Analyse Fonctionnelle

Vincent GUEDJ

Résumé

Ce texte rassemble des notes de cours et des exercices portant sur la première moitié du module "Analyse fonctionnelle" qui intervient au premier semestre du Master de Mathématiques fondamentales de l'Université Paul Sabatier (Toulouse, France), pour la maquette 2011-2016.

On y étudie en détail un certains nombres d'espaces fonctionnel classiques, leurs différentes topologies, sous-espaces remarquables, ainsi que leurs applications linéaires. On y démontre et utilise les théorèmes de Riesz, Arzela-Ascoli, Weierstrass, Baire, Banach-Steinhaus, l'application ouverte, graphe fermé, ainsi que la propriété de Montel et ses conséquences.

La seconde partie (analyse hilbertienne) fera l'objet d'autres notes.

Introduction

Un des objectifs de ce module est de mélanger *Topologie* et *Algèbre linéaire* –deux disciplines que vous avez jusqu'à présent considérées séparément– en étudiant les propriétés topologiques fines de certains espaces vectoriels de *dimension infinie*.

Voici une liste non exhaustive de différences importantes avec ce que vous avez l'habitude d'utiliser en dimension finie :

– les normes ne sont pas toutes équivalentes ;
– les applications linéaires ne sont pas nécessairement continues ;
– les espaces vectoriels topologiques ne sont pas nécessairement complets ;
– les sous-espaces vectoriels ne sont pas nécessairement fermés ;
– les compacts ne sont pas nécessairement les fermés-bornés ;
– la continuité séquentielle n'implique pas nécessairement la continuité ;
– etc [1].

Les notes qui suivent concernent les six première semaines de ce module et constituent donc le menu de votre partiel. Elles sont réparties en trois chapitres de longueurs inégales. Le tempo approximatif est

– chapitre 1 : environ 3 semaines,
– chapitre 2 : environ 2 semaines,
– chapitre 3 : environ 1 semaine.

Comme vous le constaterez à l'aide des quelques indications historiques, il s'agit d'un sujet classique sur lequel il est difficile de faire preuve d'originalité. Nous indiquons dans les références quelques ouvrages dont nous nous sommes librement inspirés et qu'il est vivement recommandé de consulter pour approfondir votre compréhension.

Bonne lecture !

1. À vous de compléter cette liste au fil de votre lecture

Table des matières

Chapitre 1

Espaces fonctionnels classiques

Introduction

L'objectif principal de ce premier long chapitre est d'étudier beaucoup d'exemples d'espaces vectoriels topologiques que vous avez rencontrés dans des modules précédents :

- les espaces $L^p(\mu)$ des fonctions f mesurables telles que $|f|^p$ est intégrable par rapport à une mesure μ donnée , $1 \leq p \leq +\infty$;
- les espaces $\mathcal{C}^k$ de fonctions k-fois continûment différentiables, sur un compact ou un ouvert, en une ou plusieurs variables réelles ;
- les espaces Lip_α de fonctions Hölderiennes ($0 < \alpha < 1$) ou Lipschitziennes ($\alpha = 1$),

pour n'en citer que quelques-uns. Pour chacun, il s'agit de constuire dessus et comparer différentes topologies, d'étudier les propriétés de complétude, de caractériser (si possible) les sous-ensembles compacts, de décrire les formes linéaires continues.

Il y a peu de théorèmes dans ce chapitre, le plus important étant le théorème d'Arzela-Ascoli dont la preuve est relativement compliquée. Vous ne regretterez pas le temps que vous aurez investi dessus.

Le chapitre se termine avec un grand nombre d'exercices dont beaucoup sont censés être des rappels de Licence. Nous n'aurons pas le temps de tous les corriger, libre à vous de demander à corriger ceux qui vous ont posé le plus de problèmes.

1.1 Espaces vectoriels topologiques

1.1.1 Premières définitions

Définition 1.1 *Soit E un espace vectoriel sur un corps K ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)*[1] *muni d'une topologie $\mathcal{T}$. On dit que $(E, \mathcal{T})$ est un espace vectoriel topologique si les opérations*

$$(x, y) \in E \times E \mapsto x + y \in E$$

et

$$(\lambda, x) \in K \times E \mapsto \lambda \cdot x \in E$$

sont continues.

Lorsque $\mathcal{T}$ est associée à un produit scalaire, on parle d'*espace préhilbertien*. Lorsqu'elle est associée à une norme, on parle d'*espace vectoriel normé*.

On dit que deux normes N_1, N_2 sont équivalentes s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x, \;\; \frac{1}{C} N_2(x) \leq N_1(x) \leq C N_2(x).$$

Dans ce cas les topologies associées à N_1, N_2 sont les mêmes. Réciproquement, nous laissons le lecteur vérifier que si deux normes induisent la même topologie, alors elles sont équivalentes.

Exemple 1.2 *L'espace $E := \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$, à valeurs réelles, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie qui peut être muni de plusieurs normes non équivalentes. C'est par exemple le cas de la norme N_2 associée au produit scalaire*

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) dt$$

et de la norme $N_\infty(f) := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$, pourquoi ?

1.1.2 Topologie associée à une famille de semi-normes.

Rappelons qu'une semi-norme p sur un K-espace vectoriel E est une application $p : E \to \mathbb{R}^+$ telle que

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \qquad \text{et} \qquad p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$$

1. Dans ce chapitre on traitera exclusivement d'exemples sur $\mathbb{R}$, les exemples complexes seront abordés au Chapitre 3.

pour tout $(x, y, \lambda) \in E^2 \times K$. En particulier $p(0) = 0$ mais il manque la propriété $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ pour que p soit une norme.

Il arrive fréquemment que l'on dispose d'une famille "séparante" $\{p_\alpha, \alpha \in A\}$ de semi-normes, c'est à dire telle que

$$(p_\alpha(x) = 0, \ \ \forall \alpha \in A) \Rightarrow x = 0.$$

La famille $\{p_\alpha, \alpha \in A\}$ permet alors de définir une topologie *séparée*[2] (i.e. *Hausdorff*[3]) sur E en considérant

(i) d'abord les intersections finies d'ensembles $\{x \in E \,|\, p_\alpha(x) < \varepsilon\}$,

(ii) puis les unions quelconques d'ensembles obtenus en (i).

Autrement dit, un ouvert pour cette topologie est un ensemble du type

$$\bigcup_{s \in I, \alpha \in B, \varepsilon \in J} \bigcap_{i=1}^{s} \{x \in E \,|\, p_{\alpha_i}(x) < \varepsilon_i\},$$

où $I \subset \mathbb{N}, \alpha = (\alpha_1, \dots \alpha_s) \in B \subset A^s, \varepsilon = (\varepsilon_1, \dots \varepsilon_s) \in J \subset (\mathbb{R}_+^*)^s$.

Proposition 1.3 *On obtient ainsi une topologie Hausdorff.*

Une suite de points $(x_j) \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $x \in E$ pour cette topologie si et seulement si $p_\alpha(x_j - x) \to 0$ pour tout $\alpha \in E$.

Preuve. Nous laissons la démonstration au lecteur. Elle n'est pas passionnante, mais il faut que celui-ci l'ai faite au moins une fois pour se rendre compte que l'ordre des opérations (i),(ii) dans la construction de cette topologie est crucial ! □

Exemple 1.4 *Considérons à nouveau l'espace $E := \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$, à valeurs réelles. On le munit cette fois de la topologie associée à la famille séparante de semi-normes*

$$p_x(f) := |f(x)|, \ x \in A = [0,1].$$

On obtient ainsi la topologie associée à la notion de convergence simple que vous avez déja rencontrée. Vérifiez qu'elle est différente des topologies associées aux normes N_2, N_∞.

2. On dit qu'une topologie est séparée si deux points distincts admettent des voisinages ouverts disjoints.

3. Felix Hausdorff, 1868-1942, mathématicien allemand, l'un des fondateurs de la topologie moderne.

1.1.3 Famille dénombrable de semi-normes.

L'exemple de la convergence simple ci-dessus requière l'utilisation d'un très grand nombre (non-dénombrable) de semi-normes. Il arrive parfois qu'on dispose d'une famille séparante *dénombrable*[4] de semi-normes, quitte à réindexer, nous supposons que $A = \mathbb{N}$.

