point fixe de  $f$  si et seulement s'il vérifie  $g(z) = 1$ . la preuve de la proposition 1.5.6 montre que cette équation admet au moins  $|\deg g|$  solutions, il s'ensuit que  $P(f) \geq |\deg f - 1|$ .  $\square$

**Exercice 28.** Soit  $f, g : S^1 \rightarrow S^1$  deux applications continues. Montrer que

$$\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g.$$

En déduire que  $f$  a beaucoup de points périodiques si  $|\deg f| \geq 2$ .

Soit  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (resp.  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ) un relevé de  $f$  (resp.  $g$ ). On observe que  $F \circ G$  est un relevé de  $f \circ g$ . Il résulte de l'exercice 25 que

$$F(G(2\pi)) = F(G(0) + 2\pi \deg g) = F(G(0)) + 2\pi \deg g \deg f,$$

ainsi

$$\deg f \circ g = \frac{F \circ G(2\pi) - F \circ G(0)}{2\pi} = \deg g \cdot \deg f.$$

On note  $f^n = f \circ \dots \circ f$  (composée  $n$  fois). Il résulte de l'exercice précédent que le nombre de points périodiques de  $f$  de période  $\leq n$  (i.e. les solutions de  $f^n(z) = z$ ) vérifie

$$\sharp \text{Fix}(f^n) \geq |\deg(f^n) - 1| = |(\deg f)^n - 1| \geq |\deg f|^n - 1.$$

Ainsi,  $\sharp \text{Fix}(f^n)$  croît exponentiellement vite avec  $n$  si  $|\deg f| \geq 2$ .  $\square$

**Exercice 29.** Soit  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  une courbe plane. On appelle sommet de  $\Gamma$  un point critique de la courbure de  $\Gamma$ .

i) Montrer que tout point d'un cercle est un sommet. Montrer qu'une ellipse a quatre sommets.

ii) Montrer qu'une courbe fermée a toujours deux sommets, puis qu'une courbe fermée simple convexe a au moins quatre sommets.

i) Le cas du cercle est clair puisque la courbure est constante. La courbure de l'ellipse  $t \mapsto \varphi(t) = (a \cos t, b \sin t)$  est

$$\kappa(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}.$$

Ses points critiques correspondent aux quatre points  $t = k\pi/2$ ,  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ , qui sont bien les quatre « sommets » de l'ellipse.

ii) La courbure d'une courbe fermée admet toujours un minimum et un maximum par compacité, il y a donc au moins deux points critiques pour la courbure.

Supposons à présent la courbe  $\Gamma$  simple et convexe. On note  $\varphi$  une paramétrisation à vitesse 1 de  $\Gamma$  et  $L$  sa longueur. Supposons par l'absurde qu'il n'y a que deux ou trois sommets  $p_1, p_2, p_3$ . Quitte à changer le sens de parcours, on peut supposer que  $\kappa'$  est positive entre  $p_1$  et  $p_2$ , puis négative entre  $p_2$  et  $p_3$ , et entre  $p_3$  et  $p_1$ . On choisit un repère orthonormé  $(e_1, e_2)$  tel que  $(p_1 p_2) = \mathbb{R}e_1$  et  $p_3$  (s'il existe) se trouve dans le demi-plan supérieur. Il résulte de la convexité de  $\Gamma$  que  $\langle \varphi, e_2 \rangle < 0$  entre  $p_1$  et  $p_2$ , tandis que  $\langle \varphi, e_2 \rangle > 0$  entre  $p_2$  et  $p_1$ .

On rappelle à présent que  $\varphi' = T$  est le vecteur unitaire tangent à  $\Gamma$ , et que le vecteur normal unitaire  $N = iT$  est relié à  $T$  par la relation  $T' = \kappa N$ . On intègre par parties pour obtenir

$$\int_0^L \kappa'(t) \varphi(t) dt = - \int_0^L \kappa(t) \varphi'(t) dt = +i \int_0^L \kappa(t) N(t) dt = \int_0^L T'(t) dt = 0,$$

puisque  $\varphi(0) = \varphi(L)$ ,  $\varphi'(0) = \varphi'(L)$  et  $\kappa(0) = \kappa(L)$ . Il s'ensuit que

$$0 = \int_0^L \kappa'(t) \langle \varphi(t), e_2 \rangle dt = \int_{p_1}^{p_2} \kappa'(t) \langle \varphi(t), e_2 \rangle dt + \int_{p_2}^{p_1} \kappa'(t) \langle \varphi(t), e_2 \rangle dt < 0,$$

ce qui fournit une contradiction. □

## 4.2 Surfaces

### Premiers exemples

**Exercice 30.** On pose  $U = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / 0 < a < \pi, 0 < b < 2\pi\}$  et

$$\varphi : (a, b) \in U \mapsto (\sin a \cos b, \sin a \sin b, \cos a) \in \mathbb{R}^3.$$

1) Montrer que  $(\varphi, U)$  est une paramétrisation régulière d'une partie de la sphère unité  $S^2$ . Laquelle ?

2) Donner une deuxième application  $(\psi, V)$  de sorte que la réunion de ces deux nappes recouvre complètement  $S^2$ .

3) Est-il possible de couvrir la sphère unité à l'aide d'une seule nappe ?

1) On calcule  $\varphi_a = (\cos a \cos b, \cos a \sin b, -\sin a)$  et  $\varphi_b = (-\sin a \sin b, \sin a \cos b, 0)$ , donc

$$\varphi_a \wedge \varphi_b = (\sin^2 a \cos b, \sin^2 a \sin b, \sin a \cos a).$$

Puisque  $\varphi_a \wedge \varphi_b$  ne s'annule jamais pour  $(a, b) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ , on en déduit que  $\varphi$  est une paramétrisation régulière. On obtient ainsi tous les points de la sphère unité, sauf ceux qui se trouvent sur le demi-cercle  $\{(x, 0, z), x^2 + z^2 = 1 \text{ et } x \geq 0\}$  (qui correspondent à  $b = 0$ ).

2) On peut considérer la paramétrisation  $\psi$  définie sur  $(0, \pi) \times (0, 2\pi)$  par  $\psi(a, b) = \varphi(a, b - \pi)$ . La réunion de ces deux nappes régulières couvre  $S^2$ .

3) On ne peut pas couvrir  $S^2$  par une seule nappe  $\varphi : U \rightarrow S^2$  car  $S^2$  est compacte : l'application  $\varphi^{-1} : S^2 \rightarrow U$  est continue, donc son image  $U = \varphi^{-1}(S^2)$  devrait être compacte.  $\square$

**Exercice 31.** Démontrer qu'une quadrique de  $\mathbb{R}^3$ , c'est-à-dire le lieu d'annulation d'un polynôme de degré deux en trois variables réelles, est conjuguée par une isométrie de  $\mathbb{R}^3$  à l'une des formes indiquées dans la section 2.1.2.

Soit  $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = 0\}$ , où  $f$  est un polynôme de degré 2 en  $(x, y, z)$ . La classification se fait en discutant selon la signature de la forme quadratique définie par la partie homogène de degré deux du polynôme  $f$ ,

$$f_{\text{hom}}(x, y, z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta xy + \varepsilon xz + \varphi yz.$$

Pour une signature  $(3, 0)$ , un changement affine de coordonnées permet de se ramener à

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \kappa$$

avec  $\kappa \in \mathbb{R}$  : on commence par effectuer un changement de base orthonormée pour réduire la forme quadratique et se ramener à

$$f(x, y, z) = (x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 + dx + ey + fz + g,$$

puis la translation  $(x, y, z) \mapsto (x + ad/2, y + be/2, z + cf/2)$  élimine la partie linéaire. Si  $\kappa > 0$ , l'ensemble est vide ; si  $\kappa = 0$ , la quadrique est réduite à un point ; si  $\kappa < 0$ , on obtient un ellipsoïde.

Le cas de signature  $(0, 3)$  se déduit du précédent en changeant  $f$  en  $-f$ . Les autres cas se traitent de façon similaire. Le cas de signature  $(2, 1)$  (ou  $(1, 2)$ ) conduit au cône elliptique et aux hyperboloïdes. Celui de signature  $(1, 1)$  conduit au paraboloïde et au cylindre hyperbolique, celui de signature  $(2, 0)$  conduit au paraboloïde et au cylindre elliptique. Enfin, le cas de signature  $(1, 0)$  conduit au cylindre parabolique.  $\square$

**Exercice 32** (Conoïde de Plücker).

1) Pour quelles valeurs de  $(x, y)$  l'équation

$$z(x^2 + y^2) = xy$$

définit-elle une surface régulière ?

2) Dessiner cette surface. Montrer que c'est une surface réglée.

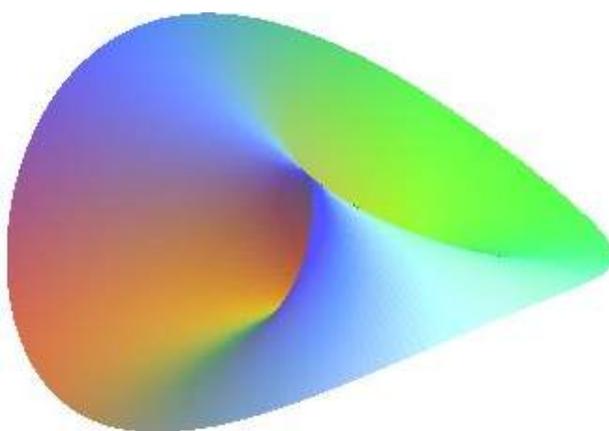
1) Soit  $f(x, y, z) = z(x^2 + y^2) - xy$ . La surface  $\mathcal{C} = \{f(x, y, z) = 0\}$  est régulière hors du lieu d'annulation du gradient  $\nabla f = (2xz - y, 2yz - x, x^2 + y^2)$ , i.e. hors de l'axe  $(Oz) = (x = y = 0)$ .

Pour  $(x, y) \neq (0, 0)$ , on peut également exprimer  $\mathcal{C}$  comme le graphe de la fonction lisse  $z = h(x, y)$ , où  $h(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ . Il s'ensuit que  $\mathcal{C}$  est lisse hors de l'axe  $(Oz)$ . Les points de cet axe sont des points singuliers.

2) La surface est invariante par  $\lambda \mapsto (\lambda x, \lambda y, z)$ . On peut paramétrer  $\mathcal{C} \setminus (Oz)$  par

$$(\lambda, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \varphi(\lambda, t) = \left( \lambda, \lambda t, \frac{t}{1+t^2} \right) \in \mathbb{R}^3.$$

La décomposition  $\varphi(\lambda, t) = \lambda(1, t, 0) + (0, 0, t/(1+t^2))$  montre que  $\mathcal{C}$  est une surface réglée.



En voici une représentation.  $\square$

**Exercice 33.** Soit  $0 < r < R$ . On considère le tore  $\mathcal{T}$  de révolution donné par la paramétrisation

$$\varphi : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto ((r \cos u + R) \cos v, (r \cos u + R) \sin v, r \sin u) \in \mathbb{R}^3.$$

On considère la courbe gauche tracée sur  $\mathcal{T}$ ,

$$\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(at, bt) \in \mathcal{T}.$$

1) Montrer que  $\Gamma = \gamma(\mathbb{R})$  est fermé ssi  $b/a$  ou  $a/b$  est rationnel.

2) Montrer que  $\Gamma$  est dense dans  $\mathcal{T}$  ssi  $b/a$  est irrationnel.

1) La courbe  $\gamma(\mathbb{R})$  est fermée s'il existe une période non nulle  $T \in \mathbb{R}^*$  telle que  $\gamma(T) = \gamma(0)$ . Cela signifie qu'il existe  $p, q \in \mathbb{Z}$  tels que  $aT = 2\pi q$  et  $bT = 2\pi p$ , d'où  $b/a \in \mathbb{Q}$  ou  $a/b \in \mathbb{Q}$ .

2) Supposons à présent  $a$  et  $b$  linéairement indépendants sur  $\mathbb{Q}$ . Alors le groupe  $2\pi a\mathbb{Z} + 2\pi b\mathbb{Z}$  est un sous-groupe additif dense de  $(\mathbb{R}, +)$ . Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . On peut donc trouver  $(p_j, q_j)$  une suite de couples d'entiers relatifs tels que  $2\pi p_j b + 2\pi q_j a \rightarrow bx - ay$ . Il vient donc

$$\gamma\left(\frac{x - 2\pi p_j}{a}\right) = \varphi\left(x - 2\pi p_j, \frac{bx - 2\pi p_j b}{a}\right) = \varphi\left(x, \frac{bx - 2\pi p_j b - 2\pi q_j a}{a}\right) \rightarrow \varphi(x, y),$$

ce qui montre que  $\gamma(\mathbb{R})$  est dense dans  $\varphi(\mathbb{R}^2)$ .  $\square$

## Espaces tangents

**Exercice 34** (Parapluie de Whitney). On considère la surface paramétrée par

$$\varphi : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (uv, v, u^2) \in \mathbb{R}^3.$$

1) Montrer que la demi-droite  $(x = y = 0, z > 0)$  est une ligne de points doubles et que l'origine est un point singulier.

2) Montrer que pour  $v \neq 0$ , le vecteur

$$N(u, v) = (-2u/v, 2u^2/v, 1)$$

est normal à la surface et n'admet pas de limite quand  $(u, v)$  tend vers  $(0, 0)$ .

1) La demi-droite  $(x = y = 0, z > 0)$  est une ligne de points doubles car  $\varphi(\pm\sqrt{z}, 0) = (0, 0, z)$ . Calculons une base de vecteurs tangents,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = (v, 0, 2u) \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial v} = (u, 1, 0).$$

Ce sont des vecteurs linéairement indépendants, sauf lorsque  $u = v = 0$  : l'origine est un point singulier et c'est le seul point singulier de cette surface.

2) On vérifie aisément que  $N \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} = N \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$ . Lorsque  $u$  et  $v$  tendent vers zéro,  $N(u, v)$  n'admet pas de limite : si par exemple  $u = \lambda v$ , où  $\lambda$  est un paramètre fixé et  $v \rightarrow 0$ , on obtient

$$N(u, v) = N(\lambda v, v) = (-2\lambda, 2\lambda^2 v, 1) \rightarrow (-2\lambda, 0, 1).$$

Les plans tangents n'ont donc pas de limite au point singulier.  $\square$

**Exercice 35.** On considère une fonction lisse  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et la surface régulière

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2 / z = xf(y/x)\}.$$

Montrer que tous les plans tangents à  $S$  contiennent l'origine  $(0, 0, 0)$ .

La surface  $S$  est régulière, comme tout graphe d'une fonction lisse. Soit  $\varphi : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x, y, xf(y/x)) \in \mathbb{R}^3$  une paramétrisation de  $S$ . Cela revient à dire que les vecteurs

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left(1, 0, f(y/x) - \frac{y}{x}f'(y/x)\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (0, 1, f'(y/x))$$

sont linéairement indépendants.

On observe que tous les plans tangents à  $S$  contiennent l'origine  $(0, 0, 0)$ . Faites attention : le plan tangent  $T_p S$  à  $S$  en  $p \in S$  est le sous-espace affine de  $\mathbb{R}^3$  de dimension deux qui passe par  $p$  et qui est tangent à  $S$ , ce n'est pas (en général) un sous-espace vectoriel. Il est donné par

$$T_p(S) = p + \text{Vect} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right).$$

Il suffit donc d'observer que pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ , on a

$$\varphi(x, y) - x \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) - y \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = (0, 0, 0);$$

cela montre que l'origine appartient à chaque  $T_p S$ . □

**Exercice 36.** Soit  $S_1$  et  $S_2$  deux surfaces régulières de  $\mathbb{R}^3$  qui s'intersectent en un point  $p$ . On suppose que les plans tangents  $T_p S_1$  et  $T_p S_2$  sont distincts. Montrer qu'au voisinage de  $p$ , l'intersection  $S_1 \cap S_2$  est une courbe dont la tangente en  $p$  est l'intersection  $T_p S_1 \cap T_p S_2$  des deux plans tangents.

Choisissons un repère centré en  $p$ , dont le troisième vecteur n'appartient ni à  $T_p S_1$ , ni à  $T_p S_2$ . On peut alors exprimer localement  $S_1$  et  $S_2$  comme des graphes de fonctions lisses au-dessus du plan  $(xOy)$ ,

$$z = f_i(x, y) \quad \text{avec} \quad f_i(0, 0) = 0.$$

L'intersection  $S_1 \cap S_2$  est ainsi définie comme l'image, par l'une des paramétrisations, de la courbe définie de façon implicite par l'équation

$$f(x, y) = f_1(x, y) - f_2(x, y) = 0.$$

Il suffit donc de vérifier que la différentielle de  $f$  en  $(0, 0)$  n'est pas nulle : l'ensemble

$$\{(x, y) / f(x, y) = 0\}$$

définira ainsi une courbe plane régulière et son image par la paramétrisation sera une courbe gauche régulière tracée sur  $S_1$  et  $S_2$ . Or l'annulation de  $Df_{(0,0)}$  se traduit par

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(0, 0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(0, 0) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(0, 0),$$

ce qui signifie que les plans tangents  $T_p S_1$  et  $T_p S_2$  sont les mêmes.

Notons  $\mathcal{C}$  la courbe régulière qui est l'intersection de  $S_1$  et  $S_2$  au voisinage de  $p$ . Notons que la tangente  $D$  à  $\mathcal{C}$  en  $p$  est contenue dans  $T_p(S_1)$  puisque  $\mathcal{C}$  est tracée sur  $S_1$ . La droite  $D$  est, de même, contenue dans  $T_p S_2$ , c'est donc en fait  $T_p S_1 \cap T_p S_2$  puisque ces deux plans se coupent le long d'une droite.  $\square$

**Exercice 37.** Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface régulière. Montrer que si toutes les droites normales à  $S$  sont concourantes, alors  $S$  est une portion de sphère.