On peut dans ce cas vérifier que la topologie construite ci-dessus est *métrisable*, i.e. qu'il existe une distance d qui induit la même topologie. En voici une,

$$d(x,y) := \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-j} \frac{p_j(x-y)}{1+p_j(x-y)}.$$

Je vous encourage à vérifier cette assertion. Vous pouvez procéder ainsi

1. Vérifier que si p est une semi-norme, alors $\frac{p}{1+p}$ vérifie l'inégalité triangulaire (cf Exercice 14). En déduire que d vérifie l'inégalité triangulaire.
2. En utilisant le fait que la famille $\{p_j,\ j \in \mathbb{N}\}$ est séparante, vérifier que d est une distance sur E.
3. Assurer vous que la topologie associée à d est bien la topologie construite précédemment.

Faites attention pour ce dernier point : on vérifie facilement que ces deux topologies ont les mêmes suites convergentes, mais cela ne garantit pas –en général– qu'elles sont équivalentes (connaissez vous un tel exemple ?).

Exemple 1.5 *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $E := \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles continues sur I. On ne peut pas munir E de la norme sup $N_\infty(f) := \sup_I |f|$ car les fonctions de E ne sont pas nécessairement bornées (contrairement au cas vu précédemment d'un intervalle compact).*

On peut par contre fixer une suite K_j de compacts de I qui est exhaustive (i.e. dont la réunion est égale à I) et considérer la famille dénombrable de semi-normes

$$p_j(f) := \sup_{x \in K_j} |f(x)|.$$

Ces dernières sont bien définies (puisque l'on se restreint à des intervalles compacts) et forment une famille séparante.

Le choix de la famille de compacts K_j n'a aucune importance (vérifiez le !). Lorsque $I = \mathbb{R}$, on peut prendre par exemple

$$K_j := [-j, +j].$$

4. Dans tout ce cours dénombrable signifie infinie dénombrable : si on dispose d'une famille finie séparante de semi-normes, c'est qu'on a en fait une norme, pourquoi ?

1.1.4 Espaces $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$

Nous n'avons jusqu'à présent considéré uniquement des espaces de fonctions continues. On peut encore définir une norme sur l'espace $E_1 := \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions réelles continûment différentiables sur l'intervalle compact $[0,1]$.

Notez qu'une limite uniforme de fonctions différentiables n'a aucune raison d'être différentiable (fabriquez un exemple). Vous avez cependant démontré en Licence que si une suite de fonctions f_j continûment différentiables converge uniformément ainsi que sa suite de dérivées, alors sa limite f est continûment différentiable et f' est la limite des f'_j. Cela suggère que

$$N_1(f) := N_\infty(f) + N_\infty(f')$$

est une "bonne" norme sur $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$, tandis que N_∞ est une norme moins utile (voir Exercice 22). Le lecteur est invité à vérifier que N_1, N_∞ sont deux normes non-équivalentes sur E_1.

On peut de même, pour tout $k \in \mathbb{N}$, définir une (bonne) norme sur les espaces $E_k = \mathcal{C}^k([0,1], \mathbb{R})$ de fonctions k-fois continûment différentiables en posant

$$N_k(f) := \sum_{i=0}^{k} N_\infty(f^{(i)}).$$

On verra plus loin qu'on ne peut par contre pas trouver de "bonne" norme sur l'espace $\mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions infiniment différentiables (pouvez vous en indiquer une "mauvaise" ?). Une topologie naturelle est celle associée à la famille dénombrable séparante de semi-normes

$$p_k(f) := \sup_{x \in [0,1]} |f^{(k)}(x)|, \ k \in \mathbb{N}.$$

Tout ce qui vient d'être dit s'applique encore lorsque l'intervalle $[0,1]$ est remplaçé par n'importe quel intervalle compact de $\mathbb{R}$. Pour un intervalle ouvert, il faut partout remplacer les normes par une famille dénombrables de semi-normes associées à une suite exhaustive de compacts.

On peut également considérer les espaces $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R})$ où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble ouvert ou compact de $\mathbb{R}^n$, et les munir de topologies similaires en prenant soin de bien prendre en compte toutes les dérivées partielles.

1.2 Applications linéaires continues

Soit $f : (E, \mathcal{T}_E) \to (F, \mathcal{T}_F)$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels topologiques. Une telle application est continue si et seulement si elle est continue en 0_E (par linéarité).

Lorsque E est de dimension finie, une telle application est toujours continue (pourquoi ?), mais ce n'est plus nécessairement le cas en dimension infinie. Nous allons produire au fil de ce cours un certains nombres de critères qui vont nous permettre d'établir (ou non) la continuité de telles applications.

1.2.1 Cas des espaces vectoriels normés

Proposition 1.6 *Soit $f : (E, N_E) \to (F, N_F)$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés. Elle est continue si et seulement si elle est Lipschitzienne, i.e. s'il existe $C > 0$ telle que*

$$\forall x \in E,\ N_F(f(x)) \leq N_E(x).$$

Preuve. La preuve est simple, vous l'avez sûrement déja rencontrée et vous devez la maîtriser parfaitement. Une implication est évidente : si f est Lipschitzienne, alors elle est continue en 0_E et donc partout, par linéarité.

Supposons à présent que f est continue. Si f n'est pas Lipschitzienne, c'est qu'il existe une suite de vecteurs $x_j \in E$ tels que

$$\forall j \in \mathbb{N},\ N_F(f(x_j)) > jN_E(x_j).$$

Notons que les x_j ne sont pas nuls car $f(0_E) = 0_F$, on peut donc considérer

$$y_j := \frac{x_j}{jN_E(x_j)}.$$

C'est une suite de vecteurs qui convergent vers 0_E et vérifient

$$N_F(f(y_j)) > 1,$$

ce qui contredit la continuité de f. □

Remarque 1.7 *N'est-il pas surprenant qu'une application linéaire continue soit automatiquement Lipschitzienne ? Pouvez vous donner un exemple d'une fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ qui est continue sans être Lipschitzienne ?*

Définition 1.8 *On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de (E, N_E) dans (F, N_F), et pour $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ on désigne par*

$$||f|| := \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{N_F(f(x))}{N_E(x)}$$

la norme d'opérateur de f, i.e. sa meilleure constante de Lipschitz.

Nous incitons vivement le lecteur à faire l'Exercice 8 : il s'agit de manipulations simples qui utilisent l'homogénéité de la norme et posent régulièrement des difficultés le jour de l'examen...

L'espace $\mathcal{L}_c(E,F)$ a une structure d'espace vectoriel sur K. Lorsque $F = E$, on note $\mathcal{L}_c(E) = \mathcal{L}_c(E,E)$ l'ensemble des endomorphismes continus de E. On peut composer deux tels endomorphismes, cela confère à $\mathcal{L}_c(E)$ une structure d'algèbre (unifère sur K). La norme d'opérateurs est une norme d'algèbre, i.e.

$$||u \circ v|| \leq ||u|| \cdot ||v||, \ \ \forall u, v \in \mathcal{L}_c(E).$$

Nous encourageons le lecteur à vérifier cela et à en déduire que l'application de composition

$$(u,v) \in \mathcal{L}_c(E) \times \mathcal{L}_c(E) \mapsto u \circ v \in \mathcal{L}_c(E)$$

est ainsi une application bilinéaire continue, lorsque l'on munit $\mathcal{L}_c(E) \times \mathcal{L}_c(E)$ d'une norme produit.

Exemple 1.9 *Une situation perturbante au premier abord est le cas de l'application f identité lorsque $E = F$ est muni de deux normes différentes N_1, N_2,*

$$f : x \in (E, N_1) \mapsto x \in (E, N_2).$$

Cette application est clairement linéaire (et même bijective) ! Elle est cependant continue uniquement lorsque la norme N_1 domine la norme N_2, i.e. lorsqu'il existe $C > 0$ telle que

$$\forall x \in E, \ N_2(x) = N_2(f(x)) \leq C N_1(x).$$

La bijection réciproque f^{-1} est elle continue lorsque la norme N_2 domine la norme N_1. L'application f est donc un homéomorphisme précisément lorsque ces deux normes sont équivalentes.

Exemple 1.10 *Il s'avère que "la plupart" des applications linéaires ne sont pas continues en dimension infinie et pourtant, il est bien délicat d'en donner un exemple convaincant ! En voici un qui concerne l'opération de dérivation.*

On considère $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de $E := \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ constitué des fonctions polynômiales et

$$D : f \in (\mathcal{P}, N_\infty) \mapsto f' \in (\mathcal{P}, N_\infty).$$

C'est un endomorphisme (i.e. une application linéaire de $\mathcal{P}$ dans lui même) qui n'est pas continu. En effet, si $f_j : x \mapsto j^{-1}x^j \in \mathcal{P}$, alors

$$N_\infty(D(f_j)) = 1 \ \textit{tandis que} \ N_\infty(f_j) \stackrel{j \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

1.2.2 Formes linéaires, dual topologique

Etant donné E un espace vectoriel topologique, on note E' son *dual topologique*, i.e. l'ensemble des formes linéaires continues $\varphi : E \to \mathbb{R}$ (muni de la topologie usuelle). C'est à travers E' que l'on observe (et donc comprend) l'espace E, il est donc très important de savoir décrire les formes linéaires continues.