Quitte à composer par une rotation, on peut supposer que  $S$  est (localement) le graphe d'une fonction  $S = \{z = f(x, y)\}$ . Quitte à translater, on peut supposer que les normales se rencontrent à l'origine. La normale à  $S$  en  $p$  est la droite  $p + \mathbb{R}(f_x, f_y, -1)$ . Elle passe par l'origine ssi il existe  $\lambda = \lambda(x, y) \in \mathbb{R}$  tel que  $p = \lambda(f_x, f_y, -1)$ , ce qui conduit aux équations

$$x \frac{\partial f}{\partial y} = y \frac{\partial f}{\partial x}, \quad x = -\lambda f_x \quad \text{et} \quad y = -\lambda f_y.$$

On passe en coordonnées polaires  $F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ , ce qui donne

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) = 0.$$

Ainsi,  $f(x, y)$  ne dépend que de  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . De plus,

$$\frac{\partial f^2}{\partial x} = -2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f^2}{\partial y} = -2y \implies f^2(x, y) + (x^2 + y^2) = \text{cst},$$

donc  $z^2 + x^2 + y^2 = \text{cst}$ , i.e.  $S$  est une portion de sphère.  $\square$

**Exercice 38.** Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface régulière et  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse définie dans  $\mathbb{R}^3$ . Montrer que la différentielle de la restriction  $f$  de  $F$  à  $S$  est la restriction de  $DF$  à l'espace tangent à  $S$ . Autrement dit,  $\forall p \in S$ ,

$$Df_p = D(F|_S)_p = (DF_p)|_{T_p(S)}.$$

Il s'agit de dérouler la définition : soit  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  une paramétrisation régulière de  $S$  au voisinage de  $p = \varphi(m)$ . Un vecteur tangent  $X \in T_p S$  est l'unique image  $X = D\varphi_m(Y)$  d'un vecteur  $Y \in \mathbb{R}^2$ . La règle de dérivation des applications composées donne  $D(F \circ \varphi)_m(Y) = DF_p(X)$ . Or  $F \circ \varphi = f \circ \varphi$  et on a précisément défini  $Df_p(X) := D(f \circ \varphi)_m(Y)$ .  $\square$

**Première forme fondamentale, orientabilité**

**Exercice 39.** *Expliciter les coefficients de la première forme fondamentale du cylindre  $C$ , de la caténoïde  $\mathcal{C}$  et de l'hélicoïde  $H$  définis par les paramétrisations suivantes :*

$$C = \{(R \cos \theta, R \sin \theta, s) \in \mathbb{R}^3 / (\theta, s) \in \mathbb{R}^2\};$$

$$\mathcal{C} := \{(\operatorname{Ch} u \cos v, \operatorname{Ch} u \sin v, u) \in \mathbb{R}^3 / (u, v) \in \mathbb{R}^2\};$$

$$H := \{(u \cos v, u \sin v, v) \in \mathbb{R}^3 / (u, v) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Des calculs simples donnent :

1)  $E = R^2, F = 0, G = 1$  (cylindre);

2)  $E = (\operatorname{Ch} u)^2, F = 0, G = (\operatorname{Ch} u)^2$  (caténoïde);

3)  $E = 1, F = 0, G = 1 + u^2$  (hélicoïde). □

**Exercice 40.** *Soit  $N : S \rightarrow S^2$  l'application de Gauss d'une surface régulière  $S \subset \mathbb{R}^3$ . Décrire l'image  $N(S)$  dans les cas suivants :*

1)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x/a)^2 + y^2 + z^2 = 1\}, a > 0;$

2)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\};$

3)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = x^2 + y^2\};$

4)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 - z^2 = 1\};$

5)  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = (\operatorname{Ch} z)^2\}.$

1) On peut utiliser une paramétrisation par coordonnées sphériques

$$\varphi(u, v) = (a \cos u, \sin u \cos v, \sin u \sin v).$$

Le vecteur normal  $\varphi_u \wedge \varphi_v / \|\varphi_u \wedge \varphi_v\|$  vaut

$$N(\varphi(u, v)) = \frac{(\cos u, a \sin u \cos v, a \sin u \sin v)}{\sqrt{\cos^2 u + a^2 \sin^2 u}}.$$

Comme  $a \neq 0$ , l'application

$$u \in [0, 2\pi] \mapsto x(u) = \cos u / \sqrt{\cos^2 u + a^2 \sin^2 u} \in [-1, 1]$$

est surjective. On vérifie ensuite que, pour  $x(u) \in [-1, 1]$  fixé, l'ensemble des valeurs prises par  $N(\varphi(u, v))$  lorsque  $v$  décrit  $[0, 2\pi]$  est le cercle  $\{y^2 + z^2 = 1 - x(u)^2\}$ . On a donc  $N(S) = S^2$ .

2) La paramétrisation  $\varphi(x, y) = (x, y, 0)$  montre que  $N(S) = (0, 0, 1)$  est réduite à un point.

3) La paramétrisation  $\varphi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$  donne

$$N(\varphi(x, y)) = \frac{(2x, 2y, -1)}{\sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}}$$

dont l'image est la demi-sphère  $S^2 \cap (z < 0)$ .

4) La paramétrisation  $\varphi(u, v) = (\cos u \operatorname{Ch} v, \sin u \operatorname{Ch} v, \operatorname{Sh} v)$  conduit à

$$N(\varphi(u, v)) = \frac{(\cos u \operatorname{Ch} v, \sin u \operatorname{Ch} v, -\operatorname{Sh} v)}{\sqrt{1 + 2 \operatorname{Sh}^2 v}}.$$

On obtient dans ce cas  $N(S) = \{(x, y, z) \in S^2, |z| < 1/\sqrt{2}\}$ .

5) La paramétrisation  $\varphi(\theta, z) = (\cos \theta \operatorname{Ch} z, \sin \theta \operatorname{Ch} z, z)$  conduit à

$$N(\varphi(u, v)) = \frac{(\cos \theta, \sin \theta, \operatorname{Sh} v)}{\operatorname{Ch} z},$$

d'où  $N(S) = S^2 \setminus \{\text{poles}\}$ . □

**Exercice 41.** Soit  $S$  une surface de révolution obtenue en faisant tourner une courbe  $\mathcal{C}$  autour de l'axe  $(Oz)$ . On peut la paramétrer par

$$(s, \theta) \mapsto (f(s) \cos \theta, f(s) \sin \theta, h(s)).$$

On suppose que  $\mathcal{C}$  est paramétrée par la longueur d'arc.

1) Montrer que les coefficients de la première forme fondamentale sont

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = f(s)^2.$$

2) Montrer que l'aire de  $S$  est

$$\text{Aire}(S) = 2\pi \int_0^L |f(s)| ds$$

où  $L$  désigne la longueur de  $\mathcal{C}$ . En déduire que l'aire de la sphère unité  $S^2$  est  $\text{Aire}(S^2) = 4\pi$  et retrouver l'aire du tore de révolution.

1) Il vient  $\varphi_s = (f'(s) \cos \theta, f'(s) \sin \theta, h'(s))$  et  $\varphi_\theta = (-f(s) \sin \theta, f(s) \cos \theta, 0)$ , d'où

$$E = (f')^2 + (h')^2 = 1, \quad F = 0, \quad \text{et } G = f(s)^2.$$

2) On en déduit que

$$\text{Aire}(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^L \sqrt{EG - F^2} ds d\theta = 2\pi \int_0^L |f(s)| ds.$$

On calcule l'aire de la sphère unité  $S^2$  avec  $f(s) = \sin s$ ,  $0 < s < \pi = L$ , et on retrouve l'aire d'un tore de révolution avec  $f(s) = R + r \cos(s/r)$ ,  $h(s) = r \sin(s/r)$ ,  $L = 2\pi r$ . □

**Exercice 42** (Surfaces tubulaires). Soit  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  la paramétrisation par longueur d'arc d'une courbe gauche dont la courbure ne s'annule nulle part. Soit  $(T, N, B)$  le repère de Frenet et

$$\varphi : (s, \theta) \in I \times \mathbb{R} \mapsto \alpha(s) + \varepsilon[\cos \theta N(s) + \sin \theta B(s)]$$

où  $\varepsilon > 0$  est une constante positive.

1) Montrer que le vecteur normal à la surface tubulaire est

$$\mathcal{N}(s, \theta) = -[\cos \theta N(s) + \sin \theta B(s)]$$

et en déduire que la surface tubulaire  $S_\varepsilon = \varphi((0, \ell(\Gamma)) \times (0, 2\pi))$  est régulière si  $\varepsilon > 0$  est assez petit.

2) Calculer l'aire de la surface  $S_\varepsilon$ .

1) On calcule

$$\varphi_s = T(s) + \varepsilon[\cos \theta N'(s) + \sin \theta B'(s)]$$

et

$$\varphi_\theta = \varepsilon[-\sin \theta N(s) + \cos \theta B(s)].$$

Les formules de Frénet donnent  $N' = \kappa T + \tau B$  et  $B' = -\tau N$ . Par ailleurs,  $T \wedge N = B$ ;  $T \wedge B = -B \wedge T = -N$  et  $N \wedge B = T$ , il vient donc

$$\varphi_s \wedge \varphi_\theta = -\varepsilon[1 - \kappa(s)\varepsilon \cos \theta][\cos \theta N(s) + \sin \theta B(s)].$$

Ce vecteur n'est jamais nul si  $\varepsilon > 0$  est assez petit, donc  $S_\varepsilon$  est régulière.

2) L'aire de la surface  $S_\varepsilon$  est donnée par

$$\begin{aligned} \text{Aire}(S_\varepsilon) &= \int_0^{\ell(\Gamma)} \int_0^{2\pi} \|\varphi_s \wedge \varphi_\theta\| ds d\theta \\ &= \int_0^{\ell(\Gamma)} \int_0^{2\pi} \varepsilon[1 - \kappa(s)\varepsilon \cos \theta] ds d\theta \\ &= 2\pi\varepsilon\ell(\Gamma). \end{aligned}$$

□

**Exercice 43.** Soit  $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$  deux surfaces régulières et  $f : S_1 \rightarrow S_2$  une application surjective différentiable qui est un difféomorphisme local en tout point.

Montrer que  $S_2$  est orientable si  $S_1$  l'est. En déduire que l'orientabilité est préservée par les difféomorphismes.

Soit  $\{U_i, i \in I\}$  un recouvrement de  $S_1$  tel que les changements de cartes ont un jacobien positif (choix d'une orientation de  $S_1$  qui est supposée orientable). On peut diminuer la taille des  $U_i$  (et augmenter celle de  $I$ ) en préservant cette propriété, et donc supposer que  $f|_{U_i} : U_i \rightarrow f(U_i)$  est un difféomorphisme.

Le recouvrement de  $S_2$  par les ouverts  $V_i = f(U_i)$  est tel que les changements de cartes sont encore à jacobien positif : cela résulte de ce que

$$\Phi_{V_i}^{-1} \circ \Phi_{V_j} = (f \circ \Phi_{U_i})^{-1} \circ (f \circ \Phi_{U_j}) = \Phi_{U_i}^{-1} \circ \Phi_{U_j}.$$

Il s'ensuit que  $S_2$  est orientable.

Lorsque  $f$  est un difféomorphisme global, on peut renverser le raisonnement et obtenir ainsi que  $S_1$  est orientable si et seulement si  $S_2$  l'est également.  $\square$

#### Exercice 44.

1) Montrer que le ruban de Möbius n'est pas une surface orientable.

2) Montrer que si une surface  $S$  a un ouvert difféomorphe au ruban de Möbius, alors  $S$  n'est pas orientable.

1) Le ruban de Möbius  $M$  est la surface à bord connexe de  $\mathbb{R}^3$  paramétrée par

$$\varphi(t, v) = ([1 + t \cos v] \cos(2v), [1 + t \cos v] \sin(2v), t \sin v)$$

avec  $t \in ]-1/2, 1/2[$ ,  $v \in \mathbb{R}$  et

$$\partial M = \{\varphi(1/2, v), v \in \mathbb{R}\} \cup \{\varphi(-1/2, v), v \in \mathbb{R}\} \sim S^1.$$

Cette paramétrisation est  $2\pi$ -périodique en  $v$ , avec de plus  $\varphi(t, \pi/2) = \varphi(-t, -\pi/2)$ . On calcule

$$\varphi_t = (\cos v \cos(2v), \cos v \sin(2v), \sin v)$$

et

$$\varphi_v = (-\sin v \cos(2v) - 2[1 + t \cos v] \sin(2v), -\sin v \sin(2v) + 2[1 + t \cos v] \cos(2v), t \cos v).$$

En particulier

$$\varphi_t(t, \pi/2) = (0, 0, 1), \quad \varphi_v(t, \pi/2) = (1, -2, 0) \quad \text{et} \quad \varphi_t \wedge \varphi_v(t, \pi/2) = (2, 1, 0),$$

tandis que

$$\varphi_t(-t, -\pi/2) = (0, 0, -1), \quad \varphi_v(-t, -\pi/2) = (-1, -2, 0)$$

et

$$\varphi_t \wedge \varphi_v(-t, -\pi/2) = (-2, 1, 0).$$

Il y a donc un changement discontinu de direction pour tout vecteur normal unitaire : si  $N : M \rightarrow S^2$  est une application normale unitaire continue, alors

$$N = \varepsilon \frac{\varphi_t \wedge \varphi_v}{\|\varphi_t \wedge \varphi_v\|}$$

avec  $\varepsilon$  surjective à valeurs continues dans  $\{-1, +1\}$ , contradiction.

2) Le même raisonnement produit une contradiction dès que  $S$  a un ouvert difféomorphe au ruban de Möbius. Il suffit de composer  $N$  avec le difféomorphisme si celui-ci est conforme, sinon on peut se contenter du changement de signe.  $\square$

## Deuxième forme fondamentale

**Exercice 45.** Soit  $N : S \rightarrow S^2$  l'application de Gauss d'une surface régulière  $S \subset \mathbb{R}^3$ . Soit  $\alpha : I \rightarrow S$  une courbe paramétrée régulière qui ne contient aucun point planaire, ni aucun point parabolique. Montrer que

$$N \circ \alpha : I \rightarrow S^2$$

définit une courbe régulière de la sphère unité  $S^2$ .

Il résulte de la définition de l'opérateur de forme que

$$F_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = -D_{\alpha'(t)}N(\alpha(t)) = -\frac{d(N \circ \alpha)}{dt}(t).$$

Comme  $\alpha$  est régulière, le vecteur tangent  $\alpha'(t)$  est non nul pour tout  $t$ . On en déduit que vecteur tangent  $(N \circ \alpha)'(t)$  de la courbe  $N \circ \alpha$  ne s'annule pas si le noyau de  $F_{\alpha(t)}$  est réduit à zéro, i.e. si  $K(\alpha(t)) \neq 0$ , i.e. si  $S$  ne contient aucun point planaire ou parabolique.  $\square$

**Exercice 46.** Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface paramétrée.

1) Montrer que si l'opérateur  $F_p$  est nul pour tout  $p$  dans  $S$ , alors  $S$  est incluse dans un plan.

2) Montrer que si  $S \subset \mathbb{R}^3$  est une sphère, alors  $F_p$  est une homothétie dont on calculera le rapport. Que pensez-vous de la réciproque ?

1) Soit  $\varphi$  une paramétrisation locale de  $S$ . La matrice de l'opérateur de forme dans la base  $\varphi_x, \varphi_y$  de  $T_p S$  est donnée par  $I_p^{-1} \cdot II_p$ , où  $I_p, II_p$  désignent les matrices des deux premières formes fondamentales dans cette base. Comme  $I_p$  est définie positive,  $F_p \equiv 0$  si et seulement si  $II_p = 0$ , i.e. lorsque  $P = Q = R = 0$ . Or

$$\partial_x N = a_{11}\varphi_x + a_{21}\varphi_y \quad \text{et} \quad \partial_y N = a_{12}\varphi_x + a_{22}\varphi_y$$

avec (cf. Proposition 2.4.1)

$$a_{11} = \frac{QF - PG}{EG - F^2}, \quad a_{12} = \frac{RF - QG}{EG - F^2}, \quad a_{21} = \frac{PF - QE}{EG - F^2} \quad \text{et} \quad a_{22} = \frac{QF - RE}{EG - F^2}.$$

On en déduit que  $\partial_x N = \partial_y N = 0$ , i.e.  $N$  est constant, donc  $S$  est un morceau de plan.

2) On peut supposer la sphère centrée à l'origine. Une paramétrisation d'un morceau de  $S_r$  est

$$\varphi : (x, y) \in D_r \mapsto \left( x, y, \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)} \right) \in \mathbb{R}^3.$$

Il vient  $\varphi_x = \left( 1, 0, \frac{-x}{\sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}} \right)$ ,  $\varphi_y = \left( 0, 1, \frac{-y}{\sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}} \right)$  et

$$N(x, y) = \frac{\varphi_x \wedge \varphi_y}{\|\varphi_x \wedge \varphi_y\|} = \frac{1}{r} \left( x, y, \sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)} \right) = \frac{1}{r} \varphi(x, y).$$

Il s'ensuit que  $P = -\langle -\partial_x N, \varphi_x \rangle = -E/r$ ,  $Q = -F/r$  et  $R = -G/r$ , donc  $F_p$  est une homothétie de rapport  $-1/r$ .

Réciproquement, si  $F_p = \lambda Id$  est une homothétie de rapport  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  (le cas  $\lambda = 0$  a été traité à la question 1)), alors  $II_p = \lambda I_p$  donc  $\partial_x N = \lambda \varphi_x$  et  $\partial_y N = \lambda \varphi_y$ , donc  $N - \lambda \varphi = w_0$  est un vecteur constant. Il s'ensuit que

$$\|\varphi - w_0/\lambda\| = \|N/\lambda\| = |\lambda|^{-1},$$

donc  $S$  est un morceau de la sphère centrée en  $w_0/\lambda$ , de rayon  $|\lambda|^{-1}$ .  $\square$

**Exercice 47.** Soit  $t \in I \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^3$  une courbe  $\Gamma$  paramétrée. On considère le cône  $C$  de sommet  $O \notin P$  s'appuyant sur  $\Gamma$ . En choisissant  $O$  comme origine dans  $\mathbb{R}^3$ , on peut paramétrer  $C$  par

$$(s, t) \in \mathbb{R} \times I \mapsto \varphi(s, t) = s\gamma(t) \in \mathbb{R}^3.$$

Montrer que le vecteur normal est indépendant de  $s$ . Quelle est la courbure de Gauss en un point  $\varphi(s, t)$  du cône, avec  $s \neq 0$  ?

Il vient  $\varphi_s = \gamma(t)$  et  $\varphi_t = s\gamma'(t)$ . Cette paramétrisation est régulière lorsque  $\gamma(t)$  et  $\gamma'(t)$  ne sont pas colinéaires. S'ils le sont tout le temps, c'est que  $\Gamma$  est une droite. Dans ce cas,  $C$  est un plan et il faut utiliser une autre paramétrisation. Nous laissons ce cas de côté ici et supposons que  $\gamma(t) \wedge \gamma'(t) \neq 0$ . On obtient alors que

$$N = \frac{\varphi_s \wedge \varphi_t}{\|\varphi_s \wedge \varphi_t\|} = \frac{\gamma(t) \wedge \gamma'(t)}{\|\gamma(t) \wedge \gamma'(t)\|}$$

est indépendant de  $s$ . Il vient  $\varphi_{ss} = 0$ , donc  $PR = 0$  tandis que  $\varphi_{st} = \varphi'(t)$ , donc

$$\det(\varphi_{st}, \varphi_s, \varphi_t) = \det(\gamma'(t), \gamma(t), \gamma'(t)) = 0.$$

Ainsi  $Q = 0$  et la courbure de Gauss est nulle  $K = 0$ .  $\square$

**Exercice 48.** Soit  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = h(x, y)\}$  le graphe d'une fonction lisse. Montrer que la courbure de Gauss est donnée par la formule

$$K = \frac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{[1 + h_x^2 + h_y^2]^2}.$$

La paramétrisation  $\varphi(x, y) = (x, y, h(x, y))$  conduit à

$$\varphi_x = (1, 0, h_x), \quad \varphi_y = (0, 1, h_y) \quad \text{et} \quad \varphi_x \wedge \varphi_y = (-h_x, -h_y, 1).$$

On en déduit  $E = 1 + h_x^2$ ,  $F = h_x h_y$ ,  $G = 1 + h_y^2$  donc  $EG - F^2 = 1 + h_x^2 + h_y^2$ . Il vient

$$\varphi_{xx} = (0, 0, h_{xx}) \implies \det(\varphi_{xx}, \varphi_x, \varphi_y) = h_{xx} \implies P = \frac{h_{xx}}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}},$$

et on calcule de même  $Q = \frac{h_{xy}}{\sqrt{1+h_x^2+h_y^2}}$ ,  $R = \frac{h_{yy}}{\sqrt{1+h_x^2+h_y^2}}$ . Il s'ensuit que

$$K = \frac{PR - Q^2}{EG - F^2} = \frac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{[1 + h_x^2 + h_y^2]^2}.$$

L'opérateur  $h \mapsto h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2 = \det \begin{pmatrix} h_{xx} & h_{xy} \\ h_{yx} & h_{yy} \end{pmatrix}$  est le déterminant de la matrice hessienne de  $h$ . Il s'appelle l'opérateur de Monge-Ampère et intervient dans de nombreux problèmes d'analyse et de géométrie.  $\square$

**Exercice 49.** Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface régulière et  $p \in S$  tel que  $K(p) \neq 0$ . En utilisant le fait que la courbure de Gauss est le jacobien de l'application de Gauss, montrer que

$$K(p) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A}$$

où  $A$  est l'aire d'une région  $B \subset S$  contenant  $p$ , et  $A'$  est l'aire de l'image de  $A$  par l'application de Gauss (avec des restrictions naturelles sur la façon de prendre la limite).

Lorsque  $K(p) \neq 0$ , l'application de Gauss  $N : S \rightarrow S^2$  réalise un difféomorphisme local d'un petit voisinage  $U_\varepsilon \subset S$  de  $p$  sur un voisinage  $V_\varepsilon = N(U_\varepsilon) \subset S^2$  de  $N(p)$ . Les formes volumes  $d\sigma_{S^2}$  et  $d\sigma_S$  sont reliées par

$$N^*d\sigma_{S^2} = Kd\sigma_S.$$

La formule de changement de variables donne donc

$$\text{Aire}(V_\varepsilon) = \int_{V_\varepsilon} d\sigma_{S^2} = \int_{U_\varepsilon} N^*d\sigma_{S^2} = \int_{U_\varepsilon} Kd\sigma_S.$$

Comme  $K$  est continue au point  $p$ , on obtient

$$\int_{U_\varepsilon} Kd\sigma_S = K(p)\text{Aire}(U_\varepsilon)[1 + o(1)],$$

d'où

$$K(p) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Aire}(V_\varepsilon)}{\text{Aire}(U_\varepsilon)}.$$

$\square$

**Exercice 50.** Soit  $a, b, c > 0$ . On considère l'ellipsoïde

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

1) Pour  $p \in E$ , on note  $d$  la distance de 0 au plan tangent  $T_p(E)$ . Montrer que la courbure de Gauss de  $E$  au point  $p$  est donnée par

$$K(p) = \frac{d^4}{a^2b^2c^2}.$$

2) Montrer que l'ellipsoïde et la sphère unité sont difféomorphes mais pas isométriques si  $(a, b, c) \neq (1, 1, 1)$ .

1) Considérons la paramétrisation  $\varphi(u, v) = (a \cos u, b \sin u \cos v, c \sin u \sin v)$ , avec  $0 < u < \pi$  et  $0 < v < 2\pi$ . Il vient  $\varphi_u = (-a \sin u, b \cos u \cos v, c \cos u \sin v)$  et  $\varphi_v = (0, -b \sin u \sin v, c \sin u \cos v)$ , donc  $F = 0$ . Notons que

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = (bc \cos u \sin u, ac \sin^2 u \cos v, ab \sin^2 u \sin v)$$

a pour norme  $\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = \|\varphi_u\| \cdot \|\varphi_v\| = \sqrt{EG}$ , puisque  $F = 0$ .

Le vecteur  $\varphi(u, v)$  se décompose dans la base  $\{\varphi_u, \varphi_v, N\}$  en  $\varphi = a\varphi_u + b\varphi_v + cN$ , avec

$$d = \text{dist}(0, T_p E) = |c| = \left| \left\langle \varphi, \frac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\sqrt{EG}} \right\rangle \right| = \frac{abc |\sin u|}{\sqrt{EG}}.$$

On calcule à présent la courbure de Gauss. Il vient  $\varphi_{uu} = -\varphi$ , donc

$$\det(\varphi_{uu}, \varphi_u, \varphi_v) = -abc \begin{vmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u \cos v & \cos u \cos v & -\sin u \sin v \\ \sin u \sin v & \cos u \sin v & \sin u \cos v \end{vmatrix} = -abc \sin u.$$

On en déduit que  $P = -abc \sin u (EG)^{-1/2}$ . Des calculs similaires donnent  $Q = 0$  et

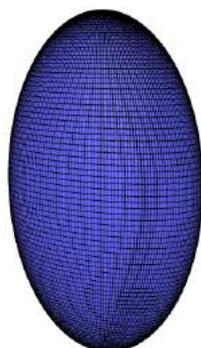
$$R = \frac{\det(\varphi_{vv}, \varphi_u, \varphi_v)}{\sqrt{EG}} = -\frac{abc \sin u}{\sqrt{EG}} \begin{vmatrix} 0 & -\sin u & 0 \\ \cos v & \cos u \cos v & -\sin u \sin v \\ \sin v & \cos u \sin v & \sin u \cos v \end{vmatrix} = -\frac{abc \sin^3 u}{\sqrt{EG}}.$$

On en déduit que la courbure de Gauss de l'ellipsoïde est

$$K = \frac{PR}{EG} = \frac{a^2 b^2 c^2 (\sin u)^4}{E^2 G^2} = \frac{d^4}{a^2 b^2 c^2}.$$

2) Lorsque  $a = b = c = r$ , la distance de 0 à  $T_p E$  est égale à  $r$  et on obtient que la courbure de Gauss de la sphère de rayon  $r$  est constante, égale à  $r^{-2}$ . Lorsque  $a, b, c$  ne sont pas tous les trois égaux,  $K$  n'est pas constante, donc l'ellipsoïde et la sphère unité ne sont pas isométriques, bien qu'ils soient images l'un de l'autre par le difféomorphisme affine  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x/a, y/b, z/c) \in \mathbb{R}^3$ .

Voici une représentation graphique de l'ellipsoïde :



□

**Exercice 51.** Montrer qu'un tore de révolution n'a aucun ombilic (points en lesquels les courbures principales coïncident).

Une paramétrisation d'un tore de révolution est donnée par

$$\varphi(u, v) = ([\rho + r \cos u] \cos v, [\rho + r \cos u] \sin v, r \sin u).$$

Il vient  $\varphi_u = (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u)$  et  $\varphi_v = (-[\rho + r \cos u] \sin v, [\rho + r \cos u] \cos v, 0)$ , donc  $\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = r[\rho + r \cos u]$  et

$$E = r^2, \quad F = 0, \quad \text{et} \quad G = [\rho + r \cos u]^2.$$

On obtient  $\varphi_{uu} = (-r \cos u \cos v, -r \cos u \sin v, -r \sin u)$ , donc

$$\det(\varphi_{uu}, \varphi_u, \varphi_v) = r^2[\rho + r \cos u] \quad \text{et} \quad P = \frac{\det(\varphi_{uu}, \varphi_u, \varphi_v)}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|} = r.$$

On calcule de même  $Q = 0$  et  $R = \cos u[\rho + r \cos u]$ . Ainsi,

$$F_p = I_p^{-1} \cdot II_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\cos u}{\rho + r \cos u} \end{bmatrix}.$$

Il n'y a aucun ombilic car  $r \cos u \neq \rho + r \cos u$ . □

**Exercice 52.** Soit  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  une nappe régulière dont tous les points sont des ombilics.

1) Montrer qu'il existe  $k \in \mathbb{R}$  et  $v \in \mathbb{R}^3$  tels que  $N = -k\varphi + v$ .

2) Montrer que  $\varphi(U)$  est un (morceau de) plan si  $k = 0$ , et que c'est une (partie d'une) sphère centrée en  $v/k$  si  $k \neq 0$ .

1) Tous les points sont des ombilics signifie qu'il existe  $\lambda = \lambda(p) \in \mathbb{R}$  tel que  $F_p = \lambda(p)Id$ . Notons que  $p \mapsto \lambda(p)^2 = K(p)$  est une fonction lisse de  $p$ . Il en va de même de  $p \mapsto \lambda(p)$  si on se place au voisinage d'un point  $p$  tel que  $\lambda(p) \neq 0$ .

Lorsque  $\lambda(p) \equiv 0$ , le vecteur normal est constant et  $S$  est un morceau de plan. On suppose donc dans la suite qu'il existe  $p$  tel que  $\lambda(p) \neq 0$ , et on travaille au voisinage de ce point. Soit  $\varphi = \varphi(x, y)$  une paramétrisation locale de  $S$ . On en déduit que

$$\partial_x N = \lambda(x, y)\varphi_x \quad \text{et} \quad \partial_y N = \lambda(x, y)\varphi_y.$$

On dérive ces relations pour obtenir

$$\partial_{xy}^2 N = \lambda_y \varphi_x + \lambda \varphi_{xy} = \lambda_x \varphi_y + \lambda \varphi_{xy} \implies \lambda_y \varphi_x = \lambda_x \varphi_y.$$

Or  $S$  est une surface régulière, donc  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$  sont linéairement indépendants. Il s'ensuit que  $\lambda_x = \lambda_y = 0$ , i.e.  $\lambda \neq 0$  est indépendant de  $p$ . Le vecteur  $v = N - \lambda\varphi$  est donc constant, ainsi  $N = -k\varphi + v$  avec  $k = -\lambda \in \mathbb{R}$  et  $v \in \mathbb{R}^3$ .

2) Le vecteur  $N = v$  est constant si  $k = 0$ , dans ce cas  $S$  est un morceau de plan. Lorsque  $k \neq 0$ , on obtient

$$\|\varphi - v/k\| = \|N/k\| = |k|^{-1}$$

donc  $S$  est un morceau de la sphère de rayon  $|k|^{-1}$  centrée en  $v/k$ . □

**Exercice 53.**

1) Calculer la courbure de la surface de révolution  $S$  paramétrée par

$$\varphi : (t, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mapsto (t \sin \theta, t \cos \theta, \log t) \in \mathbb{R}^3.$$

2) On considère l'hélicoïde  $H$  paramétré par

$$\psi : (t, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (t \cos \theta, t \sin \theta, \theta) \in \mathbb{R}^3.$$

Montrer que sa courbure est la même que celle de  $S$ .

3) Montrer que  $S$  et  $H$  ne sont pas localement isométriques.

1) On calcule les dérivées premières

$$\varphi_t = (\sin \theta, \cos \theta, 1/t) \text{ et } \varphi_\theta = (t \cos \theta, -t \sin \theta, 0),$$

puis les coefficients de la première forme fondamentale

$$E = 1 + t^{-2}, \quad F = 0 \quad \text{et} \quad G = t^2.$$

On calcule ensuite

$$\varphi_{tt} = (0, 0 - t^{-2}), \quad \varphi_{t\theta} = (\cos \theta, -\sin \theta, 0) \quad \text{et} \quad \varphi_{\theta\theta} = (-t \sin \theta, -t \cos \theta, 0),$$

d'où les coefficients de la seconde forme fondamentale

$$P = \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}, \quad Q = 0, \quad R = -\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

On en déduit que la courbure de Gauss est

$$K = \frac{PR - Q^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{(1+t^2)^2}.$$

2) Des calculs similaires donnent

$$E = +1, \quad F = 0 \quad \text{et} \quad G = 1 + t^2$$

ainsi que

$$P = 0, \quad Q = -\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{et} \quad R = 0,$$

d'où

$$K = -\frac{1}{(1+t^2)^2}.$$

3) Ces deux surfaces ont même courbure de Gauss, mais elles n'ont pas les mêmes premières formes fondamentales. Elles ne sont pas localement isométriques.  $\square$

**Exercice 54.** Soit  $a > 0$ . Montrer que la caténoïde

$$\varphi : (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (a \operatorname{Ch} s \cos t, a \operatorname{Ch} s \sin t, as) \in \mathbb{R}^3$$

est une surface minimale.

On peut supposer sans perte de généralité que  $a = 1$  (la condition de courbure moyenne nulle est préservée par une homothétie). On calcule

$$\varphi_s = (\operatorname{Sh} s \cos t, \operatorname{Sh} s \sin t, 1) \quad \text{et} \quad \varphi_t = (-\operatorname{Ch} s \sin t, \operatorname{Ch} s \cos t, 0).$$

On en déduit  $E = G = \operatorname{Ch}^2 s$ ,  $F = 0$  et  $\|\varphi_s \wedge \varphi_t\| = \operatorname{Ch}^2 s$ . Il vient également

$$\varphi_{ss} = (\operatorname{Ch} s \cos t, \operatorname{Ch} s \sin t, 0)$$

donc

$$\det(\varphi_{ss}, \varphi_s, \varphi_t) = \operatorname{Ch}^2 s \begin{vmatrix} \cos t & \operatorname{Sh} s \cos t & -\sin t \\ \sin t & \operatorname{Sh} s \sin t & \cos t \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\operatorname{Ch}^2 s.$$

On calcule de même

$$\varphi_{st} = (-\operatorname{Sh} s \sin t, \operatorname{Sh} s \cos t, 0) = \operatorname{Th} s \varphi_t$$

et

$$\varphi_{tt} = -(\operatorname{Ch} s \cos t, \operatorname{Ch} s \sin t, 0) = -\varphi_{ss},$$

donc  $Q = 0$  et  $R = -E$ . Ainsi,  $H = (ER + GP - 2FQ)/(2EG - 2F^2) = 0$ .  $\square$

**Exercice 55.** Soit  $a > 0$ . Montrer que l'hélicoïde

$$\varphi : (s, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (a \operatorname{Sh} s \cos t, a \operatorname{Sh} s \sin t, at) \in \mathbb{R}^3$$

est une surface minimale.

On peut supposer sans perte de généralité que  $a = 1$ . On calcule

$$\varphi_s = (\operatorname{Ch} s \cos t, \operatorname{Ch} s \sin t, 0) \quad \text{et} \quad \varphi_t = (-\operatorname{Sh} s \sin t, \operatorname{Sh} s \cos t, 1).$$

On en déduit  $E = G = \operatorname{Ch}^2 s$ ,  $F = 0$  et  $\|\varphi_s \wedge \varphi_t\| = \operatorname{Ch}^2 s$ . Il vient également

$$\varphi_{ss} = (\operatorname{Sh} s \cos t, \operatorname{Sh} s \sin t, 0),$$

donc

$$\det(\varphi_{ss}, \varphi_s, \varphi_t) = \operatorname{Sh}^2 s \begin{vmatrix} \cos t & \operatorname{Ch} s \cos t & -\sin t \\ \sin t & \operatorname{Ch} s \sin t & \cos t \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +\operatorname{Sh}^2 s$$

On calcule de même

$$\varphi_{st} = (-\operatorname{Ch} s \sin t, \operatorname{Ch} s \cos t, 0) = \operatorname{Coth} s \varphi_t$$

et

$$\varphi_{tt} = -(\operatorname{Sh} s \cos t, \operatorname{Sh} s \sin t, 0) = -\varphi_{ss},$$

donc  $Q = 0$  et  $R = -E$ . Ainsi,  $H = (ER + GP - 2FQ)/(2EG - 2F^2) = 0$ .  $\square$

**Exercice 56.** On souhaite montrer que la surface d'Enneper

$$\varphi : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left( u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right) \in \mathbb{R}^3$$

est une surface minimale.

1) Calculer les coefficients de la première forme fondamentale.

2) Calculer les coefficients de la seconde forme fondamentale et les courbures principales pour conclure.

1) On calcule  $\varphi_u = (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u)$ ,  $\varphi_v = (2uv, 1 - v^2 + u^2, -2v)$ . On en déduit

$$E = G = (1 + u^2 + v^2)^2 \text{ et } F = 0,$$

ainsi que

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = [1 + u^2 + v^2](-2u, 2v, 1 - u^2 - v^2).$$

Notons que  $\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = [1 + u^2 + v^2]^2$ .