Dans le cas d'un espace préhilbertien (i.e. quand la topologie provient d'un produit scalaire), le théorème de représentation de Riesz (que vous avez vu en Licence [5]) donne une description complète et satisfaisante : toute forme linéaire continue est obtenue via le produit scalaire avec un élément de E.

Dans le cas d'un espace vectoriel normé de dimension infinie, il est beaucoup plus délicat de comprendre E'. Pour ce faire on est amené à étudier le bidual (topologique) $E'' := (E')'$. Observons qu'il y a une injection canonique

$$J : x \in E \mapsto \delta_x \in E'',$$

où l'application

$$\delta_x : \varphi \in E' \mapsto \varphi(x) \in \mathbb{R}.$$

est appelée évaluation (ou masse de Dirac) en x. Elle est bien linéaire et continue puisque

$$|\delta_x(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq ||\varphi|| N_E(x).$$

Cette inégalité assure que J est continue, injective, et même que

$$||J(x)|| = ||\delta_x|| = N_E(x),$$

i.e. J est une isométrie.

Définition 1.11 *On dit que (E, N_E) est réflexif lorsque $J(E) = E''$, i.e. lorsque J réalise une isométrie entre E et son bidual E''.*

Il résulte du théorème de représentation de Riesz que les espaces préhilbertiens sont réflexifs. C'est également le cas des espaces L^p lorsque $1 < p < +\infty$. Notez cependant que ni L^1, ni L^∞ ne sont réflexifs : cela rend l'analyse plus délicate dans ces espaces.

Proposition 1.12 *Soit $p \in [1, +\infty[$. On note*

$$\ell^p(\mathbb{R}) := \left\{ x = (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n \geq 0} |x_n|^p < +\infty \right\},$$

5. Révisez sa démonstration !

muni de la norme $N_p(x) := \left(\sum_{n\geq 0} |x_n|^p\right)^{1/p}$.

Le dual topologique de $\ell^p(\mathbb{R})$ *est* $\ell^q(\mathbb{R})$*, où* $1/p + 1/q = 1$ *(*$q = +\infty$ *pour* $p = 1$*). En particulier* $\ell^p(\mathbb{R})$ *est réflexif pour* $1 < p < +\infty$.

Preuve. Soit $y \in \ell^q(\mathbb{R})$. On considère

$$A_y : x \in \ell^p(\mathbb{R}) \mapsto A_y(x) := \sum_{n\geq 0} y_n x_n \in \mathbb{R}.$$

C'est une forme linéaire bien définie (inégalité de Hölder) qui est continue,

$$|A_y(x)| \leq N_q(y) N_p(x),$$

d'où $||A_y|| \leq N_q(y)$. Nous laissons le lecteur vérifier qu'il y a en fait égalité,

$$||A_y|| = N_q(y), \ \forall y \in \ell^q(\mathbb{R}).$$

Nous avons ainsi défini une application clairement linéaire

$$A : y \in \ell^q(\mathbb{R}) \mapsto A_y \in (\ell^p(\mathbb{R}))'$$

qui est une isométrie (en particulier injective).

Nous affirmons qu'elle est également surjective. Fixons en effet $\varphi \in (\ell^p(\mathbb{R}))'$ et posons

$$y_j := \varphi(e^{(j)}),$$

où $e^{(j)}$ désigne la suite de Kronecker (toutes les coordonnées nulles sauf la j^{eme}). Notons $x^{(N)}$ la suite telle que

$$x_j^{(N)} = |y_j|^{q-1} \text{ pour } 0 \leq j \leq N \text{ et } x_j^{(N)} = 0 \text{ si } j > N.$$

Comme φ est continue, on a

$$\sum_{n=0}^{N} |y_n|^q = \varphi(x^{(N)}) \leq ||\varphi|| N_p\left(x^{(N)}\right) = ||\varphi|| \left(\sum_{n=0}^{N} |y_n|^q\right)^{1/p},$$

on en déduit que $y \in \ell^q(\mathbb{R})$ avec $N_q(y) \leq |\varphi||$. Comme tout $x \in \ell^p(\mathbb{R})$ est limite de combinaisons finies des $e^{(j)}$, il résulte de la continuité de φ que $\varphi \equiv A_y$. $\square$

1.2.3 Cas des semi-normes

Comme nous l'avons rappelé plus haut, il est facile de caractériser la continuité d'une application linéaire entre espaces vectoriels normés. Il est plus délicat d'obtenir une telle caractérisation dans le cas d'un espace vectoriel dont la topologie provient d'une famille de semi-normes.

Proposition 1.13 *Soit $f : (E,p) \to (F,q)$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels topologiques E, F dont les topologies proviennent de familles séparantes dénombrables de semi-normes $p = \{p_j,\, j \in \mathbb{N}\}$ et $q = \{q_k,\, k \in \mathbb{N}\}$. Alors f est continue si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $J_k \in \mathbb{N}$ et $C_k > 0$ tels que*

$$\forall x \in E, \;\; q_k(f(x)) \leq C_k \max_{0 \leq j \leq J_k} p_j(x).$$

Preuve. Une implication est immédiate : si x_n converge vers 0_E, i.e. $p_j(x_n) \to 0$ pour tout j fixé, les inégalités ci-dessus montrent que $q_k(f(x_n))$ converge vers zéro pour tout k fixé, i.e. $f(x_n)$ converge vers 0_F, donc f est continue.

Supposons réciproquement que f est continue et fixons $k \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\{y \in F \,|\, q_k(y) < 1\}$ est un voisinage ouvert de 0_F, son image réciproque

$$f^{-1}\{y \in F \,|\, q_k(y) < 1\} = \{x \in E \,|\, q_k(f(x)) < 1\}$$

par f est un voisinage ouvert de 0_E qui contient donc une "brique élémentaire", intersection finie d'ouverts $\{x \in E \,|\, p_{i_j}(x) < r_j\}$, $1 \leq j \leq s$. Posons $r = \min_{1 \leq j \leq s} r_j$ et $J = \max_{1 \leq i \leq s} i_j$, de sorte que

$$\bigcap_{j=0}^{J} \{x \in E \,|\, p_j(x) < r\} \subset \{x \in E \,|\, q_k(f(x)) < 1\}.$$

La conclusion s'ensuit, par linéarité, en prenant $C = 1/r$. □

Le cas des formes linéaires est un peu plus simple à exprimer :

Corollaire 1.14 *Soit (E,p) un espace vectoriel topologique dont la topologie provient d'une famille séparante dénombrable de semi-normes. Une forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ est continue si et seulement si il existe $J \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels qe*

$$\forall x \in E, \;\; |\varphi(x)| \leq C \max_{0 \leq j \leq J} p_j(x).$$

1.3 Espaces complets

1.3.1 Suites de Cauchy

Définition 1.15 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique. Une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy*[6] *si pour tout $V \in \mathcal{T}$ contenant 0_E, il existe $N_V \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_V, p \geq 0 \Longrightarrow x_{n+p} - x_n \in V$.*

Lorsque la topologie $\mathcal{T}$ est associée à une distance d invariante –telle que $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ pour tout $x, y, z \in E$–, cette notion coincide avec celle de suite de Cauchy pour l'espace métrique (E, d).

On dit que $(E, \mathcal{T})$ est complet si toutes les suites de Cauchy convergent.

Il est naturel –et nous le ferons implicitement dans tout ce cours– de se restreindre à considérer uniquement des distances invariantes, lorsque c'est possible ! Rappelons que deux telles distances d_1, d_2 qui induisent la même topologie ont les mêmes suites de Cauchy (en particulier l'une est complète si et seulement si l'autre l'est), même s'il se peut que ces distances ne soient pas équivalentes :

Exemple 1.16 *Soit (E, d) un espace vectoriel topologique, dont la topologie est associée à une distance d invariante. Vérifiez que $\delta := d/(1+d)$ est une distance invariante qui induit la même topologie que d, mais que ces distances ne sont pas équivalentes si d n'est pas bornée.*

Exemple 1.17 *On considère $E = \mathbb{R}$ muni des distances $d(x,y) = |x-y|$ et*

$$D(x,y) := |\phi(x) - \phi(y)| \text{ où } \phi(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

Vérifiez que d, D induisent la même topologie et pourtant, $(\mathbb{R}, d)$ est complet tandis que $(\mathbb{R}, D)$ ne l'est pas. Que se passe-t'il ?