2) Il vient  $\varphi_{uu} = (-2u, 2v, 2)$ , donc  $\det(\varphi_u, \varphi_u, \varphi_v) = 2[1 + u^2 + v^2]^2$  (on peut faire apparaître plusieurs zéros dans le déterminant via des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes, par exemple  $L2 \mapsto L2 - v \cdot L3$ ). Les calculs de  $\det(\varphi_{uv}, \varphi_u, \varphi_v)$  et  $\det(\varphi_{vv}, \varphi_u, \varphi_v)$  sont similaires et aboutissent à

$$P = 2, Q = -2 \text{ et } R = 0.$$

On en déduit que les courbures principales sont

$$k_1 = \frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2}, k_2 = -\frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2},$$

donc la courbure moyenne  $H$  est identiquement nulle.  $\square$

## Géodésiques

**Exercice 57.** Soit  $N$  le vecteur normal à une surface régulière  $S \subset \mathbb{R}^3$ . Soit  $\gamma : I \rightarrow S$  une courbe tracée sur  $S$  à vitesse constante. Montrer que  $\gamma$  est une géodésique si et seulement si

$$\det(N, \gamma', \gamma'') \equiv 0.$$

Si  $\gamma$  est une géodésique, alors  $\gamma'' = \lambda N$  est proportionnel au vecteur normal, donc  $\det(N, \gamma', \gamma'') \equiv 0$ . Réciproquement, supposons que  $\det(N, \gamma', \gamma'') \equiv 0$ . On peut supposer que  $\gamma$  est paramétrée par longueur d'arc. Ainsi  $\gamma'' = \lambda N + w$  avec  $w \in T_{\gamma(t)}S$  orthogonal à  $\gamma'(t)$ . Il vient  $\det(N, \gamma', \gamma'') = \det(N, \gamma', w) = \pm\|w\|$ , donc  $w = 0$ , i.e.  $\gamma$  est une géodésique.  $\square$

**Exercice 58.** Soit  $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto (t^2, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$  une courbe tracée sur la surface plane  $S = \{(x, y, z) \mid z = 0\}$ . Est-ce une géodésique ?

Le support  $\gamma([0, 1])$  est un segment de droite, mais il n'est pas parcouru à vitesse constante, donc  $\gamma$  n'est pas une géodésique.  $\square$

**Exercice 59.** Calculer les géodésiques de la sphère unité.

Soit  $\gamma : I \mapsto S^2$  une géodésique. Le vecteur  $\gamma'(t)$  est normal au plan tangent à  $S^2$  en  $\gamma(t)$ . La courbe  $\gamma$  est donc une géodésique si et seulement s'il existe  $\lambda(t) \in \mathbb{R}$  tel que  $\gamma''(t) = \lambda(t)\gamma'(t)$ .

On dérive deux fois la relation  $\|\gamma'(t)\|^2 = 1$  pour obtenir

$$\lambda(t) = \langle \gamma, \gamma'' \rangle = -\|\gamma'\|^2 = -c^2$$

car une géodésique évolue à vitesse constante. Quitte à renormaliser en temps ( $t \mapsto t/c$ ), on peut supposer  $c = 1$ . Il vient alors, si  $0 \in I$ ,

$$\gamma(t) = \cos t \gamma(0) + \sin t \gamma'(0),$$

i.e.  $\gamma(I)$  est un arc du grand cercle de  $S^2$  obtenu en intersectant la sphère avec le plan engendré par  $\gamma(0)$  et  $\gamma'(0)$ .  $\square$

**Exercice 60.** On note  $\|p - q\|$  la distance euclidienne dans  $\mathbb{R}^3$ . Montrer que la distance intrinsèque de la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$  est donnée par

$$d_{S^2}(p, q) = 2 \arcsin \frac{\|p - q\|}{2} = \arccos \langle p, q \rangle,$$

où  $\langle p, q \rangle$  désigne le produit scalaire euclidien.

Nous savons que les géodésiques minimisent (localement) la distance. Il résulte de l'exercice précédent que les géodésiques sont les arcs de grands cercles de  $S^2$ . Quitte à composer par une rotation, on peut supposer que  $p$  et  $q$  sont dans le plan  $(xOy)$  avec  $p = (1, 0, 0)$  et  $q = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ , de sorte que  $d_{S^2}(p, q) = \theta$ . On observe enfin que

$$\|p - q\|^2 = (1 - \cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 4 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right),$$

d'où  $\theta = 2 \arcsin \frac{\|p - q\|}{2}$ . On obtient la seconde formule en observant que  $\|p - q\|^2 = 2 - 2\langle p, q \rangle$  et en utilisant les relations trigonométriques sur les angles moitié.  $\square$

**Exercice 61.** Soit  $f : (S^2, d_{S^2}) \rightarrow (S^2, d_{S^2})$  une isométrie de la sphère unité munie de sa distance intrinsèque. Montrer que  $f$  est la restriction d'une isométrie euclidienne de  $\mathbb{R}^3$ .

On définit  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  par  $F(0) = 0$  et  $F(x) = \|x\|f(x/\|x\|)$  lorsque  $x \neq 0$ . Comme  $f$  préserve le produit scalaire des vecteurs de norme 1 (cf exercice précédent), on obtient pour  $x, y \neq 0$ ,  $x' = x/\|x\|$  et  $y' = y/\|y\|$ ,

$$\langle F(x), F(y) \rangle = \|x\| \|y\| \langle f(x'), f(y') \rangle = \|x\| \|y\| \langle x', y' \rangle = \langle x, y \rangle,$$

i.e.  $F$  préserve le produit scalaire euclidien (la propriété est claire lorsque l'un des deux vecteurs est nul). Nous avons expliqué au chapitre 1 que cela entraîne que  $F$  est linéaire, associée à une matrice orthogonale de  $\mathbb{R}^3$ .  $\square$

### Exercice 62.

1) Calculer les géodésiques d'un cylindre droit.

2) Vérifier que deux points d'une génératrice sont joints par une hélice et que celle-ci est une géodésique qui ne minimise pas la distance.

1) On ne perd rien à supposer que l'axe du cylindre est  $(Oz)$  et que le rayon vaut 1. Une paramétrisation de ce cylindre  $\mathcal{C}$  est  $\varphi(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z)$ . Notons que

$$N = \varphi_\theta \wedge \varphi_z = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \wedge (0, 0, 1) = (\cos \theta, \sin \theta, 0).$$

Une courbe  $\gamma(t) = \varphi(\theta(t), z(t))$  tracée sur  $\mathcal{C}$  vérifie

$$\gamma'' = (-\theta'' \sin \theta - (\theta')^2 \cos \theta, \theta'' \cos \theta - (\theta')^2 \sin \theta, z''),$$

donc  $\gamma''$  est proportionnel à  $N$  ssi  $\theta'' = z'' = 0$ . On obtient des cercles si  $z = \text{cst}$ , des droites (génératrices du cylindre) si  $\theta = \text{cst}$ , et des hélices dans tous les autres cas.

2) Deux points distincts  $p, q$  d'une génératrice du cylindre sont joints par un segment de droite le long de cette génératrice. Ils sont également joints par un morceau d'hélice (qui est donc une géodésique non minimisante) : supposons par exemple que  $p = (1, 0, 0)$  et  $q = (1, 0, a)$ , alors

$$\gamma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, at)$$

est une hélice telle que  $\gamma(0) = p$  et  $\gamma(1) = q$ .  $\square$

**Exercice 63.** Soit  $S$  une surface de révolution,

$$\varphi : (s, \theta) \mapsto (f(s) \cos \theta, f(s) \sin \theta, h(s))$$

avec  $(f')^2 + (h')^2 \neq 0$  et  $f > 0$ , de sorte que  $S$  est régulière. Soit

$$\gamma : t \mapsto \varphi(s(t), \theta(t))$$

une géodésique de  $S$ . Montrer la relation de Clairaut :

$$f^2(s(t))\theta'(t) \equiv \text{constante}.$$

On note  $\gamma(t) = \varphi(s(t), \theta(t))$  une courbe tracée sur  $S$ . Il peut être utile de travailler dans la base orthonormée  $u = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ ,  $v = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$ ,  $w = (0, 0, 1)$ . Ainsi

$$\varphi_s = f'u + h'w, \quad \varphi_\theta = fv \quad \text{et} \quad N = -h'u + f'w$$

est un vecteur normal à la surface. On calcule

$$\gamma'' = s''\varphi_s + \theta''\varphi_\theta + (s')^2\varphi_{ss} + 2s'\theta'\varphi_{s\theta} + (\theta')^2\varphi_{\theta\theta}.$$

Or  $\varphi_{ss} = f''u + h''w$ ,  $\varphi_{s\theta} = f'v$  et  $\varphi_{\theta\theta} = -fu$ , donc

$$\gamma'' = Au + [\theta''f + 2s'\theta'f']v + Cw.$$

Par définition,  $\gamma$  est une géodésique si et seulement si  $\gamma''$  est constamment proportionnel au vecteur normal. Comme celui-ci est orthogonal à  $v$ , on en déduit :

$$\theta''f + 2s'\theta'f' \equiv 0.$$

Cette équation différentielle peut (partiellement) s'intégrer en multipliant par  $f$ , il vient  $f^2(s(t))\theta'(t) \equiv \text{constante}$ .  $\square$

**Exercice 64.** Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface régulière définie localement par une paramétrisation  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ . On note  $n$  son vecteur normal unitaire.

Soit  $\gamma : I \rightarrow S$  une courbe paramétrée à vitesse unité, tracée sur  $S$ . Le vecteur  $t = \gamma'$  est donc un vecteur unitaire tangent à  $\gamma$  et à  $S$ . On note  $g = n \wedge t$  : c'est un vecteur tangent à  $S$  qui constitue avec  $t$  une base de l'espace tangent à  $S$  en  $p = \gamma(s)$ .

Les vecteurs  $(t, g, n)$  constituent une base directe de  $\mathbb{R}^3$ , le repère correspondant (avec origine le point  $p = \gamma(s)$ ) s'appelle le repère de Darboux.

1) Montrer qu'il existe des coefficients  $\gamma_n$  (courbure normale),  $\gamma_g$  (courbure géodésique) et  $\tau_g$  (torsion géodésique) tels que

$$\begin{pmatrix} t' \\ g' \\ n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_g & \gamma_n \\ -\gamma_g & 0 & -\tau_g \\ -\gamma_n & \tau_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ g \\ n \end{pmatrix}.$$

2) Montrer que  $\gamma$  est une géodésique de  $S$  si et seulement si sa torsion (en tant que courbe gauche) est égale à sa torsion géodésique.

1) Le vecteur  $t'$  est orthogonal à  $t$  (puisque  $t$  est unitaire), il se décompose donc en

$$t' = \gamma_g g + \gamma_n n$$

où  $\gamma_g$  et  $\gamma_n$  sont deux fonctions qu'on appelle respectivement courbure géodésique et courbure normale. De même,  $g' = at + bn$  pour certaines fonctions  $a, b$ . En dérivant la relation d'orthogonalité  $\langle g, t \rangle = 0$ , il vient

$$0 = \langle g', t \rangle + \langle g, t' \rangle = a + \gamma_g,$$

donc  $a \equiv -\gamma_g$ . On définit la torsion géodésique  $\tau_g$  par  $\tau_g := -b$ .

Enfin,  $n' = \alpha t + \beta g$ . On dérive les relations d'orthogonalité  $\langle n, t \rangle = 0$  et  $\langle n, g \rangle = 0$  pour obtenir

$$\alpha = -\gamma_n \text{ et } \beta = \tau_g.$$

2) Par définition, la courbe  $\gamma$  est une géodésique si et seulement si  $\gamma''$  est partout proportionnel à  $n$ . Or  $\gamma'' = t' = \gamma_g g + \gamma_n n$ , une condition nécessaire et suffisante est donc que la courbure géodésique  $\gamma_g$  soit identiquement nulle. En tant que courbe gauche,  $t' = \kappa N$ , où  $\kappa$  est la courbure de  $\gamma$  et  $N$  est le vecteur normal à  $\gamma$  dans  $\mathbb{R}^3$ . On en déduit que  $\gamma$  est une géodésique ssi  $n \equiv N$  et  $\kappa = \gamma_n$ . C'est également équivalent à ce que  $B \equiv g$  et  $\tau \equiv \tau_g$ , où  $\tau$  désigne la torsion de  $\gamma$  (en tant que courbe gauche).  $\square$

### 4.3 Variétés

#### Plongements

**Exercice 65.** On considère l'application

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mapsto (x^2 - y^2, 2xy) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Montrer que  $f$  est une application surjective qui est un difféomorphisme local au voisinage de chacun des points de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , mais que ce n'est pas un difféomorphisme global.

L'application  $f$  se comprend mieux avec des notations complexes. Si on note  $z = x + iy$ , alors  $f(z) = z^2$ . Elle est donc bien surjective (passez par des coordonnées polaires).

La différentielle de  $f$  est

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ -2y & 2x \end{bmatrix},$$

le jacobien  $4(x^2 + y^2)$  ne s'annule pas dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Il résulte du théorème d'inversion locale que  $f$  réalise un difféomorphisme local au voisinage de chaque point de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Ce n'est bien sûr pas un difféomorphisme global puisque  $f$  n'est pas injective ( $f(-x, -y) = f(x, y)$ ).  $\square$

**Exercice 66.** Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  et  $V \subset \mathbb{R}^p$  deux ouverts, et soit  $f : U \rightarrow V$  une application lisse. On suppose que  $f$  est une immersion injective et propre. Montrer que c'est un plongement.

Il s'agit de montrer que  $f$  réalise un homéomorphisme de  $U$  sur son image  $f(U)$ . Montrer que  $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$  est continue équivaut à montrer que  $f : U \rightarrow V$  est fermée. Soit donc  $F \subset U$  un fermé. On considère  $(y_j) \in f(F)^\mathbb{N}$  une suite d'éléments de  $f(F)$  qui converge dans  $V$  vers  $b \in V$ . On veut montrer que  $b \in f(F)$ . Soit  $x_j$  l'unique point de  $F$  tel que  $f(x_j) = y_j$  ( $f$  est injective) et

$$K = \{y_j, j \in \mathbb{N}\} \cup \{b\}.$$

L'ensemble  $K$  est compact dans  $V$ , donc  $f^{-1}(K)$  est compact dans  $U$  car  $f$  est propre. On peut donc extraire une sous-suite convergente de la suite  $(x_j) \in f^{-1}(K)^\mathbb{N}$ . Quitte à renuméroter, on a donc  $x_j \rightarrow a \in U$ . Notons que  $a \in F$  car  $F$  est fermé. Comme  $f$  est continue, on obtient alors  $f(a) = \lim f(x_j) = \lim y_j = b$ , donc  $b = f(a) \in f(F)$ .  $\square$

**Exercice 67.**

1) Montrer que l'application

$$f : t \in ]-1, +\infty[ \mapsto (t^2 - 1, t(t^2 - 1)) \in \mathbb{R}^2$$

est une immersion injective qui n'est pas un plongement.

2) Montrer que l'application

$$g : t \in \mathbb{R} \mapsto (t^2, t^3) \in \mathbb{R}^2$$

est injective, propre, mais n'est pas un plongement.

1) On observe que  $f(s) = f(t)$  implique  $t^2 = s^2$  et  $t(t^2 - 1) = s(s^2 - 1) = s(t^2 - 1)$ . Soit  $t^2 = s^2 = 1$  et alors  $t = s = 1$  puisqu'on travaille sur  $] -1, +\infty[$ , soit  $t^2 - 1 \neq 0$  et la deuxième équation donne  $t = s$ . L'application  $f$  est donc injective. C'est une immersion car  $f'(t) = (2t, 3t^2 - 1)$  ne s'annule jamais.

L'application  $f$  n'est pas propre comme on le voit en traçant son graphe : on considère

$$K = \{f(-1 + 1/n), n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{(0, 0)\}.$$

C'est un ensemble discret qui a pour seul point d'accumulation l'origine, car  $f(-1 + 1/n) \rightarrow (0, 0)$ , donc  $K$  est un compact de  $\mathbb{R}^2$ . Or

$$f^{-1}(K) = \{-1 + 1/n, n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{1\}$$

n'est pas compact dans  $] -1, +\infty[$  puisque les points  $-1 + 1/n$  convergent vers  $-1$ .

2) L'application  $g$  est clairement injective et propre, mais ce n'est pas une immersion car le vecteur tangent  $g'(t) = (2t, 3t^2)$  s'annule en  $t = 0$ .  $\square$

### Exercice 68.

1) Montrer que l'application déterminant

$$\det : A \in \mathbb{R}^{n^2} \simeq \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \mapsto \det A \in \mathbb{R}$$

est telle que

$$\det(A + H) = \det A + \text{tr}({}^t\text{Com}A \cdot H) + o(H)$$

où  $\text{Com}A$  désigne la comatrice de  $A$ .

2) Vérifier que  $\det$  est une submersion au voisinage de chaque matrice  $A$  de rang  $\geq n - 1$ , en particulier au voisinage de  $A = \text{Id}$ .

1) Rappelons que l'ensemble des matrices inversibles est dense. Par continuité, il suffit donc d'établir cette identité lorsque  $A \in GL(n, \mathbb{R})$ . Nous laissons le lecteur vérifier que

$$\det(\text{Id} + K) = 1 + \text{tr}(K) + o(K).$$

Comme

$$\det(A + H) = \det A \cdot \det(\text{Id} + A^{-1}H) \quad \text{et} \quad A^{-1} = (\det A)^{-1} {}^t\text{Com}A,$$

il vient

$$\begin{aligned} \det(A + H) &= \det A \{1 + \text{tr}({}^t\text{Com}A \cdot H)\} + o(H) \\ &= \det A + \text{tr}({}^t\text{Com}A \cdot H) + o(H). \end{aligned}$$

2) La différentielle du déterminant en  $A$  est donc  $H \mapsto \text{tr}({}^t\text{Com}A \cdot H)$ . Cette forme linéaire est surjective si et seulement si elle est non identiquement nulle, i.e. lorsque  ${}^t\text{Com}A \neq 0$ . Cela revient à dire que l'un des mineurs de  $A$  d'ordre  $n - 1$  est non nul, i.e.  $A$  est de rang  $n - 1$  ou  $n$ .  $\square$

**Sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$** 

**Exercice 69.** Soit  $M \subset \mathbb{R}^n$  une sous-variété de dimension  $d$  et  $g : V_p \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$  une submersion définie dans un voisinage  $V_p$  de  $p \in M$ , telle que  $V_p \cap M = g^{-1}g\{p\}$ . Montrer que

$$T_p M = p + \ker D_p g.$$

En déduire que  $T_p M$  est un sous-espace affine de dimension  $d$ .

On peut supposer que  $p = 0 \in \mathbb{R}^n$  et  $g(p) = 0 \in \mathbb{R}^{n-d}$ . Le modèle linéaire est celui d'une projection

$$\pi : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto (x_{d+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-d}$$

pour lequel  $\pi^{-1}(0) = \{(x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0)\}$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $d$ .

On décompose  $x = (x', x'')$  avec  $x' = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$  et  $x'' = (x_{d+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-d}$ . Comme  $D_p g$  est surjective on peut, quitte à changer l'ordre des coordonnées, supposer que la matrice  $[\partial g_j / \partial x_i]_{d+1 \leq i, j \leq n}$  est inversible. Le théorème d'inversion locale assure que l'on peut composer avec un difféomorphisme  $\varphi$  au voisinage de l'origine  $0 \in \mathbb{R}^{n-d}$  pour se ramener à

$$g(x) = x'' - h(x')$$

de sorte que

$$\left[ \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right]_{d+1 \leq i, j \leq n} = Id_{n-d} \quad \text{et} \quad \ker D_p g = \text{Vect}(e_1, \dots, e_d).$$

Notons que  $e_1 = \gamma'(0)$  où

$$\gamma(t) = (t, 0, \dots, 0, h(t, 0, \dots, 0)).$$

Il en va de même de  $e_2, \dots, e_d$ , donc  $T_p M = \ker D_p g$ . □

**Exercice 70.** Soit  $g \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $D \subset \mathbb{R}^2$  le disque unité fermé et  $D_1, \dots, D_g$  des disques disjoints deux à deux contenus dans  $D$ ,

$$D_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 \leq r_i^2\}.$$

On considère

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (1 - [x^2 + y^2]) \prod_{i=1}^g ((x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 - r_i^2) \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer que

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = f(x, y)\}$$

est une sous-variété compacte et connexe de  $\mathbb{R}^3$ . Représentez-la.

2) Vérifier que  $M$  n'est pas simplement connexe. Combien a-t-elle de trous ?

1) On pose  $h(x, y, z) = z^2 - f(x, y)$  et on observe que  $\nabla h(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  si  $z \neq 0$ . Lorsque  $z = 0$ , on observe que  $(x, y, z) \in M$  si et seulement si  $f(x, y) = 0$ , i.e.  $(x, y) \in \partial D$  ou  $(x, y) \in \partial D_i$ ,  $1 \leq i \leq g$ .

Dans le premier cas,  $f_x = -2x$  et  $f_y = -2y$  ne peuvent pas s'annuler en même temps. Dans le deuxième cas,  $f_x = 2(x - a_i)$  et  $f_y = 2(y - b_i)$  ne s'annulent qu'au centre du disque  $D_i$ . On en déduit que  $M = h^{-1}(0)$  est une surface régulière de  $\mathbb{R}^3$ .

Montrons que  $M$  est bornée. Notons que si  $\|(x, y)\|$  est suffisamment grand, alors  $(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 - r_i^2 \geq 1$  tandis que  $1 - [x^2 + y^2] \leq -1$ , donc  $f(x, y) \leq -1$  et  $(x, y, z)$  ne peut pas appartenir à  $M$  puisque  $f(x, y) = z^2$  devrait être positif. Il existe donc  $C > 0$  telle que

$$M \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \|(x, y)\| \leq C\}.$$

On en déduit que la troisième coordonnée est également bornée :

$$(x, y, z) \in M \Rightarrow |z| \leq \sqrt{|f(x, y)|} \leq C',$$

comme  $f$  est continue donc bornée sur la boule compacte  $\{\|(x, y)\| \leq C\}$ .

Comme  $M$  est également un fermé de  $\mathbb{R}^3$ , on en déduit que  $M$  est une surface compacte plongée dans  $\mathbb{R}^3$ .

Pour montrer que  $M$  est connexe, il suffit de savoir relier chaque point  $(x, y, z) \in M$  à un point  $(x', y', 0) \in M$  par une courbe tracée sur  $M$ . Par symétrie, il suffit de savoir traiter le cas où  $z > 0$ .

La partie  $M^+ = M \cap \{z > 0\}$  de  $M$  s'exprime près de  $M^+$  comme le graphe de la fonction lisse  $(x, y) \mapsto \sqrt{f(x, y)}$ . Elle admet pour paramétrisation

$$(x, y) \in D \setminus \cup_i D_i \mapsto \varphi(x, y) = (x, y, \sqrt{f(x, y)}) \in M^+$$

Un point  $(x', y', 0)$  appartient à  $M$  si et seulement si  $(x', y') \in \partial D \cup \cup_i \partial D_i$ . Observons que

$$tx' + (1-t)x, ty' + (1-t)y \in D \setminus \cup_i D_i$$

pour  $0 \leq t < 1$ , donc

$$\gamma : [0, 1] \mapsto \varphi(tx' + (1-t)x, ty' + (1-t)y) \in M$$

est une courbe tracée sur  $M$  qui joint  $\gamma(0) = (x, y, z) \in M^+$  à  $\gamma(1) = (x', y', 0) \in M \cap (z = 0)$ . Cela montre que  $M$  est connexe.

2) Lorsque  $g = 1$  et  $(a_1, b_1) = (0, 0)$ , la surface  $M$  est un tore de révolution, rencontré à de nombreuses reprises au chapitre 2. La surface n'est pas simplement connexe car le chemin

$$\gamma : \theta \in [0, 2\pi] \mapsto (\cos \theta, \sin \theta, 0) \in M \cap (z = 0)$$

n'est pas homotope à un point. Les chemins

$$\gamma_i : t \in [0, 2\pi] \mapsto (a_i + r_i \cos t, b_i + r_i \sin t, 0) \in M \cap (z = 0)$$

ne peuvent pas non plus être déformés sur un point en restant sur  $M$ . Il y a  $g$  « trous » dans  $M$ .

En voici une approximation graphique lorsque  $g = 9$  :



□

**Exercice 71.**

1) Soit  $S^2$  la sphère unité. Montrer que l'application

$$f : (x, y, z) \in S^2 \mapsto (-x, -y, -z) \in S^2$$

est un difféomorphisme.

2) Montrer que le paraboloïde  $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$  est difféomorphe à un plan.

3) On considère dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  la quadrique

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mid \|x\|^2 - \|y\|^2 = 1\}.$$

Montrer que  $Q$  est difféomorphe à  $S^{n-1} \times \mathbb{R}^p$ .

1) L'application  $f$  est lisse (restriction d'une application lisse de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ ), bijective, et d'inverse  $f^{-1} = f$  qui est lisse. C'est donc un difféomorphisme.

2) L'application  $\varphi : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x, y, x^2 + y^2) \in P$  est une application lisse, bijective, dont l'application réciproque est la projection

$$\varphi^{-1} : (x, y, z) \in P \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

sur les deux premières coordonnées. C'est une application lisse, donc  $\varphi$  est un difféomorphisme.

3) Considérons

$$F : (u, y) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}^p \mapsto (\sqrt{1 + \|y\|^2}u, y) \in Q.$$

C'est une application lisse (restriction d'une application lisse de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ ) qui réalise une bijection de  $S^{n-1} \times \mathbb{R}^p$  sur  $Q$ , comme on le vérifie aisément. L'application réciproque

$$F^{-1} : (x, y) \in Q \mapsto \left( \frac{x}{\sqrt{1 + \|y\|^2}}, y \right) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}^p$$

est également lisse (restriction d'une application lisse  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ ). Ceci montre que  $Q$  est difféomorphe à  $S^{n-1} \times \mathbb{R}^p$ . □

**Exercice 72.** On note  $S^n$  la sphère unité de  $\mathbb{R}^{n+1}$  et on considère

$$f : x \in S^n \mapsto x_{n+1} \in \mathbb{R}.$$

Montrer que les points critiques de  $f$  sont précisément les pôles Nord et Sud.

On cherche à déterminer les points  $p \in S$  en lesquels  $D_p f$  est identiquement nulle (une forme linéaire n'est pas surjective si et seulement si elle est nulle).

L'application  $f$  est la restriction à  $S^n$  de  $F : x \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto x_{n+1} \in \mathbb{R}$ . La différentielle de  $f$  est donc la restriction à  $T_p S$  de la différentielle  $D_p F$ . Comme le gradient de  $F$  en  $p$  est

$$\nabla_p F = (0, \dots, 0, 1),$$

on obtient  $DF_p|_{T_p S} = 0$  si et seulement si  $T_p S$  est orthogonal au vecteur  $(0, \dots, 0, 1)$ , ce qui se produit exactement aux pôles Nord et Sud.  $\square$

**Exercice 73.** Soit  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une application linéaire et

$$H = \left\{ x \in \mathbb{R}^n, \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + L(x) = 1 \right\}$$

où  $A = (a_{ij})$  est une matrice symétrique inversible.

Montrer que  $H$  est soit vide, soit un cône, soit une sous-variété lisse de dimension  $n - 1$ , difféomorphe à  $S^k \times \mathbb{R}^{n-1-k}$ .

On commence par effectuer un changement de base orthonormée pour se ramener à

$$H' = \left\{ y \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 + L_2(y) = 1 \right\}$$

où

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k > 0 > \lambda_{k+1} \geq \dots \geq \lambda_n \in \mathbb{R}^*$$

sont les valeurs propres (non nulles) de la matrice symétrique inversible  $A = (a_{ij})$  et  $L_2(y) = \sum_{i=1}^n \mu_i y_i$  une nouvelle forme linéaire.

On met chaque terme de degré 2 en  $y_i$  sous forme canonique

$$\lambda_i y_i^2 + \mu_i y_i = \varepsilon(\lambda_i) \left( \sqrt{|\lambda_i|} |y_i| + \frac{\mu_i}{2\sqrt{|\lambda_i|}} \right)^2 - \varepsilon(\lambda_i) \frac{\mu_i^2}{4|\lambda_i|}$$

où  $\varepsilon(\lambda_i) = \pm 1$  est le signe de  $\lambda_i$ , pour se ramener à

$$H'' = \left\{ z \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^k z_i^2 - \sum_{i=k+1}^n z_i^2 = c \right\}$$

où  $z_i = \sqrt{|\lambda_i|} |y_i| + \frac{\mu_i}{2\sqrt{|\lambda_i|}}$  et  $c = 1 + \sum_{i=1}^k \frac{\mu_i^2}{4|\lambda_i|} - \sum_{i=k+1}^n \frac{\mu_i^2}{4|\lambda_i|}$ .

Les ensembles  $H$  et  $H'$  (resp.  $H'$  et  $H''$ ) sont difféomorphes puisqu'ils sont images l'un de l'autre par une application linéaire (resp. affine) inversible.

Il faut discuter selon la valeur de la constante  $c$  :

- lorsque  $c = 0$ , on obtient un cône (éventuellement réduit à un point, son sommet);
- on obtient par exemple  $H'' = \emptyset$  (resp.  $H''$  réduit à un point) lorsque  $k = 0$  et  $c > 0$  (resp.  $c = 0$ );
- lorsque  $k = n$ , on a  $c > 0$  et la dilatation  $t \in S^n \mapsto \sqrt{ct} \in H''$  fournit un difféomorphisme de  $S^{n-1}$  sur  $H''$ .

On suppose à présent  $1 \leq k \leq n-1$  (donc  $n \geq 2$ ) et  $c \neq 0$ . Quitte à multiplier l'équation par  $-1$  et changer  $k$  en  $n-k$ , on peut supposer que  $c > 0$ . On vérifie alors que

$$F : (u, v) \in S^{k-1} \times \mathbb{R}^{n-k} \mapsto (u\sqrt{c + \|v\|^2}, v) \in H''$$

est un difféomorphisme de  $S^{k-1} \times \mathbb{R}^{n-k}$  sur  $H''$ .

Notez que  $k$  est donc soit le nombre de valeurs propres positives, soit le nombre de valeurs propres négatives de la matrice  $A$  (cela dépend du signe de  $c$ ).  $\square$

**Exercice 74.** Soit  $M \subset \mathbb{R}^n$  une sous-variété,  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  et

$$f : x \in M \mapsto \langle x, v \rangle \in \mathbb{R}.$$

Montrer que  $p \in M$  est un point critique de  $f$  si et seulement si  $v \in N_p M$ . Retrouver ainsi les résultats de l'exercice 72.

L'application  $f$  est la restriction à  $M$  de

$$F : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle x, v \rangle \in \mathbb{R}.$$

Un point  $p \in M$  est critique si et seulement si  $D_p f = 0$  car  $D_p f$  est une forme linéaire. On obtient pour tout  $p \in M$ ,  $\nabla_p F = v$ , donc  $DF_p|_{T_p M} = 0$  si et seulement si  $T_p M$  est orthogonal au vecteur  $v$ , i.e. si  $v \in N_p M$ .

Lorsque  $v = (0, \dots, 0, 1)$  et  $M$  est la sphère unité, on retrouve le résultat de l'exercice 72.  $\square$

**Exercice 75.** Montrer que le groupe orthogonal

$$O(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \mid A^t A = \text{Id}\}$$

et le groupe spécial orthogonal

$$SO(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \mid A^t A = \text{Id et } \det A = 1\}$$

sont des sous-variétés de  $\mathbb{R}^{n^2}$  dont on précisera la dimension.

On identifie  $\mathbb{R}^{n^2}$  et l'ensemble  $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$  des matrices carrées de taille  $n$ , et on note

$$\text{Sym}(n, \mathbb{R}) = \{S \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}), {}^tS = S\}$$

l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille  $n$  : c'est une sous-variété linéaire de  $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$  de dimension  $n(n+1)/2$ . On note  $I_n$  l'identité. Considérons

$$f : A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \mapsto A^tA \in \text{Sym}(n, \mathbb{R}).$$

C'est une application différentiable telle que

$$O(n, \mathbb{R}) = f^{-1}(I_n).$$

On vérifie que  $I_n$  est une valeur régulière : c'est l'image de  $I_n = f(I_n)$ , or

$$D_{I_n}f : H \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \mapsto H + {}^tH \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$$

est une application (linéaire) surjective puisque son noyau est constitué des matrices antisymétriques, donc

$$\text{rang } D_{I_n}f = n^2 - \dim \text{Antisym}(n, \mathbb{R}) = \dim \text{Sym}(n, \mathbb{R}).$$

On en déduit que  $O(n, \mathbb{R})$  est une sous-variété de dimension

$$\dim O(n, \mathbb{R}) = n(n-1)/2 = \dim \text{Antisym}(n, \mathbb{R}).$$

La variété  $O(n, \mathbb{R})$  est fermée (image réciproque d'un fermé par une application continue) et bornée car si  $A = [a_{ij}] \in O(n, \mathbb{R})$ , alors

$$\text{tr}(A^tA) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 = \text{tr}(I_n) = n;$$

elle est donc compacte. Elle n'est pas connexe car l'application continue

$$\det : O(n, \mathbb{R}) \mapsto \{-1, +1\}$$

est surjective comme on le vérifie aisément.

Le groupe  $SO(n, \mathbb{R})$  est la composante connexe de l'identité de  $O(n, \mathbb{R})$ , c'est donc également une sous-variété de dimension de  $\mathbb{R}^{n^2}$  de dimension  $n(n-1)/2$ .  $\square$

**Exercice 76.** Montrer que l'espace tangent à  $SO(n, \mathbb{R})$  en  $Id$  est l'espace des matrices antisymétriques.

Soit  $f : A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \mapsto A^tA \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ . Il résulte de la proposition 3.2.7 et de l'exercice précédent que

$$T_{Id}SO(n, \mathbb{R}) = T_{Id}O(n, \mathbb{R}) = Id + \ker D_{Id}f.$$

Or  $D_{I_n}f : H \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \mapsto H + {}^tH \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ , donc  $\ker D_{Id}f$  est l'ensemble des matrices antisymétriques.  $\square$

**Exercice 77.** Montrer que l'application  $A \in \mathcal{M}(n, K) \mapsto \exp A \in \mathcal{M}(n, K)$  est une application différentiable telle que  $D_0 \exp = \text{Id}$ , qui vérifie :

- 1)  $\exp(A + B) = \exp A \cdot \exp B$  si  $AB = BA$  ;
- 2)  $\exp(-A) = \exp A^{-1}$  ;
- 3)  $\exp({}^t A) = {}^t \exp A$  ;
- 4)  $\det \exp A = \exp(\text{tr} A)$  ;
- 5)  $\exp \mathcal{M}(n, \mathbb{C}) = GL(n, \mathbb{C})$  ;

L'exponentielle dépend clairement de façon lisse de  $A$ . En développant

$$(A + H)^j = A^j + \sum_{\ell=0}^{j-1} A^{j-1-\ell} H A^\ell + o(H)$$

on obtient une formule (un peu) compliquée pour la différentielle de l'exponentielle. Celle-ci se simplifie lorsque  $A$  et  $H$  commutent, par exemple lorsque  $A = 0$  : il vient dans ce cas  $(0 + H)^j = H + o(H)$  si  $j = 1$ , et  $= o(H)$  si  $j \geq 2$ , donc

$$\exp(0 + H) = \text{Id} + H + o(H).$$

On en déduit que  $D_0 \exp = \text{Id}$ . L'exponentielle réalise donc un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans  $\mathcal{M}(n, K)$  sur un voisinage de  $\text{Id}$ .