Il est fondamental, étant donné un espace vectoriel topologique E, de savoir définir dessus une topologie la plus "naturelle" possible qui le rende complet.

Définition 1.18 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique complet. On dit que c'est un espace*

- *de Hilbert*[7] *si $\mathcal{T}$ provient d'un produit scalaire ;*
- *de Banach*[8] *si $\mathcal{T}$ provient d'une norme ;*

6. Augustin Louis Cauchy, 1789-1857, grand mathématicien français.
7. David Hilbert, 1862-1943, l'un des plus grands mathématiciens allemands.
8. Stefan Banach, 1892-1945, polonais, un des fondateurs de l'Analyse fonctionnelle.

– *de Fréchet*[9] *si $\mathcal{T}$ provient d'une famille dénombrable de semi-normes.*

Ce sont les trois notions les plus souvent utilisées, elles couvrent quasiment tous les exemples que vous avez rencontrés jusqu'ici.

1.3.2 Exemples

Nous donnons dans cette section la preuve que certains espaces sont complets lorsqu'on les munit d'une topologie "naturelle". Il faut absolument que vous sachiez faire ce type de démonstrations. Vous trouverez dans la rubrique "Exercices" de nombreux exemples pour vous entraîner.

Voici pour commencer un exemple d'espace de Hilbert. C'est en principe le cas le plus simple d'espace vectoriel topologique. Si la preuve vous semble compliquée, c'est sans doute dû à votre manque de pratique de la théorie de Lebesgue...

Exemple 1.19 *Soit $E = L^2(I, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles de carré intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On note*

$$\langle f, g \rangle := \int_I f(t)g(t)dt$$

le produit scalaire associé. Alors $(E, \langle\,,\,\rangle)$ est un Hilbert.

Soit en effet $(f_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy, i.e. pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$ et pour tout $p \geq 0$,

$$||f_{n+p} - f_n||^2 = \int_I |f_{n+p}(t) - f_n(t)|^2 dt \leq \varepsilon^2.$$

En choisissant $\varepsilon = 2^0$, puis $\varepsilon = 2^{-1}$ puis par récurrence $\varepsilon = 2^{-n}$, on peut extraire une sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ ||f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}|| \leq 2^{-n}.$$

Considérons alors

$$g : t \in I \mapsto g(t) := \sum_{n\geq 0} \left|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\right|(t).$$

C'est une série à termes positifs, donc $g(t)$ est bien défini dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Le théorème de la convergence monotone assure que

$$||g|| \leq \sum_{n\geq 0} ||f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}|| \leq \sum_{n\geq 0} 2^{-n} < +\infty$$

9. Maurice Fréchet, 1878-1973, mathématicien français.

donc $g(t)$ est fini presque partout et $g \in E$.

Comme $\mathbb{R}$ est complet, on en déduit que la série de terme général $f_{\varphi(n+1)}(t) - f_{\varphi(n)}(t)$ est convergente presque partout, la suite $(f_{\varphi(n)}(t))$ converge donc presque partout. Notons f sa limite. Alors $f \in E$ avec

$$||f|| \leq ||g|| + ||f_{\varphi(0)}||.$$

De plus

$$\left|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\right|(t) \leq g(t) \text{ et } f_{\varphi(n)}(t) \overset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(t)$$

presque partout. Le théorème de la convergence dominée garantit alors que

$$||f_{\varphi(n+p)} - f_{\varphi(n)}|| \overset{p \to +\infty}{\longrightarrow} ||f - f_{\varphi(n)}|| \leq 2^{-n+1}$$

On en déduit que $f_{\varphi(n)}$ converge vers f dans E.

Nous avons ainsi montré que la suite (f_n) admet une valeur d'adhérence f, comme c'est une suite de Cauchy, elle converge vers f.

Remarque 1.20 *Nous avons muni l'espace $E = L^2([0,1],\mathbb{R})$ de sa topologie naturelle. Comme $L^2([0,1],\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $L^1([0,1],\mathbb{R})$, nous aurions pu également le munir de la topologie d'espace vectoriel normé associée à la norme*

$$N_1(f) := \int_0^1 |f(t)|\, dt.$$

Vérifiez que (E, N_1) n'est pas complet. Quel est son complété ?

Exemple 1.21 *Soit (K,d) un espace métrique compact et (F,N) un espace de Banach. On considère $E = \mathcal{C}^0(K,F)$ l'espace des applications continues sur K à valeurs dans F, muni de la norme*

$$N_\infty(f) := \sup_{x \in K} N(f(x)).$$

Alors (E, N_∞) est un espace de Banach.

Nous laissons le lecteur se convaincre que (E, N_∞) est un espace vectoriel normé et démontrons le caractère complet. Soit $(f_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall p \geq 0,\ \sup_{x \in K} N(f_{n+p}(x) - f_n(x)) \leq \varepsilon. \tag{1.1}$$

Pour tout $x \in K$, on vérifie en particulier que la suite $(f_n(x))_n \in F^{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Comme F est complet, celle-ci converge ; on note $f(x)$ sa limite.

Vérifions que f est continue. On utilise pour cela la quantification (1.1) : $\varepsilon > 0$, $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $n \geq N_\varepsilon$ étant fixés, on sait que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in K, \quad N(f_{n+p}(x) - f_n(x)) \leq \varepsilon.$$

On peut donc fixer $x \in K$ et faire tendre p vers $+\infty$ pour obtenir

$$\forall x \in K, \quad N(f(x) - f_n(x)) \leq \varepsilon, \ \textit{soit}\ N_\infty(f - f_n) \leq \varepsilon. \tag{1.2}$$

On décompose à présent

$$\begin{aligned} N(f(x) - f(y)) &\leq N(f(x) - f_n(x)) + N(f_n(x) - f_n(y)) + N(f_n(y) - f(y)) \\ &\leq 2N_\infty(f - f_n) + N(f_n(x) - f_n(y)). \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon > 0$ donné, on fixe n suffisamment grand pour que $N_\infty(f - f_n)$ soit plus petit que ε (grâce à (1.2)), puis on utilise la continuité uniforme de f_n sur (K, d) pour trouver $\alpha > 0$ tel que

$$d(x, y) < \alpha \Longrightarrow N(f(x) - f(y)) < 3\varepsilon$$

ce qui montre que f est continue.

La quantification (1.2) montre enfin également que la suite (f_n) converge vers f dans (E, N_∞), ce qui clôt la démonstration.

Remarque 1.22 *La démonstration précédente est un exemple typique de ce genre de raisonnement. On peut souvent décomposer le problème en trois étapes, il faut*

(i) fabriquer la limite (dans un espace un peu plus grand) ;

(ii) s'assurer que cette limite appartient bien à E ;

(iii) vérifier enfin qu'il y a bien convergence vers cette limite.

Dans l'exemple précédent, on commence par construire la "limite simple" de la suite (f_n), cela résulte de la quantification et de la complétude de F. Il faut ensuite s'assurer que la limite est bien continue sur K, c'est une propriété que vous avez déja rencontrée : une limite uniforme de fonctions continues est continue.

Attention : il est tentant de vouloir courcircuiter l'étape 2, on est alors amené à parler d'un objet (la limite "faible") qui n'est pas nécessairement bien définie.

Voici enfin l'un des plus simples exemples d'espace de Fréchet.

Exemple 1.23 *Soit* $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *muni de la famille* p *de semi-normes* $p_j(f) := \sup_{[-j,+j]} |f|$ *et de la distance*

$$d(f,g) := \sum_{j \geq 0} 2^{-j} \frac{p_j(f-g)}{1 + p_j(f-g)}.$$

L'espace (E, p) *est un espace de Fréchet.*

Soit en effet $(f_n) \in E^{\mathbb{N}}$ *une suite de Cauchy. On note* $E_j := \mathcal{C}^0([-j,+j], \mathbb{R})$ *muni de la topologie associée à la norme* $p_j(f) = \sup_{[-j,+j]} |f|$ [10] *. Nous laissons le lecteur vérifier que la suite* (f_n) *induit une suite de Cauchy dans* E_j *(par restriction). Or cet espace est complet (voir Exercice 19), elle converge donc uniformément sur l'intervalle* $[-j,+j]$ *vers une fonction* $g_j \in \mathcal{C}^0([-j,+j], \mathbb{R})$*. Par unicité de la limite, les fonctions* g_j *se recollent de sorte que*

$$g_{j+1} \equiv g_j \text{ sur l'intervalle } [-j,+j],$$

et permettent de définir une fonction $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *qui est donnée par* g_j *sur l'intervalle* $[-j,+j]$*.*