Plus généralement, si  $A$  et  $B$  commutent, la formule du binôme s'applique

$$\frac{1}{j!} (A + B)^j = \sum_{\ell=0}^j \frac{1}{j!} \binom{j}{\ell} A^\ell B^{j-\ell} = \sum_{\ell=0}^j \frac{A^\ell}{\ell!} \frac{B^{j-\ell}}{(j-\ell)!}$$

d'où

$$\exp(A + B) = \exp A \cdot \exp B.$$

On en déduit que l'exponentielle d'une matrice  $A$  est une matrice inversible, avec  $\exp A \cdot \exp(-A) = \exp(A - A) = \exp 0 = \text{Id}$  donc  $(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$ .

On montre de façon similaire que  $\exp({}^t A) = {}^t \exp A$  et que pour toute matrice de changement de bases  $P \in GL(n, K)$ , on a

$$P \cdot \exp A \cdot P^{-1} = \exp(P \cdot A \cdot P^{-1}).$$

On peut donc trigonaliser  $A$  pour établir

$$\det \exp A = \exp(\text{tr} A).$$

Il reste à établir la surjectivité de l'exponentielle sur  $GL(n, \mathbb{C})$  (elle n'est pas injective, par exemple  $\exp(2i\pi \text{Id}) = \exp(0) = \text{Id}$ ). Étant donnée  $B \in GL(n, \mathbb{C})$ , il s'agit de construire  $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$  telle que  $\exp A = B$ . On peut décomposer  $B = D + N$  avec  $D$  diagonalisable inversible,  $N$  nilpotente et  $DN = ND$  (décomposition de Dunford). On peut réécrire cette décomposition  $B = D \cdot (\text{Id} + N')$  avec  $N' = D^{-1}N$  nilpotente. En diagonalisant, on trouve une matrice  $\Delta$  telle que  $\exp \Delta = D$ . Il reste donc à trouver une matrice nilpotente  $n$  qui commute avec  $\Delta$  telle que  $\exp n = \text{Id} + N'$ . On peut encore réduire  $N'$  pour se ramener au cas d'un bloc de Jordan. Nous laissons le soin au lecteur d'exhiber  $n$  dans ce cas.  $\square$

### Formes différentielles

**Exercice 78.** Soit  $X, Y$  et  $Z$  trois champs de vecteurs. Montrer l'identité de Jacobi :

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0.$$

Une dérivation  $D$  est un endomorphisme de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  qui vérifie la règle de Leibnitz : pour toutes  $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$  :

$$D(fg) = fD(g) + gD(f).$$

Un champ de vecteur  $X = \sum_{i=1}^3 X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  définit une dérivation via

$$D_X : f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \mapsto \sum_{i=1}^3 X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}).$$

Réciproquement, nous avons montré précédemment que toute dérivation  $D$  est associée à un champ de vecteurs. On observe que  $D_X \circ D_Y - D_Y \circ D_X$  est une dérivation, et on note  $[X, Y]$  le champ de vecteurs correspondant. Il vient alors

$$D_{[X, [Y, Z]]} = D_X D_Y D_Z - D_X D_Z D_Y - D_Y D_Z D_X + D_Z D_Y D_X,$$

$$D_{[Z, [X, Y]]} = D_Z D_X D_Y - D_Z D_Y D_X - D_X D_Y D_Z + D_Y D_X D_Z,$$

$$D_{[Y, [Z, X]]} = D_Y D_Z D_X - D_Y D_X D_Z - D_Z D_X D_Y + D_X D_Z D_Y.$$

L'identité de Jacobi en résulte aisément. □

**Exercice 79.** On considère le champ de vecteurs  $X = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Montrer qu'un polynôme  $P \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  est homogène de degré  $k$  si et seulement si  $L_X P = kP$ .

Supposons  $P$  homogène de degré  $k$ , i.e.  $P(\lambda x) = \lambda^k P(x)$ . En dérivant cette égalité par rapport à  $\lambda$ , on obtient

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial P}{\partial x_i}(\lambda x) = k\lambda^{k-1} P(x),$$

ce qui fournit  $L_X P = kP$  pour  $\lambda = 1$ .

Réciproquement, supposons que  $L_X P = kP$  et considérons, pour  $x \in \mathbb{R}^n$  fixé, l'application différentiable  $\lambda \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto f(\lambda) = P(\lambda x) \in \mathbb{R}$ . Il vient

$$f'(\lambda) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial P}{\partial x_i}(\lambda x) = \frac{k}{\lambda} f(\lambda).$$

Cette équation différentielle s'intègre en  $f(\lambda) = c\lambda^k$  avec  $c = f(1) = P(x)$ , donc  $P$  est homogène de degré  $k$ . □

**Exercice 80.** Soit  $S \subset \mathbb{R}^3$  une surface régulière. Le gradient d'une fonction lisse  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  est une application lisse  $\nabla f : p \in S \rightarrow \nabla f(p) \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$  telle que

$$\langle \nabla f(p), v \rangle_p = Df_p(v)$$

pour tout  $v \in T_p(S)$ .

1) Montrer que si  $E, F$  et  $G$  sont les coefficients de la première forme fondamentale dans une paramétrisation  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , alors

$$\nabla f = \frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2} \varphi_u + \frac{f_v E - f_u F}{EG - F^2} \varphi_v.$$

2) On fixe  $p \in S$  tel que  $\nabla f(p) \neq 0$  et on laisse varier  $v$  dans le cercle unité de  $T_p(S)$  ( $|v| = 1$ ). Montrer que  $Df_p(v)$  est maximal si et seulement si  $v = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ .

3) Si  $\nabla f \neq 0$  pour tout point de la courbe  $C = \{q \in S \mid f(q) = c\}$ , montrer que  $C$  est régulière et que  $\nabla f$  est normal à  $C$  en tout point de  $C$ .

1) Par définition,  $\nabla f = a\varphi_u + b\varphi_v$  avec

$$aE + bF = \langle \nabla f(p), \varphi_u \rangle_p = Df_p(\varphi_u) = f_u$$

et

$$aF + bG = \langle \nabla f(p), \varphi_v \rangle_p = Df_p(\varphi_v) = f_v.$$

On inverse ce système linéaire de dimension 2 pour obtenir

$$a = \frac{f_u G - f_v F}{EG - F^2} \quad \text{et} \quad b = \frac{f_v E - f_u F}{EG - F^2}.$$

2) L'inégalité de Cauchy-Schwarz assure que

$$\|Df_p(v)\| \leq \|\nabla f(p)\| \cdot \|v\| \leq \|\nabla f(p)\|$$

avec égalité si et seulement si  $v$  et  $\nabla f(p)$  sont colinéaires, i.e. lorsque  $v = \nabla f / \|\nabla f\|$ .

3) Lorsque  $\nabla f \neq 0$  au voisinage de  $C = \{q \in S \mid f(q) = c\}$ , l'application  $f$  est une submersion au voisinage de  $C$ , donc  $C$  est une courbe régulière. Si  $\gamma : I \rightarrow C$  désigne une paramétrisation locale, on a  $f \circ \gamma(t) = c$ , donc

$$0 \equiv \frac{df \circ \gamma}{dt} = D_{\gamma(t)} f(\gamma'(t)) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle_p,$$

i.e.  $\nabla f$  est normal à  $C$  en tout point de  $C$ . □

**Exercice 81.** Soit  $S \subset \mathbb{R}^n$  une hypersurface et  $q \in \mathbb{R}^n \setminus S$ . Montrer que

$$f : p \in S \mapsto \|p - q\| \in \mathbb{R}$$

est différentiable, et vérifier que  $p \in S$  est un point critique de  $f$  si et seulement si la droite joignant  $p$  à  $q$  est normale à  $S$  au point  $p$ .

La norme  $\|\cdot\|$  est une application différentiable sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ; comme  $p - q \neq 0$  pour tout  $p \in S$ , on en déduit que l'application

$$f : p \in S \mapsto \|p - q\| \in \mathbb{R}$$

est différentiable sur  $S$ . Un développement limité de  $f$  au voisinage de  $p \in S$  donne, pour  $h \in T_p S$ ,

$$\begin{aligned} f(p+h) &= \|(p-q) + h\| = \sqrt{\|p-q\|^2 + 2\langle p-q, h \rangle + o(h)} \\ &= f(p) + \frac{\langle p-q, h \rangle}{\|p-q\|} + o(h) \\ &= f(p) + D_p(f)(h) + o(h), \end{aligned}$$

donc  $p \in S$  est un point critique de  $f$  (i.e.  $D_p(f) \equiv 0$ ) si et seulement si la droite joignant  $p$  à  $q$  est normale à  $S$  au point  $p$ .  $\square$

**Exercice 82.** Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $1 \leq p \leq n$ . On dit qu'une forme  $p$ -linéaire alternée  $\varphi : E^p \rightarrow \mathbb{R}$  est décomposable s'il existe des formes linéaires  $\varphi_1, \dots, \varphi_p$  telles que  $\varphi = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_p$ .

1) Montrer que toute forme  $n$ -linéaire alternée est décomposable.

2) Montrer que toute forme  $(n-1)$ -linéaire alternée est décomposable.

3) Montrer que si  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sont des formes linéaires indépendantes, alors la 2-forme  $\eta = \alpha \wedge \beta + \gamma \wedge \delta$  est indécomposable.

1) Toute forme  $n$ -linéaire alternée  $\varphi$  est proportionnelle au déterminant  $\det = e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^*$  dans une base  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ .

2) Soit  $\alpha$  une  $(n-1)$ -forme linéaire alternée. Si  $\theta \in E^*$  est une forme linéaire, alors  $\alpha \wedge \theta$  est une  $n$ -forme linéaire alternée, proportionnelle à  $\det$  (en fixant une base). La forme  $\alpha$  induit donc une forme linéaire  $\varphi_\alpha : \theta \in E^* \mapsto \lambda(\theta) \in \mathbb{R}$ , où  $\lambda(\theta)$  est le facteur de proportionnalité,  $\alpha \wedge \theta = \lambda(\theta) \det$ .

Le noyau de  $\varphi_\alpha$  est de dimension  $n-1$  ou  $n$ . Soit  $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$  une famille libre du noyau, que l'on complète avec  $\theta_n$  pour avoir une base de  $E^*$ . On décompose  $\alpha$  dans la base engendrée par les  $h_i$ ,

$$\alpha = \sum_{|I|=n-1} a_I h_I, \quad \text{avec } h_I = h_{i_1} \wedge \dots \wedge h_{i_{n-1}},$$

où  $I = (i_1, \dots, i_{n-1})$  avec  $i_1 < \dots < i_{n-1}$ . Notons que pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,

$$h_i \wedge \alpha = \pm a_J h_1 \wedge \dots \wedge h_n$$

où  $J = [1, n] \setminus \{i\}$ . L'information  $h_i \wedge \alpha = 0$  pour  $1 \leq i \leq n-1$  se traduit donc par le fait que  $\alpha$  est proportionnelle à  $h_1 \wedge \dots \wedge h_{n-1}$ , elle est donc décomposable.

3) On suppose implicitement ici que  $n \geq 4$ . On calcule  $\eta \wedge \eta = 2\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \wedge \delta \neq 0$ . Or si  $\eta = \ell_1 \wedge \ell_2$  était décomposable, on aurait  $\eta \wedge \eta = 0$ .  $\square$

**Exercice 83.** Trouver une application  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  lisse vérifiant  $\phi(0) = 0$  et telle que la forme différentielle

$$\omega(x, y) = \frac{2xy}{(1+x^2)^2} dx + \phi(x) dy$$

soit exacte sur  $\mathbb{R}^2$ . On calculera les primitives de  $\omega$ .

Pour que  $\omega = Pdx + Qdy$  soit exacte il faut qu'elle soit fermée, i.e.

$$\frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \phi'(x).$$

On en déduit  $\phi(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ . Pour trouver les primitives de  $\omega$  on intègre les équations

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy}{(1+x^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{(1+x^2)},$$

ce qui donne

$$f(x, y) = -\frac{y}{(1+x^2)} + \alpha(y) \quad \text{et} \quad f(x, y) = -\frac{y}{(1+x^2)} + \beta(x),$$

d'où  $f(x, y) = -\frac{y}{(1+x^2)}$  à constante additive près.  $\square$

**Exercice 84.** Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$  l'équation  $d\alpha = \omega$  pour les 2-formes  $\omega$  suivantes :

- 1)  $dx_1 \wedge dx_2$  ;
- 2)  $x_2 dx_2 \wedge dx_3$  ;
- 3)  $(x_1^2 + x_2^2) dx_1 \wedge dx_2$  ;
- 4)  $\cos x_1 dx_1 \wedge dx_2$ .

1) On observe que  $\alpha = x_1 dx_2$  convient. Il y a plusieurs solutions puisque l'on peut ajouter une 1-forme différentielle fermée à  $\alpha$ . Par exemple,  $-x_2 dx_1$  convient également, ce qui revient à dire que la forme  $x_1 dx_2 - x_2 dx_1$  est fermée.

2) La forme  $\alpha = \frac{1}{2} x_2^2 dx_3$  convient.

3) La forme  $\alpha = \frac{1}{3} (x_1^3 dx_2 - x_2^3 dx_1)$  convient.

4) La forme  $\alpha = \sin x_1 dx_2$  convient.  $\square$

**Exercice 85.** Soit  $p, n \in \mathbb{N}^*$  avec  $2p \leq n$ . On considère

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \cdots + dx_{2p-1} \wedge dx_{2p}.$$

Montrer que  $\omega^p = p! dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{2p}$  et  $\omega^{p+1} = 0$ .

Lorsque l'on développe  $\omega^p$  par multilinéarité, le caractère alterné assure que les seuls termes non nuls s'obtiennent en prenant exactement une fois chacun des produits  $dx_{2i+1} \wedge dx_{2i+2}$ . Comme les doubles produits  $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 = dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_1 \wedge dx_2$  commutent deux à deux, chaque produit restant est égal à  $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{2p}$ . Il y a  $p!$  façons de procéder, on en déduit donc  $\omega^p = p! dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{2p}$ .

Lorsque l'on considère  $\omega^j$  avec  $j \geq p+1$ , on développe par multilinéarité et on retrouve au moins deux fois chaque terme  $dx_{2i+1} \wedge dx_{2i+2}$ , il résulte donc du caractère alterné que  $\omega^j = 0$ .  $\square$

**Exercice 86.** Soit  $\omega = f(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$  une  $n$ -forme différentielle lisse dans  $\mathbb{R}^n$ . On pose

$$g(x) = \int_0^{x_1} f(t, x_2, \dots, x_n) dt.$$

Montrer que  $\omega = d\alpha$  où  $\alpha = g(x)dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$ .

La forme  $\alpha = g(x)dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$  est saturée en  $dx_2, \dots, dx_n$  donc

$$d\alpha = \frac{\partial g(x)}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n = f(x)dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n = \omega.$$

□

**Exercice 87.** Soit  $f : x \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x_1x_2, x_2x_3, x_3^3) \in \mathbb{R}^3$ . Calculer  $f^*\omega$  lorsque

- 1)  $\omega = x_2 dx_3$  ;
- 2)  $\omega = x_1 dx_1 \wedge dx_3$  ;
- 3)  $\omega = x_1 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ .

1) On obtient  $f^*(x_2 dx_3) = x_2 x_3 d(x_3^3) = 3x_2 x_3^3 dx_3$ .

2) Il vient  $f^*(x_1 dx_1 \wedge dx_3) = x_1 x_2 d(x_1 x_2) \wedge d(x_3^3) = x_1 x_2^2 dx_1 + x_1^2 x_2 dx_2 + 3x_1 x_2 x_3^2 dx_3$ .

3) On obtient  $f^*(x_1 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3) = x_1 x_2 \text{Jac}(f) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = 3x_1 x_2^2 x_3^3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ . □

**Exercice 88.** On considère le changement de coordonnées sphériques

$$F(r, \theta, \varphi) = (r \cos \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi).$$

Montrer que  $x dx + y dy + z dz = r dr$ .

On peut effectuer le calcul de  $dx, dy$  et  $dz$  en fonction de  $dr, d\theta$  et  $d\varphi$  pour obtenir la formule demandée. On peut également partir de la relation  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  pour en déduire que

$$r dr = r \frac{\partial r}{\partial x} dx + r \frac{\partial r}{\partial y} dy + r \frac{\partial r}{\partial z} dz = x dx + y dy + z dz$$

en observant que  $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ . □

**Exercice 89.** On note  $V_n$  le volume de la boule unité de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\lambda$  la mesure de Lebesgue, et  $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$  pour  $s > 0$ .

1) Montrer que  $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} d\lambda(x) = \pi^{n/2}$ .

2) En utilisant l'homogénéité de la fonction volume, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} d\lambda(x) = V_n \int_0^1 (-\ln t)^{n/2} dt \quad \text{et} \quad V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}.$$

3) Montrer par récurrence que  $V_n = \pi^k/k!$  si  $n = 2k$  et

$$V_n = \frac{2^{k+1}\pi^k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)} \text{ si } n = 2k+1.$$

1) L'intégrale est à variables séparables car  $e^{-\|x\|^2} = \prod_{i=1}^n e^{-x_i^2}$ . On obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} d\lambda(x) = \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \right)^n = \pi^{n/2}.$$

Rappelons que le calcul de l'intégrale de Gauss  $\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$  peut se faire en étudiant le cas  $n = 2$  via un passage en coordonnées polaires.

2) Rappelons que pour une densité positive intégrable, on a  $\int_X f(x) d\lambda(x) = \int_0^{+\infty} \mu(f > t) dt$ . En appliquant ceci à  $f(x) = \exp(-\|x\|^2) \in [0, 1]$  on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} d\lambda(x) = \int_0^1 \lambda(\|x\| < (-\ln t)^{n/2}) dt = V_n \int_0^1 (-\ln t)^{n/2} dt$$

puisque la mesure de Lebesgue d'une boule de rayon  $R$  vaut  $R^n V_n$ . Le changement de variable  $y = -\ln t$  assure enfin que  $\int_0^1 (-\ln t)^{n/2} dt = \Gamma(n/2 + 1)$ .