Il reste à vérifier que la suite (f_n) *converge bien (au sens de la distance* d*) vers la fonction* g*. Or par construction* $p_j(f_n - g) \to 0$ *pour tout* j*, donc* $d(f_n, g) \to 0$ *par convergence dominée*[11]*.*

1.3.3 Espaces quotients

Soit (E, N) un espace vectoriel normé et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. On note E/F l'espace quotient, ensemble des classes d'équivalence pour la relation

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in F.$$

C'est un espace vectoriel lorsqu'il est muni des lois

$$\overline{x} + \overline{y} := \overline{x+y} \text{ et } \lambda \cdot \overline{x} = \overline{\lambda \cdot x}.$$

Nous laissons le lecteur vérifier que celles-ci sont bien définies. On pose

$$\overline{N} : \overline{x} \in E/F \mapsto \inf\{N(y) \,|\, y \in \overline{x}\} \in \mathbb{R}^+.$$

Proposition 1.24

1) $\overline{N}$ *est une semi-norme sur* E/F*. C'est une norme ssi* F *est fermé.*

2) Si F *est fermé et* E *est un Banach, alors* $(E/F, \overline{N})$ *est un Banach.*

10. Celle-ci est une semi-norme sur E, mais c'est bien une norme sur E_j, pourquoi ?

11. Pouvez vous expliciter ce dernier argument ?

Preuve. Nous laissons le lecteur vérifier que $\overline{N}$ définit bien une semi-norme, i.e. est une application homogène de E/F vers $\mathbb{R}^+$ qui vérifie l'inégalité triangulaire. Le point délicat est de comprendre quand est-ce que $\overline{N}$ s'annule.

Si $\overline{N}(\overline{x}) = 0$, il existe une suite $(y_j) \in E^{\mathbb{N}}$ de représentants de la classe $\overline{x}$ tels que $N(y_j) \to 0$. On peut les décomposer $y_j = x - f_j$ avec $f_j \in F$ et $N(y_j) \to 0$ signifie que $x = \lim f_j$. Si F est fermé, on en déduit que $x \in F$, donc $\overline{x} = \overline{0}$, ce qui montre que $\overline{N}$ est une norme. Réciproquement si F n'est pas fermé, on peut trouver $x = \lim f_j \notin F$ avec $f_j \in F$, ainsi $\overline{N}(\overline{x}) = 0$ tandis que $\overline{x} \neq 0$, donc $\overline{N}$ est une norme si et seulement si F est fermé.

On suppose à présent que F est fermé et E est un Banach. Soit $(\overline{x}_j)$ une suite de Cauchy dans $(E/F, \overline{N})$. On peut extraire une sous-suite $(\overline{x}_{\varphi(j)})$ de sorte que

$$\forall j \in \mathbb{N}, \;\; \overline{N}(\overline{x}_{\varphi(j+1)} - \overline{x}_{\varphi(j)}) < 2^{-j}.$$

Par définition de $\overline{N}$, on peut fixer $y_j \in \overline{x}_{\varphi(j)}$ tels que $N(y_{j+1} - y_j) < 2^{-j}$. La série de terme général $(y_{j+1} - y_j)$ est donc absolument convergente. Comme E est un Banach, il résulte de l'Exercice 27 que la suite (y_j) converge dans E. Notons y sa limite, il vient

$$\overline{N}(\overline{y} - \overline{x}_{\varphi(j)}) \leq N(y - x_{\varphi(j)}) \to 0.$$

La classe de y est donc une valeur d'adhérence de la suite $(\overline{x}_j)$, comme celle-ci est de Cauchy, c'est donc qu'elle converge vers $\overline{y}$. $\square$

Pour vous entraîner, vérifiez que le quotient d'un espace de Fréchet par un sous-espace vecoriel fermé est également un espace de Fréchet.

1.4 Compacité

1.4.1 Ensembles bornés

Définition 1.25 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique. Un ensemble $A \subset E$ est dit borné si pour tout voisinage V de O_E, il existe $R > 0$ tel que $A \subset R \cdot V$.*

Remarque 1.26 *Lorsque $\mathcal{T}$ est associée à une norme, un ensemble A est borné si et seulement s'il existe $R > 0$ tel que A est inclus dans la boule $B(R)$ centrée en 0_E de rayon R.*

Faites bien attention : lorsque $\mathcal{T}$ est associée à une métrique (invariante), la distance peut être bornée (penser à $d/(1+d)$) de sorte que l'espace E tout entier est inclus dans une grande boule. Être inclus dans une boule n'est donc pas suffisant dans ce cas pour être borné !

Voici quelques propriétés élémentaires dont nous laissons la preuve au lecteur pour qu'il s'entraîne.

Proposition 1.27 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique.*
- *Les compacts sont (fermés et) bornés.*
- *L'ensemble des valeurs prises par une suite de Cauchy est borné.*
- *L'adhérence d'un ensemble borné est borné.*
- *Un sous-espace vectoriel non nul n'est jamais borné.*

Lemme 1.28 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique associé à une famille séparante $\{p_i, i \in I\}$ de semi-normes. Montrer qu'un ensemble $A \subset E$ est borné si et seulement si pour tout $i \in I$, il existe $M_i > 0$ tel que*

$$\forall x \in A,\ p_i(x) \leq M_i.$$

Preuve. Supposons A borné. Comme $V_i := \{x \in E \,|\, p_i(x) < 1\}$ est un voisinage de 0_E, il existe $M_i > 0$ tel que $A \subset M_i \cdot V_i$. L'homogénéité de la semi-norme p_i assure que

$$M_i \cdot V_i = \{x \in E \,|\, p_i(x) < M_i\}$$

donc $p_i(x) \leq M_i$ pour tout $x \in A$.

Supposons réciproquement que $p_i(x) \leq M_i$ pour tout $x \in A$ et pour tout $i \in I$. Rappelons que la topologie $\mathcal{T}$ est engendrée par les "briques élémentaires" du type

$$W := \bigcap_{i=1}^{s} \{x \in E \,|\, p_{j_i}(x) < \varepsilon_i\}.$$

Tout ouvert V voisinage de 0_E contient ainsi une telle brique W pour un choix convenable de $s, p_{j_1}, \ldots, p_{j_s}, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s$. Il suffit donc de montrer qu'il existe $R_W > 0$ tel que $A \subset R_W \cdot W$. Nous laissons le lecteur se convaincre que

$$R_W := \max \left\{ \frac{M_{j_i}}{\varepsilon_i} \,|\, 1 \leq i \leq s \right\}$$

est un choix qui convient. □

Propriété de Borel-Heine. En dimension finie les compacts sont les fermés-bornés, ce n'est plus nécessairement le cas en dimension infinie. Lorsqu'un espace vectoriel topologique a cette propriété, on dit qu'il a la propriété de Borel[12]-Heine[13]. Nous allons voir dans la suite de ce cours que

12. Emile Borel, 1871-1956, mathématicien français né à Saint-Afrique.
13. Edouard Heine, 1821-1881, mathématicien allemand.

– un espace vectoriel normé de dimension infinie n'a jamais cette propriété (théorème de Riesz) ;
– l'espace $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ a cette propriété (conséquence du théorème d'Ascoli)
– l'espace $\mathcal{O}(\Omega)$ des fonctions holomorphes a également cette propriété (conséquence de la propriété de Montel).

1.4.2 Un théorème de Riesz

Vous avez déja rencontré le théorème de représentation de Riesz qui décrit les formes linéaires d'un espace préhilbertien. Voici un autre résultat remarquable de ce même mathématicien [14].

Théorème 1.29 *Soit (E, N) un espace vectoriel normé. La boule unité fermée est compacte si et seulement si E est de dimension finie.*

Preuve. Lorsque E est de dimension finie, la boule unité fermée est compacte (c'est la propriété de Borel-Heine que vous avez établie en Licence). Il s'agit de montrer la réciproque.

Nous commençons par donner une preuve "géométrique" dans le cas où la norme provient d'un produit scalaire $\langle\,,\,\rangle$. Si E est de dimension infinie, on peut alors considérer une famille dénombrable orthonormée $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$. C'est une suite d'éléments de la boule unité fermée $\overline{\mathbb{B}}$ et nous affirmons qu'elle n'admet aucune sous-suite convergente : sinon $e_{\varphi(j)} \to a$, en particulier $||e_{\varphi(j+1)} - e_{\varphi(j)}|| \to 0$, ce qui aboutit à une contradiction car

$$||e_{\varphi(j+1)} - e_{\varphi(j)}||^2 = ||e_{\varphi(j+1)}||^2 - 2\langle e_{\varphi(j+1)}, e_{\varphi(j)}\rangle + ||e_{\varphi(j)}||^2 = 2.$$

La boule $\overline{\mathbb{B}}$ ne peut donc pas être compacte.

Traitons à présent le cas d'un espace vectoriel normé général. Supposons que la boule unité fermée $\overline{\mathbb{B}}$ est compacte. On peut alors la recouvrir par un nombre fini de boules ouvertes $B(x_i, 1/2)$ de rayon $1/2$, avec $x_i \in \overline{\mathbb{B}}$, $1 \leq i \leq s$. On pose

$$F := Vect\{x_i,\ 1 \leq i \leq s\}$$

et on va montrer que $E = F$ est de dimension finie $\leq s$. Observons que

$$B\left(x_i, 1/2\right) = x_i + \frac{1}{2}\mathbb{B} \text{ donc } \mathbb{B} \subset F + \frac{1}{2}\mathbb{B}.$$

Il s'ensuit que $\frac{1}{2}\mathbb{B} \subset \frac{1}{2}F + \frac{1}{4}\mathbb{B}$ donc

$$\mathbb{B} \subset \left(F + \frac{1}{2}F\right) + \frac{1}{4}B.$$

14. Frigyes Riesz, 1880-1956, mathématicien hongrois.

Comme F est un sous-espace vectoriel, $F + \frac{1}{2}F = F$, donc

$$\mathbb{B} \subset F + \frac{1}{4}\mathbb{B}.$$

En itérant ce procédé, on obtient

$$\mathbb{B} \subset F + \frac{1}{2^n}\mathbb{B}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On en déduit que $\mathbb{B} \subset \overline{F} = F$ car F est fermé (pourquoi ?).

Enfin $E = \mathbb{R} \cdot \mathbb{B} \subset \mathbb{R} \cdot F = F$, d'où le résultat annoncé. □

Remarque 1.30 *L'experience montre que les étudiants ont beaucoup de mal a assimilé cette preuve élégante, mais très formelle. Vous pouvez, pour la retravailler, essayer de l'adapter au cas d'un espace de Fréchet avant d'aller faire l'Exercice 32 : que constatez vous ? Il est plus simple de comprendre le cas des espaces de Hilbert, vous devez parfaitement comprendre l'argument correspondant.*

1.4.3 Théorème d'Arzela-Ascoli

Soit (E, N_∞) l'espace de Banach des applications continues d'un espace métrique compact à valeurs dans un espace de Banach (cf Exemple 1.21). Le théorème de Riesz montre qu'il ne suffit pas qu'un ensemble $A \subset E$ soit fermé et borné pour être compact : le théorème d'Arzela [15]-Ascoli [16] que nous allons démontrer ici assure qu'il convient d'ajouter la propriété *d'équicontinuité.* Dans toute cette section on se donne

- (K, d) un espace métrique compact ;
- (F, δ) un espace métrique complet ;
- $E := \mathcal{C}^0(K, F)$ muni de $D(f, g) := \sup_{x \in K} \delta(f(x), g(x))$.

Une généralisation immédiate de l'Exemple 1.21 montre que l'espace métrique (E, D) est complet (voir Exercice 21).

Définition 1.31 *Une famille $A \subset E$ est dite (uniformément) équicontinue lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\forall f \in A, \forall x, y \in K, \ d(x, y) < \alpha \Longrightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

15. Cesare Arzela, 1847-1912, mathématicien italien.
16. Giulio Ascoli, 1843-1896, mathématicien italien.

Une famille A est équicontinue lorsque l'on a un contrôle uniforme des modules de continuité des éléments de A. En voici un exemple typique :

Exemple 1.32 *On suppose ici que $K = [0,1], F = \mathbb{R}$, $d = \delta = |\cdot|$ et*

$$A = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}) \,|\, \forall x \in [0,1],\ |f'(x)| \leq 7\}.$$

Alors A est équicontinue. En effet pour tout $x, y \in [0,1]$ et $f \in A$,

$$|f(x) - f(y)| \leq 7|x - y|$$

par l'inégalité des accroissements finis. Etant donné $\varepsilon > 0$, on peut donc fixer $\alpha = \varepsilon/7$ de sorte que pour $x, y \in [0,1]$, $f \in A$, on a

$$|x - y| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Théorème 1.33 (Arzela-Ascoli) *Sous les hypothèse précédentes, une partie $A \subset E$ est relativement compacte si et seulement si*
(i) A est est équicontinue ;
(ii) $\forall x \in K$, $A_x := \{f(x) \,|\, f \in A\}$ est relativement compact dans F.

Rappelons qu'une partie A est dite relativement compacte si elle est d'adhérence compacte. Voici un cas particulier de ce théorème qui en est une des formes les plus utiles :

Corollaire 1.34 *Soit (K, d) un espace métrique compact. Une partie $A \subset \mathcal{C}^0(K, \mathbb{R}^n)$ est compacte si et seulement si elle est fermée, bornée et équicontinue.*

Preuve. Observons que les ensembles relativements compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les ensembles bornés (propriété de Borel-Heine), les ensembles

$$A_x := \{f(x),\ f \in A\} \subset F = \mathbb{R}^n$$

sont donc relativement compacts si et seulement si ils sont bornés.

Or A est borné s'il est compact et, réciproquement, A borné signifie qu'il existe $M > 0$ tel que $N_\infty(f) \leq M$ pour tout $f \in A$, donc A_x est inclus dans la boule (centrée à l'origine) de rayon M, quelque soit $x \in K$.

Les conditions du corollaire, en apparence plus fortes, sont donc bien équivalentes à celles du théorème. $\square$

Démonstration du théorème d'Ascoli. Nous commençons par l'implication la plus facile : supposons que A est relativement compacte et montrons que les conditions (i),(ii) sont bien satisfaites. Si A n'est pas équicontinue, c'est qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $x_j, y_j \in K^{\mathbb{N}}$, $f_j \in A$ tels que

$$d(x_j, y_j) < 1/j \text{ et } \delta(f_j(x_j), f_j(y_j)) \geq \varepsilon_0.$$

Comme K et $\overline{A}$ sont des espaces métriques compacts, on peut –quitte à extraire et renuméroter– supposer que $x_y, y_j \to a \in K$ et $f_j \to g \in E$ (cette dernière convergence signifiant "convergence uniforme sur K"). Mais alors $\delta(f_j(x_j), f_j(y_j)) \to \delta(g(a), g(a)) = 0$ contredit l'information $\delta(f_j(x_j), f_j(y_j)) \geq \varepsilon_0$. C'est donc que A est équicontinue.

Montrons à présent que les ensembles A_x sont relativement compacts dans F. Soit $(y_j) = (f_j(x)) \in A_x^{\mathbb{N}}$, il s'agit de montrer que $\overline{A_x}$ est compact, i.e. qu'on peut extraire une sous-suite (y_{j_k}) convergente. Comme A est relativement compacte, on peut extraire une sous-suite f_{j_k} qui converge uniformément, celle-ci converge en particulier au point x.

Nous supposons à présent que les conditions (i),(ii) sont satisfaites et nous allons montrer que A est relativement compacte. Etant donnée $(f_j) \in A^{\mathbb{N}}$, il s'agit de montrer que l'on peut extraire une sous-suite $(f_{\varphi(j)})_j$ qui converge uniformément vers une fonction $g \in E$. Fixons (x_l) une suite de points dense dans K[17]. Comme A_{x_0} est relativement compact, on peut extraire une sous-suite convergente de $(f_j(x_0)) \in A_{x_0}^{\mathbb{N}}$. On obtient ainsi une injection strictement croissante $\varphi_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $y_0 \in F$ tels que

$$f_{\varphi_0(j)}(x_0) \longrightarrow y_0 \text{ lorsque } j \to +\infty.$$

La suite $(f_{\varphi_0(j)}(x_1)) \in A_{x_1}^{\mathbb{N}}$ admet également une sous-suite convergente car A_{x_1} est relativement compact. On construit ainsi $y_1 \in F$ et $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une injection strictement croissante tels que

$$f_{\varphi_0 \circ \varphi_1(j)}(x_1) \longrightarrow y_1 \text{ lorsque } j \to +\infty.$$

Notons que $(f_{\varphi_0 \circ \varphi_1(j)}(x_0))$ est une suite-extraite de $(f_{\varphi_0(j)}(x_0))$, elle converge donc encore vers y_0.