3) Une intégration par parties montre que pour tout  $x > 0$ ,  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ . La formule donnant le volume de la boule unité se déduit donc de la question précédente par récurrence, en observant, dans le cas impair, que

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

□

**Exercice 90.** Montrer que la 2-forme différentielle

$$\eta(x, y) = \frac{dx \wedge dy}{\pi[1 + x^2 + y^2]^2}$$

définit sur  $\mathbb{R}^2$  une mesure de probabilité qui s'étend en une forme volume lisse sur la sphère  $S^2$ .

On passe en coordonnées polaires pour observer que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dx \wedge dy}{\pi[1 + x^2 + y^2]^2} dx \wedge dy = 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{r dr}{\pi[1 + r^2]^2} = 1.$$

On munit à présent la sphère de Riemann  $S^2 \sim \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{[z_0 : z_1]\}$  de sa structure différentiable holomorphe à deux cartes  $U_0 = \{z_0 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$  et  $U_1 = \{z_1 \neq 0\} \sim \mathbb{C}$ . Le changement de cartes est l'inversion  $z \mapsto \phi(z) = 1/z$ . Les notations complexes  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$  étant plus commodes, observons que

$$\frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} = \frac{i}{2} (dx + idy) \wedge (dx - idy) = dx \wedge dy \quad \text{donc} \quad \eta(x, y) = \frac{idz \wedge d\bar{z}}{2\pi[1 + |z|^2]^2}.$$

La conclusion provient de ce que la forme  $\eta$  est invariante par l'inversion  $\phi$ , car

$$\phi^* dz \wedge d\bar{z} = \left(-\frac{dz}{z^2}\right) \wedge \left(-\frac{d\bar{z}}{\bar{z}^2}\right) = \frac{dz \wedge d\bar{z}}{|z|^4} \quad \text{et} \quad \phi^* \left(\frac{1}{[1 + |z|^2]^2}\right) = \frac{1}{[1 + |1/z|^2]^2} = \frac{|z|^4}{[1 + |z|^2]^2}.$$

□

## Variétés abstraites

**Exercice 91.** On considère  $M = \mathbb{R}$  muni des deux atlas à une seule carte  $(\mathbb{R}, \varphi_1)$  et  $(\mathbb{R}, \varphi_2)$  où

$$\varphi_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \varphi_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer que ces deux atlas ne sont pas compatibles.

2) Montrer que les deux structures différentiables correspondantes sont difféomorphes.

1) Il y a deux changements de cartes à considérer. Le changement

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$$

est différentiable, mais le changement

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : x \in \mathbb{R} \mapsto x^{1/3} \in \mathbb{R}$$

n'est pas différentiable en zéro. Les deux atlas ne sont donc pas compatibles.

2) Pour éviter toute confusion, on note  $M_1 = (\mathbb{R}, \varphi_1)$  et  $M_2 = (\mathbb{R}, \varphi_2)$ . L'application

$$f : x \in M_2 \mapsto x^3 \in M_1$$

est un homéomorphisme qui vérifie

$$\varphi_1 \circ f \circ \varphi_2^{-1}(x) = \varphi_1 \circ f(x^{1/3}) = \varphi_1(x) = x$$

et

$$\varphi_2 \circ f^{-1} \circ \varphi_1^{-1}(x) = \varphi_2 \circ f^{-1}(x) = \varphi_2(x^{1/3}) = x.$$

Il s'ensuit que  $f$  et  $f^{-1}$  sont différentiables, donc  $M_1$  et  $M_2$  sont difféomorphes.  $\square$

**Exercice 92.** Soit  $M \subset \mathbb{R}^n$  une sous-variété de dimension  $d$ . Montrer que  $M$  admet une structure différentiable (autrement dit les sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$  sont bien des variétés « abstraites »).

On utilise le point de vue paramétrique : pour tout point  $p \in M$ , il existe un voisinage  $U = \mathcal{U} \cap M$  de  $p$  dans  $\mathbb{R}^n$  et une application

$$f : B \subset \mathbb{R}^d \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$$

qui est une paramétrisation régulière, i.e. un difféomorphisme de la boule unité  $B$  de  $\mathbb{R}^d$  sur  $U$ .

Cette paramétrisation définit une carte locale  $\varphi = f^{-1} : U \rightarrow B$ . Si  $g : B' \rightarrow V$  est une paramétrisation qui rencontre  $U$ , le changement de carte  $\psi \circ \varphi^{-1} = g^{-1} \circ f$  est un difféomorphisme de  $B \cap f^{-1}(U \cap V)$  sur  $B' \cap g^{-1}(U \cap V)$ .

Les cartes  $\{(\varphi, U)\}$  définissent ainsi un atlas différentiel de  $M$  qui en fait une variété différentiable de dimension  $d$ .  $\square$

**Exercice 93.** On note  $M = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  le quotient de  $\mathbb{R}$  par la relation d'équivalence

$$x' \sim x \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x' = x + k.$$

1) Définir un atlas différentiel sur  $M$ .

2) Montrer que la fonction  $F : x \in \mathbb{R} \mapsto 2x \in \mathbb{R}$  induit une application lisse  $f : M \rightarrow M$  telle que  $f \circ \pi = \pi \circ F$ , où  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow M$  désigne la projection.

1) On note  $\pi : x \in \mathbb{R} \rightarrow \bar{x} \in M = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  l'application de passage au quotient et on munit  $M$  de la topologie quotient qui en fait un espace topologique compact. On considère les ouverts

$$U = \pi(]0, 1[) \quad \text{et} \quad V = \pi(]1/2, 3/2[).$$

On obtient un atlas différentiable à deux cartes

$$\varphi^{-1} : x \in ]0, 1[ \mapsto \bar{x} \in U \quad \text{et} \quad \psi^{-1} : x \in ]1/2, 3/2[ \mapsto \bar{x} \in V.$$

L'intersection  $U \cap V$  est égale à

$$W = \pi(]0, 1/2[ \cup ]1/2, 1[) = \pi(]1/2, 1[ \cup ]1, 3/2[)$$

et les changements de cartes sont des difféomorphismes (affines par morceaux). On vérifie par exemple que

$$\psi \circ \varphi^{-1} : x \in ]0, 1/2[ \cup ]1/2, 1[ \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in ]1/2, 1[ \\ x + 1 & \text{si } x \in ]0, 1/2[ \end{cases} \in ]1/2, 1[ \cup ]1, 3/2[.$$

2) L'application  $F : x \in \mathbb{R} \mapsto 2x \in \mathbb{R}$  vérifie

$$F(x + k) = F(x) + 2k \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z}.$$

Elle envoie donc tout représentant de  $\bar{x}$  sur un représentant de  $\overline{F(x)}$ , ce qui permet de définir une unique application  $f : \bar{x} \in M \mapsto \overline{F(x)} \in M$  telle que  $f \circ \pi = \pi \circ F$ .

Pour vérifier que  $f$  est lisse, il faut vérifier que les applications  $\varphi_i \circ f \circ \varphi_j^{-1}$  sont lisses pour chaque carte  $(\varphi_i, U_i)$  de  $M$ . L'atlas considéré ici a deux cartes, il s'agit donc de vérifier que les quatre applications  $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ ,  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ ,  $\varphi \circ f \circ \psi^{-1}$  et  $\psi \circ f \circ \psi^{-1}$  sont lisses. C'est le cas car chacune de ces applications est affine : on obtient

$$\varphi \circ f \circ \varphi^{-1} : x \in ]0, 1[ \mapsto \begin{cases} 2x & \text{si } x \in ]0, \frac{1}{2}[ \\ 2x - 1 & \text{si } x \in ]\frac{1}{2}, 1[ \end{cases}$$

et

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : x \in ]0, 1[ \mapsto \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \in ]0, \frac{1}{4}[ \\ 2x & \text{si } x \in ]\frac{1}{4}, \frac{3}{4}[ \\ 2x - 1 & \text{si } x \in ]\frac{3}{4}, 1[ \end{cases}$$

Les expressions de  $\varphi \circ f \circ \psi^{-1}$  et de  $\psi \circ f \circ \psi^{-1}$  sont similaires.  $\square$

**Exercice 94.**

1) Montrer que le produit de deux variétés différentiables est une variété différentiable, de dimension la somme des dimensions.

2) Montrer que le tore  $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$  admet une structure différentiable qui en fait une variété différentielle compacte, difféomorphe à  $(S^1)^n = S^1 \times \dots \times S^1$ .

1) Si  $\{(\varphi, U)\}$  est un atlas différentiable d'une variété  $M$  de dimension  $m$  et  $\{(\psi, V)\}$  un atlas différentiable d'une variété  $N$  de dimension  $n$ , alors les ouverts produit  $U \times V$  forment un recouvrement du produit  $M \times N$ , et les applications

$$f : (x, y) \in U \times V \mapsto (\varphi(x), \psi(y)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

sont des homéomorphismes de  $U \times V$  sur  $\varphi(U) \times \psi(V)$ . Les changements de carte sont des difféomorphismes, produit des changements de carte de  $N$  et de  $M$ . On obtient donc ainsi un atlas différentiable qui fait de  $M \times N$  une variété différentiable de dimension  $m + n$ .

2) En utilisant la question précédente, il suffit de comprendre que le quotient  $M = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  peut être muni d'une structure différentiable qui en fait une variété différentielle compacte difféomorphe à  $S^1$ . On note  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow M = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  l'application de passage au quotient, et on munit  $M$  de la topologie quotient qui en fait un espace topologique compact. On considère les ouverts

$$U = \pi(]0, 1[) \quad \text{et} \quad V = \pi(]1/2, 3/2[).$$

On obtient un atlas différentiable à deux cartes

$$\varphi^{-1} : x \in ]0, 1[ \mapsto \bar{x} \in U \quad \text{et} \quad \psi^{-1} : x \in ]1/2, 3/2[ \mapsto \bar{x} \in V.$$

L'intersection  $U \cap V$  est égale à l'ouvert  $W = \pi(]0, 1/2[ \cup ]1/2, 1[) = \pi(]1/2, 1[ \cup ]1, 3/2[)$  et les changements de cartes sont des difféomorphismes (affines par morceaux). On vérifie par exemple que

$$\psi \circ \varphi^{-1} : x \in ]0, 1/2[ \cup ]1/2, 1[ \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in ]1/2, 1[ \\ x + 1 & \text{si } x \in ]0, 1/2[ \end{cases} \in ]1/2, 1[ \cup ]1, 3/2[.$$

□

**Exercice 95.** Soit  $P \in \mathbb{R}[x_0, \dots, x_n]$  un polynôme homogène tel que  $D_x P \neq 0$  si  $x \neq 0$ . Montrer que

$$H_P = \{[x] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \mid P(x) = 0\}$$

est une hypersurface de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ .

On commence par observer que  $H_P$  est un sous-ensemble bien défini de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  : l'annulation de  $P(x)$  ne dépend pas du représentant  $x$  de la classe d'équivalence  $[x]$ .

On fixe un point  $[a] \in H_P$ . On peut supposer (quitte à changer l'ordre des coordonnées) que  $a_0 \neq 0$ , i.e.  $[a] \in U_0$ . Près de ce point,  $H_P$  est définie par

$$\{[1 : x_1 : \dots : x_n] \in U_0 \mid P(1, x_1, \dots, x_n) = 0\},$$

i.e. est l'image réciproque de 0 par l'application

$$f : [1 : x_1 : \dots : x_n] \in U_0 \simeq \mathbb{R}^n \mapsto P(1, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}.$$

Cette application est une submersion car, par hypothèse,

$$\nabla f = (\partial P / \partial x_1, \dots, \partial P / \partial x_n)(1, x_1, \dots, x_n) \neq 0.$$

Lorsque  $d = 1$ , on vérifie que  $H_P$  est difféomorphe à  $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ .

On peut montrer un résultat similaire pour les hypersurfaces de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ .  $\square$

**Exercice 96.** Montrer que  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  est difféomorphe à  $S^1$ .

Nous identifions  $S^1 \sim \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  et notons  $\pi_1 : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  l'application de passage au quotient. De même, on peut identifier  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  et  $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$  en repérant une droite passant par l'origine de  $\mathbb{R}^2$  par l'angle (dans  $[0, \pi[$ ) qu'elle fait avec une droite de référence. On note  $\pi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  l'application de passage au quotient.

L'application  $\theta \in \mathbb{R} \mapsto 2\theta \in \mathbb{R}$  respecte ces relations d'équivalence et induit une application  $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow S^1$  dont on vérifie que c'est un difféomorphisme.  $\square$

**Exercice 97.**

1) Montrer que  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , l'ensemble des droites de  $\mathbb{R}^3$  qui passent par l'origine, admet une structure de variété réelle compacte de dimension deux.

2) Montrer que l'application

$$f : [x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mapsto \frac{(yz, zx, xy, x^2 + 2y^2 + 3z^2)}{x^2 + y^2 + z^2} \in \mathbb{R}^4$$

est un plongement du plan projectif dans  $\mathbb{R}^4$ .

1) Une droite qui passe par l'origine est définie par un vecteur directeur non nul  $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  : la droite est alors l'ensemble

$$\{(tx_0, tx_1, tx_2) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Deux vecteurs directeurs d'une même droite sont équivalents pour la relation d'équivalence « multiplication par un réel non nul ». On note

$$[x_0 : x_1 : x_2] := \{(tx_0, tx_1, tx_2) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}^*\}$$

la classe d'équivalence correspondante : c'est la droite privée de l'origine. Il s'ensuit que le plan projectif réel  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  est un quotient

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \{[x]\} = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \mathbb{R}^*.$$

On le munit de la topologie quotient : un ensemble  $U$  de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  est ouvert ssi  $\pi^{-1}U$  est ouvert dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , où  $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  est la projection canonique. Cette topologie est métrisable et  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  est ainsi une variété topologique de dimension 2. Notons qu'il y a deux représentants particuliers d'une droite passant par l'origine, il s'agit de l'intersection de la droite avec la sphère unité  $S^2$  de  $\mathbb{R}^3$ . Ces

deux vecteurs directeurs sont opposés ; ils montrent que l'on peut également identifier  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  et le quotient de  $S^2$  par le groupe fini à deux éléments. Par conséquent,  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  est compacte.

On définit un atlas différentiel en recouvrant  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  par les trois cartes  $(U_i, \varphi_i)$ ,

$$U_i = \{[x] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid x_i \neq 0\}$$

où  $0 \leq i \leq 2$ , et

$$\varphi_0 : [x] \in U_0 \mapsto (x_1/x_0, x_2/x_0) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\varphi_1 : [x] \in U_1 \mapsto (x_0/x_1, x_2/x_1) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\varphi_2 : [x] \in U_2 \mapsto (x_0/x_2, x_1/x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

On vérifie que les fonctions de transition  $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$  sont lisses (là où elles sont définies). Par symétrie, il suffit de traiter le cas de  $i = 1$  et  $j = 0$ . On observe que

$$\varphi_0^{-1} : (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto [1 : y_1 : y_2] \in U_0 \quad \text{et} \quad \varphi_0^{-1}(y_1, y_2) = [1 : y_1 : y_2] = [1/y_1 : 1 : y_2/y_1]$$

si  $y_1 \neq 0$ , i.e. si  $\varphi_0^{-1}(y_1, y_2) \in U_0 \cap U_1$ . Ainsi,

$$\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1} : (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \mapsto (1/y_1, y_2/y_1) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$$

est bien un difféomorphisme.

2) Rappelons qu'un plongement est une immersion lisse qui est un homéomorphisme sur son image. Comme  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  est compacte, il suffit de vérifier que  $f$  est une immersion injective et lisse.

On vérifie aisément que les applications  $f \circ \varphi_i^{-1}$  sont lisses,  $0 \leq i \leq 2$ . Par exemple

$$f \circ \varphi_0^{-1}(y, z) = \frac{(yz, z, y, 1 + 2y^2 + 3z^2)}{1 + y^2 + z^2} \in \mathbb{R}^4$$

et la matrice de sa différentielle est donnée par

$$[1 + y^2 + z^2]^2 Df \circ \varphi_0^{-1}(y, z) = \begin{bmatrix} z(1 - y^2 + z^2) & -2yz & 1 + z^2 - y^2 & 2y(1 - z^2) \\ y(1 + y^2 - z^2) & 1 + y^2 - z^2 & -2yz & 2z(2 + y^2) \end{bmatrix}.$$

On vérifie enfin que cette matrice est bien de rang 2 en tout point, ce qui assure que  $f$  est une immersion lisse (sur l'ouvert  $U_0$ , les autres ouverts se traitent de façon similaire).

Il reste à s'assurer que  $f$  est injective. Soit  $[x : y : z]$  et  $[a : b : c]$  deux points de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  tels que  $f[x : y : z] = f[a : b : c]$ . On peut supposer, sans perte de généralité, que  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Il vient donc

$$xy = ab; \quad yz = bc, \quad zx = ca \quad \text{et} \quad y^2 + 2z^2 = b^2 + 2c^2.$$

On en déduit que soit  $(x, y, z) = (a, b, c)$ , soit  $(x, y, z) = -(a, b, c)$ . Dans les deux cas,  $[x : y : z] = [a : b : c]$ , donc  $f$  est injective.  $\square$

**Exercice 98** (Homographies). *On identifie  $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{C}})$  avec  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Une homographie est une fraction rationnelle de degré 1,*

$$z \mapsto f_A(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{où} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}).$$

1) *Montrer que les homographies forment un sous-groupe  $Hom$  du groupe des homéomorphismes de  $\overline{\mathbb{C}}$  et que  $A \in (GL(2, \mathbb{C}), \cdot) \mapsto f_A \in (Hom, \circ)$  est un morphisme surjectif de groupes dont on calculera le noyau.*

2) *Montrer que  $Hom$  agit de façon 3-transitive sur  $\overline{\mathbb{C}}$ .*

3) *Montrer que  $Hom$  est engendré par les transformations affines et par l'inversion  $z \mapsto 1/z$ .*

4) *Montrer que  $Hom$  préserve la famille des quasi-cercles (cercles et droites).*

1) Si  $c = 0$ , alors  $a \neq 0$  et  $f_A$  s'étend en un homéomorphisme de  $\overline{\mathbb{C}}$  en posant  $f_A(\infty) = \infty$ . Si  $c \neq 0$ , alors  $f_A$  s'étend en posant  $f_A(\infty) = a/c$  et  $f_A(-d/c) = \infty$ .