On procède ensuite par récurrence pour construire, $\forall p \in \mathbb{N}$, une injection croissante $\varphi_p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $y_p \in F$ tels que

$$f_{\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_p(j)}(x_l) \stackrel{j \to +\infty}{\longrightarrow} y_l, \quad \forall 0 \leq l \leq p.$$

Extraction diagonale. Posons à présent

$$\psi : j \in \mathbb{N} \mapsto \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_j(j) \in \mathbb{N}.$$

17. Pourquoi existe-t'il une telle suite ? voir Exercice 11

Nous laissons le lecteur vérifier [18] que ψ est une injection strictement croissante telle que la suite $(f_{\psi(j)}(x_l))$ est une suite extraite de $(f_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_p(j)}(x_l))$, lorsque l'on se restreint aux indices $j \geq l$. En particulier

$$f_{\psi(j)}(x_l) \overset{j\to+\infty}{\longrightarrow} y_l, \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Soit $B := \{x_j,\, j \in \mathbb{N}\} \subset K$. On a ainsi défini une application $g : B \to F$ qui à x_j associe y_j. Il résulte de l'équicontinuité de A que g est uniformément continue sur B. En effet soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ de l'équicontinuité de A,

$$\forall f \in A, \forall x, y \in K,\, d(x,y) < \alpha \Longrightarrow \delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

En appliquant ceci à $x, y \in B$ et $f = f_{\psi(j)}$ et en faisant tendre j vers $+\infty$, il vient

$$\forall x, y \in B,\, d(x,y) < \alpha \Longrightarrow \delta(g(x), g(y)) \leq \varepsilon,$$

ce qui signifie bien que g est uniformément continue sur B.

Un résultat classique (cf Exercice 17) stipule qu'une application $g : B \to F$ uniformément continue sur un sous-ensemble B d'un espace métrique K s'étend de façon unique à l'adhérence $\overline{B}$ en une application uniformément continue $\overline{g} : \overline{B} \to F$. Notez qu'ici $\overline{B} = K$.

Nous allons, pour conclure, montrer que $(f_{\psi(j)})$ converge uniformément sur K vers $\overline{g}$. Comme A est équicontinue, il suffit de montrer que $(f_{\psi(j)})$ converge simplement vers f sur K (cf Lemme 1.36). C'est le cas, par construction, en tout point de B. Si $a \in K \setminus B$, on fixe $(b_j) \in B^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a et on décompose

$$\delta(f_{\psi(j)}(a), \overline{g}(a)) \leq \delta(f_{\psi(j)}(a), f_{\psi(j)}(b_k)) + \delta(f_{\psi(j)}(b_k), \overline{g}(b_k)) + \delta(\overline{g}(b_k), \overline{g}(a)).$$

Etant donné $\varepsilon > 0$, on commence par fixer k très grand de sorte que $\delta(\overline{g}(b_k), \overline{g}(a)) < \varepsilon/3$ (continuité de $\overline{g}$) et $\delta(f_{\psi(j)}(a), f_{\psi(j)}(b_k)) < \varepsilon/3$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ (équicontinuité de A). On utilise enfin la convergence simple de $f_{\psi(j)}$ vers $\overline{g}$ au point b_k pour trouver $J \in \mathbb{N}$ tel que

$$j \geq J \Longrightarrow \delta(f_{\psi(j)}(b_k), \overline{g}(b_k)) < \varepsilon/3 \Longrightarrow \delta(f_{\psi(j)}(a), \overline{g}(a)) < \varepsilon,$$

ce qui clôt la démonstration. □

Remarque 1.35 *Cette preuve est difficile mais très instructive. Vous ne regretterez pas le temps passé à bien la comprendre.*

18. C'est une vérification fastidieuse que je vous recommande de faire en détail, cette technique "d'extraction diagonale" est fondamentale, nous la réutiliserons plusieurs fois.

Lemme 1.36 *Soit $A \subset \mathcal{C}^0(K,F)$ une famille équicontinue et $(f_j) \in A^{\mathbb{N}}$. La suite (f_j) converge uniformément sur K si et seulement si elle converge simplement.*

Preuve. Bien entendu la convergence uniforme implique la convergence simple, l'intérêt réside ici dans la réciproque. Supposons donc que la suite (f_j) converge simplement vers une fonction f sur K et montrons que cette convergence est en fait uniforme.

On commence par observer que f est continue en passant à la limite dans la quantification de l'équicontinuité de A. Il s'agit donc de montrer que si $(x_j) \in K^{\mathbb{N}}$ converge vers un point a, alors $f_j(x_j)$ tend vers $f(a)$ (pourquoi est-ce équivalent à la convergence uniforme de f_j vers f sur K ?). Or

$$\delta(f_j(x_j), f(a)) \leq \delta(f_j(x_j), f_j(a)) + \delta(f_j(a), f(a)).$$

La quantité $\delta(f_j(x_j), f_j(a))$ tend vers zéro par équicontinuité de A, tandis que $\delta(f_j(a), f(a))$ tend vers zéro par convergence simple. □

Remarque 1.37 *D'une certaine façon l'équicontinuité est une condition nécessaire pour qu'il y ait convergence uniforme, comme l'indique le théorème d'Arzela-Ascoli. Vérifiez, pour vous entraîner, que si $(f_j) \in \mathcal{C}^0(K,F)$ converge uniformément vers f, alors la famille $A := \{f_j,\, j \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue.*

1.5 Densité

Comme nous l'avons déja indiqué, un sous-espace vectoriel n'est pas nécessairement fermé en dimension infinie. Nous présentons ici quelques résultats célèbres qui fournissent au contraire des exemples de sous-espaces vectoriels (stricts) qui sont denses.

1.5.1 Sous-espaces de $\ell^p(\mathbb{R})$

Pour $p \in [1, +\infty[$ on considère l'espace

$$E := \ell^p(\mathbb{R}) := \left\{ x = (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n \geq 0} |x_n|^p < +\infty \right\}.$$

muni de la norme

$$N_p(x) := \left(\sum_{n \geq 0} |x_n|^p \right)^{1/p}.$$

C'est un cas particulier d'espace $L^p(\mathbb{R}, \mu)$ pour la mesure de comptage $\mu = \sum_{n\geq 0} \delta_n$. Nous laissons le lecteur vérifier que (E, N_p) est un espace de Banach (et même de Hilbert pour $p = 2$). Considérons

$$F := Vect\{e^{(j)},\, j \in \mathbb{N}\}$$

le sous-espace vectoriel des suites nulles à partir d'un certain rang, où $e^{(j)}$ désigne la suite de Kronecker dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la j^{eme} qui vaut 1. On a alors les résultats suivants :

Proposition 1.38 *Le sous-espace F est dense dans $\ell^p(\mathbb{R})$. L'espace $\ell^p(\mathbb{R})$ est séparable, c'est à dire qu'il admet un sous-ensemble dénombrable dense.*

Preuve. Soit $x \in \ell^p(\mathbb{R})$. On note $x^{(j)}$ la suite obtenue en conservant les premières coordonnées de x jusqu'à l'indice j, et en complétant par des coordonnées nulles,

$$x_n^{(j)} = x_n \text{ si } 0 \leq n \leq j \quad \text{et} \quad x_n^{(j)} = 0 \text{ si } n > j.$$

Par construction $(x^{(j)})_j \in F^{\mathbb{N}}$ et

$$N_p(x - x^{(j)}) = \left(\sum_{n \geq j+1} |x_n|^p \right)^{1/p} \longrightarrow 0$$

puisqu'il s'agit du reste (d'ordre j) d'une série convergente. Cela montre que F est dense dans $(\ell^p(\mathbb{R}), N_p)$.

Notons $F_{\mathbb{Q}}$ le sous-ensemble de F constitué des suites à coordonnées rationnelles. C'est un ensemble dénombrable qui est dense dans F et donc également dans $\ell^p(\mathbb{R})$. Il s'ensuit que $\ell^p(\mathbb{R})$ est séparable. $\square$

Remarque 1.39 *Les exercices faisant intervenir les espaces $\ell^p(\mathbb{R})$ sont conceptuellement plus simples que leurs analogues sur les espaces $L^p(\mu)$ (pour des mesures plus générales). Ils posent cependant de grandes difficultés à certains car ils font intervenir des "suites de suites" : choisissez bien vos notations pour distinguer les doubles indices.*

On peut également considérer $E = \ell^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles bornées muni de la norme

$$N_\infty(x) := \sup_{n \geq 0} |x_n|.$$

Le lecteur vérifiera que (E, N_∞) est encore un Banach, mais que l'adhérence du sous-espace vectoriel F des suites nulles à partir d'un certain rang est l'ensemble c_0 des suites qui convergent vers zéro. Pouvez vous montrer que $\ell^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas séparable ?