On vérifie aisément que  $f_A \circ f_B = f_{AB}$  et que le noyau de ce morphisme surjectif est constitué des homothéties de rapport non nul  $\simeq \mathbb{C}^*$ , cf.  $f_{\lambda Id} = Id$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ .

2) Étant donnés trois points distincts  $z_0, z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ , et trois autres points distincts  $w_0, w_1, w_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ , il s'agit de montrer qu'il existe une unique homographie  $f \in Hom$  telle que

$$f(z_0) = w_0, \quad f(z_1) = w_1, \quad \text{et} \quad f(z_2) = w_2.$$

Il suffit de traiter le cas où  $w_0 = 0$ ,  $w_1 = 1$  et  $w_2 = \infty$ . Soit  $z_0, z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$  des points deux à deux distincts. La transformation homographique

$$\Phi(z) = \frac{z - z_0}{z - z_2} \cdot \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_0}.$$

est telle que  $\Phi(z_0) = 0$ ,  $\Phi(z_1) = 1$  et  $\Phi(z_2) = \infty$ .

Si  $\psi$  est une autre homographie avec les mêmes propriétés, alors

$$f(z) = \Phi \circ \psi^{-1}(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

est une homographie qui vérifie

- $f(0) = 0$  donc  $b = 0$ ;
- $f(\infty) = \infty$  donc  $c = 0$ ;
- $f(1) = 1$  donc  $a/c = 1$ .

Il s'ensuit que  $f = Id$ , donc  $\psi = \Phi$ .

3) On note  $\tau_a(z) = z + d$  la translation de  $d \in \mathbb{C}$ ,  $j(z) = 1/z$  l'inversion, et  $\delta_a(z) = az$  la dilatation par  $a \in \mathbb{C}$ .

Soit  $f(z) = (az + b)/(cz + d)$  une homographie. Si  $c = 0$ , alors  $f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = a'z + b' = \tau_{b'} \circ \delta_{a'}(z)$ . Si  $c \neq 0$ , alors on décompose

$$f(z) = \frac{a'z + b'}{z + d'} = a' + \frac{b' - a'd'}{z + d'} = \tau_{a'} \circ \delta_{b' - a'd'} \circ j \circ \tau_{d'}(z).$$

4) L'équation d'un cercle ou d'une droite peut s'écrire dans  $\mathbb{C}$

$$\lambda|z|^2 + \mu z + \bar{\mu}\bar{z} + \delta = 0$$

avec  $\lambda, \delta \in \mathbb{R}$  et  $\mu \in \overline{\mathbb{C}}$  (le cas  $\lambda = 0$  correspondant aux droites).

Pour vérifier que cette famille d'équations est préservée par les homographies, on traite séparément le cas des générateurs du groupe  $Hom$ . Une translation  $z \mapsto z + b$  préserve clairement cette famille (changer  $\mu$  en  $\mu + \bar{b}$  et  $\delta$  en  $\delta + |b|^2 + \mu b + \bar{\mu}\bar{b}$ ). Une dilatation  $z \mapsto az$  également (changer  $\mu$  en  $\mu/\bar{a}$  et  $\delta$  en  $\delta/|a|^2$ ). Il reste à vérifier que la famille est invariante par l'inversion  $z \mapsto 1/z$  : c'est le cas en interchangeant les rôles de  $\delta$  et  $\lambda$ , et en changeant  $\mu$  en  $\bar{\mu}$ .  $\square$

**Exercice 99.** Étant donnés deux grands cercles  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset S^2 = \overline{\mathbb{C}}$ , montrer qu'il existe une unique homographie  $f$  telle que  $f(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$ .

Commençons par observer que le groupe des homographies est engendré par les translations, les dilatations et l'inversion  $z \mapsto 1/z$  : on note en effet  $\tau_d(z) = z + d$  la translation de  $d \in \mathbb{C}$ ,  $j(z) = 1/z$  l'inversion, et  $\delta_a(z) = az$  la dilatation par  $a \in \mathbb{C}$ . Soit  $f(z) = (az + b)/(cz + d)$  une homographie. Si  $c = 0$ , alors  $f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = a'z + b' = \tau_{b'} \circ \delta_{a'}(z)$ . Si  $c \neq 0$ , alors on décompose

$$f(z) = \frac{a'z + b'}{z + d'} = a' + \frac{b' - a'd'}{z + d'} = \tau_{a'} \circ \delta_{b' - a'd'} \circ j \circ \tau_{d'}(z).$$

L'équation d'un cercle ou d'une droite peut s'écrire dans  $\mathbb{C}$

$$\lambda|z|^2 + \mu z + \bar{\mu}\bar{z} + \delta = 0$$

avec  $\lambda, \delta \in \mathbb{R}$ ,  $\mu \in \overline{\mathbb{C}}$  (le cas  $\lambda = 0$  correspondant aux droites). Nous souhaitons vérifier que cette famille d'équations est préservée par les homographies. Une translation  $z \mapsto z + b$  préserve clairement cette famille (changer  $\mu$  en  $\mu + \bar{b}$  et  $\delta$  en  $\delta + |b|^2 + \mu b + \bar{\mu}\bar{b}$ ). Une dilatation  $z \mapsto az$  également (changer  $\mu$  en  $\mu/\bar{a}$  et  $\delta$  en  $\delta/|a|^2$ ). Il reste donc à vérifier que la famille est invariante par  $z \mapsto 1/z$  : c'est le cas en interchangeant les rôles de  $\delta$  et  $\lambda$ , et en changeant  $\mu$  en  $\bar{\mu}$ .

Étant donnés trois points distincts de  $S^2$ , il existe un unique cercle de  $S^2$  qui passe par ces trois points. Étant donnés deux cercles  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ , la proposition précédente assure qu'il existe une unique homographie  $f$  telle que  $f(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$ .  $\square$

**Exercice 100.** Soit  $D \subset \mathbb{C}$  le disque unité. Montrer que le groupe des bihomomorphismes de  $D$  est

$$Aut(D) = \left\{ z \mapsto e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}; a \in D \text{ and } \theta \in [0, 2\pi] \right\} \simeq D \times S^1.$$

Soit  $a \in D$ . Considérons

$$g_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

C'est une fonction holomorphe dans  $D$  telle que

$$1 - |g_a(z)|^2 = \frac{|1 - \bar{a}z|^2 - |z - a|^2}{|1 - \bar{a}z|^2} = \frac{(1 - |z|^2)(1 - |a|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2}.$$

On en déduit que  $g_a(D) \subset D$ . Par ailleurs, pour  $z, w \in D$ ,

$$g_a(z) = w \iff z(1 + \bar{a}w) = a + w \iff z = g_{-a}(w),$$

donc  $g_a \in \text{Aut}(D)$  avec  $g_a^{-1} = g_{-a}$ . Si on compose  $g_a$  avec la rotation d'angle  $\theta$ , on obtient un nouvel automorphisme de  $D$  qui est  $z \mapsto e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ . On a donc montré que

$$\left\{ z \mapsto e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}; a \in \bar{\partial} \text{ and } \theta \in [0, 2\pi] \right\} \subset \text{Aut}(D).$$

Réciproquement, soit  $f \in \text{Aut}(D)$  et  $a = f(0) \in D$ . Alors  $h = g_a \circ f$  est un automorphisme de  $D$  qui envoie 0 sur 0. Le lemme de Schwarz assure que  $|h(z)| \leq |z|$ , ce même lemme appliqué à  $h^{-1}$  assure que  $|h(z)| \geq |z|$ , donc  $h$  est une rotation, i.e.  $f(z) = e^{i\theta} g_{-a}(z)$ .  $\square$

**Exercice 101.** Soit  $p \geq 3$ . On se donne  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$  deux nombres complexes linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$ .

1) Montrer que

$$z \mapsto f(z) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{[z - (j\omega_1 + k\omega_2)]^p}$$

définit une fonction méromorphe doublement périodique dont le groupe des périodes est le réseau  $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ .

2) Montrer que  $f$  induit une application holomorphe  $f : X = \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{P}^1$ .

1) Observons que  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto |x_1\omega_1 + x_2\omega_2| \in \mathbb{R}^+$  définit une norme sur  $\mathbb{R}^2$  : toutes les propriétés (homogénéité, inégalité triangulaire) sont claires, sauf peut-être la propriété d'annulation, qui résulte de ce que  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{R}$ .

Cette norme est donc équivalente à la norme euclidienne  $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ . On en déduit que le nombre d'éléments du réseau  $\Lambda$  contenus dans un disque est fini. Si  $|z| \leq R$ , il s'ensuit que pour tout  $\lambda \in \Lambda$ ,  $|\lambda| \geq 2R \Rightarrow |z - \lambda| \geq |\lambda|/2$ . La convergence de la série se ramène ainsi à la convergence de la série de Riemann

$$\sum_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{|(j,k)|^{p/2}}$$

qui converge effectivement dès que  $p > 2$ . On obtient ainsi une fonction méromorphe avec des pôles d'ordre  $p$  en chaque point du réseau.

2) La série étant invariante par changement de couples d'indices dans  $\mathbb{Z}^2$ , le groupe des périodes contient  $\Lambda$ . Elle induit donc une fonction méromorphe sur le quotient  $X = \mathbb{C}/\Lambda$ . Il reste enfin à réaliser que les fonctions méromorphes  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  sont exactement les fonctions holomorphes de  $X$  vers la sphère de Riemann  $\mathbb{P}^1$ .  $\square$

**Exercice 102.** Soit  $\Gamma$  un réseau de  $\mathbb{C}$  et  $X = \mathbb{C}/\Gamma$ . On suppose qu'il existe  $a \in \mathbb{C}^*$  tel que  $a\Gamma \subset \Gamma$ .

1) Montrer que  $z \mapsto az$  induit une application holomorphe  $f : X \rightarrow X$ .

2) Donner des exemples de tels  $a$  pour  $\Gamma = \mathbb{Z}[i]$  et  $\Gamma = \mathbb{Z}[j]$ , où  $j = e^{2i\pi/3}$ .

1) Observons que si  $z' = z + \gamma$  est  $\Gamma$ -équivalent à  $z$ , alors  $az' = az + a\gamma = az + \gamma'$  est équivalent à  $az$  puisque  $a\Gamma \subset \Gamma$ . La multiplication par  $a$  induit donc une application  $f$  sur le quotient  $X = \mathbb{C}/\Gamma$ . Pour vérifier que cette application est holomorphe, il faut post/pré-composer avec des cartes d'un atlas holomorphe que nous exhibons à présent.

On peut toujours se ramener à un réseau  $\Gamma = \mathbb{Z}[\tau]$ , où  $\tau \in \mathbb{C}$  est un nombre complexe de partie imaginaire positive  $\Im(\tau) > 0$ . On note  $\pi : z \in \mathbb{C} \mapsto \pi(z) \in X = \mathbb{C}/\Gamma$  la projection canonique et on considère l'atlas à deux cartes

$$\varphi^{-1} : z \in \Omega = \{z = a + b\tau \in \mathbb{C}, 0 < a < 1 \text{ et } 0 < b < 1\} \mapsto \pi(z) \in U$$

et

$$\psi^{-1} : z \in \Omega' = \{z = a + b\tau \in \mathbb{C}, 1/2 < a < 3/2 \text{ et } 1/2 < b < 3/2\} \mapsto \pi(z) \in U'.$$

L'application  $\psi \circ \varphi^{-1}$  est holomorphe dans l'ouvert

$$\Omega \cap \varphi(U \cap U') = \{z = a + b\tau \in \mathbb{C}, a \in ]0, 1/2[ \cup ]1/2, 1[ \text{ et } b \in ]0, 1/2[ \cup ]1/2, 1[ \},$$

car

$$\psi \circ \varphi^{-1}(z) = \begin{cases} z & \text{si } z = a + ib \text{ avec } a \in ]1/2, 1[ \text{ et } b \in ]1/2, 1[ \\ z + 1 & \text{si } z = a + ib \text{ avec } a \in ]0, 1/2[ \text{ et } b \in ]1/2, 1[ \\ z + i & \text{si } z = a + ib \text{ avec } a \in ]1/2, 1[ \text{ et } b \in ]0, 1/2[ \\ z + 1 + i & \text{si } z = a + ib \text{ avec } a \in ]0, 1/2[ \text{ et } b \in ]0, 1/2[ \end{cases}$$

est holomorphe sur chacune des quatre composantes connexes de l'ouvert  $\Omega \cap \varphi(U \cap U')$ . Il en va de même pour le second changement de carte (i.e.  $\varphi \circ \psi^{-1}$  est holomorphe dans  $\Omega' \cap \psi(U \cap U')$ ), l'atlas considéré est donc un atlas holomorphe.

On vérifie enfin que les applications  $\psi \circ f \circ \psi^{-1}, \psi \circ f \circ \varphi^{-1}, \varphi \circ f \circ \psi^{-1}$  et  $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$  sont toutes holomorphes, ce qui assure que  $f : X \rightarrow X$  est holomorphe.

2) La multiplication par  $a = k \in \mathbb{Z}^*$  convient toujours (et c'est la seule pour un réseau générique). Lorsque  $\Gamma = \mathbb{Z}[i]$ , on peut également prendre  $a = i$ ; lorsque  $\Gamma = \mathbb{Z}[j]$ , on peut également prendre  $a = j$  ou  $a = j^2 = \bar{j}$ .  $\square$

# Bibliographie

- [Audin] M. Audin.  
*Géométrie.*  
L3-M1, EDP Sciences (2006).
- [BerGos] M. Berger et B. Gostiaux.  
*Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces.*  
P.U.F. (1987).
- [DoCarmo] M. DoCarmo.  
*Differential Geometry of curves and surfaces.*  
Prentice Hall (1976).
- [Lafontaine] J. Lafontaine.  
*Introduction aux variétés différentielles.*  
Grenoble Sciences (2010).
- [Milnor] J. Milnor.  
*Morse theory.*  
University press, Princeton (1963).
- [Rouvière] F. Rouvière  
*Petit guide de calcul différentiel.*  
Cassini (2014), 4ème édition.
- [Sossinsky] A. Sossinsky  
*Nœuds. Génèse d'une théorie mathématique.*  
Éditions du Seuil, Paris (1997).
- [Spivak] M. Spivak  
*Differential Geometry Vol II.*  
Publish or Perish Inc (1979).
- [Warner] F. Warner  
*Foundations of differential manifolds and Lie groups.*  
Graduate Texts in Mathematics, 94. Springer-Verlag (1983).

# Index

- équation de Gauss, 72, 74
- équations de Mainardi-Codazzi, 73, 74
- application exponentielle, 84, 88
- atlas différentiable, 134, 160
- bouteille de Klein, 142
- caractéristique d'Euler, 92, 93
- cercle osculateur, 14
- champ de vecteurs, 114, 118–120, 124, 136, 158
- changement de carte, 133, 136
- courbe fermée, 28, 30, 31, 33
- courbe géométrique, 6–14, 16–18, 20
- courbure, 11–14, 16, 18, 19, 23
- courbure de Gauss, 65, 67, 98, 99
- courbure moyenne, 65
- courbures principales, 65
- cubique cuspidale, 35, 107, 113
- dérivation, 118, 119
- degré, 28–30, 39
- deuxième forme fondamentale, 59, 63, 64, 66, 69, 98, 100
- difféomorphisme, 56, 97, 99, 104, 105, 107, 108, 116, 124, 129, 131, 136, 139, 149, 155–157
- différentielle extérieure, 126, 127
- distance intrinsèque, 85, 86, 88, 100
- espace projectif, 135, 143
- espace tangent, 113, 136
- fibré cotangent, 114, 140
- fibré tangent, 113, 114, 136, 137
- fonction de Morse, 108
- forme différentielle, 123, 124, 127, 129, 159, 160
- forme exacte, 128, 140, 159
- forme multilinéaire, 121
- forme volume, 125, 130, 141
- formule de Stokes, 131, 132
- géodésique, 83, 84, 86, 100, 101
- groupe de Lie, 148, 151
- hélice, 25, 37
- homographie, 161
- homotopie, 30–32
- immersion, 106, 107, 117, 137, 155
- inégalité de Wirtinger, 33, 34
- inégalité isopérimétrique, 33, 34
- isométrie, 8, 12, 16, 23, 24, 26, 27, 39, 74, 100
- lemme de Poincaré, 124, 128
- longueur d'arc, 8, 18, 56
- noeud, 32
- ombilic, 68, 69, 74, 99
- paramétrisation conforme, 57, 81
- partition de l'unité, 110, 138
- plan osculateur, 21, 22, 37, 38
- plan projectif, 141, 142
- plan tangent, 50–53, 96, 99
- plongement, 107, 117, 138, 155
- polyèdre convexe, 89, 90
- première forme fondamentale, 54–57, 66, 67, 96, 100
- produit extérieur, 122, 123

- quadrique, 44, 47, 95, 108, 156
- repère de Frenet, 18, 19, 24, 25, 37
- ruban de Möbius, 62, 97
  
- sous-variété, 111, 113, 125, 136, 156, 157
- structure différentiable, 134, 160, 161
- submersion, 106, 107, 117, 137, 141, 155
- surface à courbure constante, 75, 77, 78
- surface de Boy, 142
- surface de révolution, 48, 49, 77, 81, 95, 97, 99, 101
- surface de Riemann, 144, 147
- surface minimale, 79–82, 99, 100
- surface orientable, 59–61
- surface réglée, 49, 79, 82, 95
- surface tubulaire, 58, 97
- symboles de Christoffel, 70, 71, 73
  
- théorème d'inversion locale, 105, 111
- théorème de Gauss-Bonnet, 89, 94
- théorème de Jordan, 33, 170
- théorème de plongement de Whitney, 138, 152
- théorème des fonctions implicites, 105, 111
- théorème des quatre sommets, 39
- theorema egregium, 70, 72, 73
- tore complexe, 145
- torsion, 19, 20, 23, 24, 37, 38, 101
  
- variété complexe, 143
- variété topologique, 133