1.5.2 Théorème de Weierstrass

Il existe de très nombreux résultats d'approximations de fonctions données par des polynômes. Nous commençons par l'un des plus simples :

Théorème 1.40 (Weierstrass) *Soit* $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *muni de la norme* $N_\infty(f) = \sup_{[0,1]} |f|$. *Le sous-espace* $\mathcal{P}$ *des fonctions polynômiales est dense dans* (E, N_∞).

Nous indiquons ici une démonstration élémentaire (mais astucieuse !) due à Bernstein [19] de ce théorème d'approximation de Weierstrass [20]

Preuve. Etant donnée $f \in E$, on considère les polynômes

$$B_n(x) := \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k},$$

où $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ désignent les coefficients binômiaux.

Nous allons montrer que les polynômes B_n convergent uniformément vers la fonction f sur l'intervalle $[0,1]$, i.e. $N_\infty(f - B_n) \to 0$. Nous commençons par établir quelques identités remarquables : pour tout $x \in [0,1]$,

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1, \quad \sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2 + nx,$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n}.$$

Ces trois identités s'obtiennent en développant la formule du binôme pour $(x+y)^n$. Pour la première, il suffit de remplacer y par $(1-x)$. La seconde s'obtient en dérivant une fois la formule du binôme puis en remplaçant y par $(1-x)$. La troisième s'obtient de façon similaire en dérivant deux fois la formule du binôme et en remplaçant y par $1-x$. Nous laissons le lecteur effectuer ces manipulations (attention aux premiers indices dans les deux dernières sommes !). Notez que la dernière majoration provient de ce que $x(1-x)$ est majoré par $1/4$ sur l'intervalle $[0,1]$.

19. Sergei Bernstein, 1880-1968, mathématicien ukrainien.
20. Karl Weierstrass, 1815-1897, mathématicien allemand, "père de l'analyse".

Fixons à présent $\varepsilon > 0$ et $M = N_\infty(f)$. Rappelons que la fonction f est uniformément continue sur l'intervalle $[0,1]$, on peut donc fixer $\alpha > 0$ tel que

$$|x-y| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2.$$

Il résulte de la première identité que pour tout $x \in [0,1]$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f(x) x^k (1-x)^{n-k},$$

ainsi

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} C_n^k [f(x) - f(k/n)] x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq 2M \sum_{I_1} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{I_2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \end{aligned}$$

où

$$I_2 := \{k \in [0,n] \,|\, |x - k/n| < \alpha\} \text{ et } I_1 = \{k \in [0,n] \,|\, |x - k/n| \geq \alpha\}.$$

La deuxième somme (qui correspond aux indices k tels que k/n est relativement proche de x) est majorée par 1. Pour majorer (astucieusement !) la première somme on observe que les indices de sommation considérés sont tels que $1 \leq (x - k/n)^2/\alpha^2$, donc

$$\sum_{I_1} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=0}^{n} (x - k/n)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4\alpha^2 n}.$$

On fixe enfin $N \in \mathbb{N}$ tel que $M/2\alpha^2 N < \varepsilon/2$ pour obtenir

$$n \geq N \Longrightarrow |f(x) - B_n(x)| < \varepsilon.$$

Cette majoration étant uniforme par rapport à x, la preuve est complète. □

Ce résultat a de nombreuses généralisations, notamment le

Théorème 1.41 (Stone-Weierstrass) *Soit (K,d) un espace métrique compact et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ qui sépare les points et contient les constantes. Alors $\mathcal{A}$ est dense dans (E, N_∞).*

1.5.3 Convolution

De nombreux résultats de densité s'obtiennent en utilisant une "approximation de l'identité pour le produit de convolution", i.e. une famille $(\chi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de fonctions $\chi_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ à support compact dans la boule (centrée à l'origine de $\mathbb{R}^n$) de rayon ε, telles que $\int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(t)dt = 1$, et en considérant

$$f_\varepsilon(x) := f * \chi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\chi_\varepsilon(x-t)dt.$$

Observez que $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est bien définie dés que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Cette construction permet de montrer que le sous-espace des fonctions lisses est dense dans de nombreux espaces vectoriels topologiques munis de leur topologie "naturelle", par exemple

- les fonctions f_ε convergent uniformément vers f sur tout compact lorsque ε décroît vers zéro si f est continue,
- si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $f_\varepsilon \xrightarrow{L^p} f$ lorsque $\varepsilon \to 0$,
- etc.

Nous renvoyons le lecteur au module "Distributions" pour la construction des fonctions χ_ε ainsi que pour les propriétés de base du produit de convolution. L'idée directrice est que la famille (χ_ε) converge, au sens des distributions, vers la masse de Dirac δ (à l'origine) qui est l'élément neutre pour le produit de convolution, ainsi

$$f_\varepsilon = f * \chi_\varepsilon \to f * \delta = f.$$

Cette convergence a lieu au sens des distributions et il faut ensuite vérifier qu'elle a également lieu pour les topologies plus fortes des espaces auquel f appartient.

1.6 Exercices

Ne vous laissez pas impressionner par le nombre d'exercices. Les premiers sont des rappels de Licence et les seconds tournent tous autour de la même question (montrer que tels espace vectoriel topologique est complet).

1.6.1 Rappels de topologie de Licence

Exercice 1 *Montrer qu'une suite de réels positifs qui ne tend pas vers $+\infty$ admet une sous-suite convergente.*

Exercice 2 *Montrer que $\mathbb{N}$ est fermé dans $\mathbb{R}$ (muni de sa valeur absolue).*

Exercice 3 *Montrer qu'une suite de Cauchy admet au plus une valeur d'adhérence, et qu'elle converge si et seulement si elle admet une valeur d'adhérence. En déduire qu'un espace compact est complet.*

Exercice 4 *Montrer que si $p_n/q_n \in \mathbb{Q}$ est une suite de rationnels qui converge vers un irrationnel $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors $|p_n| \to +\infty$.*

Exercice 5 *Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable et que $\mathbb{R}$ ne l'est pas.*

Exercice 6

1) Montrer qu'une forme linéaire $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue et même uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$.

2) Montrer que $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{1+x^2} \in \mathbb{R}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors il existe des constantes $a, b > 0$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq a|x| + b.$$

Exercice 7 *Montrer qu'une application continue $f : E \to F$ entre deux espaces topologiques est séquentiellement continue*[21]*. Montrer que la réciproque est vraie si la topologie de E est métrisable.*

Exercice 8 *Soit $f : (E, N_E) \to (F, N_F)$ une application linéaire continue entre deux espaces vectoriels normés. Montrer que la norme d'opérateur de f peut s'exprimer de façon équivalente*

$$||f|| := \sup_{0 < N_E(x) \leq 1} \frac{N_F(f(x))}{N_E(x)} = \sup_{N_E(x)=1} \frac{N_F(f(x))}{N_E(x)}.$$

Exercice 9 *Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Montrer que l'adhérence d'une boule ouverte $BO(a, r)$ est la boule fermée $BF(a, r)$. Montrer que l'intérieur d'une boule fermée $BF(a, r)$ est la boule ouverte $BO(a, r)$.*

Exercice 10 *Montrer qu'une famille équicontinue sur un espace métrique compact est uniformément équicontinue.*

Exercice 11 *Soit (K, d) un espace métrique compact. Montrer que K est séparable, c'est à dire qu'il existe une suite de points dense dans K.*

21. i.e. continue le long des suites.

Exercice 12 *Soit (E, d) un espace vectoriel métrisable. Montrer que tout sous-espace strict est d'intérieur vide.*

Exercice 13 *Soit E un espace vectoriel muni de la distance triviale,*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & si \quad x \neq y \\ 0 & si \quad x = y \end{cases}$$

1) Montrer que les boules ouvertes de rayon 1 sont fermées.
2) Montrer que les boules fermées de rayon 1 sont ouvertes.
3) Quels sont les ouverts et les fermés de E ?

Exercice 14 *Soit (E, d) un espace métrique. On note $\delta := d/(1 + d)$.*
1) Montrer que δ est une distance sur E. Est-elle équivalente à d ?
2) Montrer que (E, d) est complet ssi (E, δ) l'est.

Exercice 15 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.*
1) Montrer que toutes les normes sont équivalentes sur E.
2) Montrer que les compacts de E sont les fermés bornés.

Exercice 16 *Soit (E, N) un espace vectoriel normé et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que F est fermé.*

Exercice 17 *Soit $g : B \to F$ une application uniformément continue sur un sous-ensemble B d'un espace métrique (K, d), à valeurs dans un espace métrique (F, δ). Montrez qu'il existe une unique application uniformément continue $\overline{g} : \overline{B} \to F$ telle que $\overline{g} \equiv g$ sur B.*

1.6.2 Exercices d'entraînement

Exercice 18 *Soit (E, N) un espace de Banach et E' son dual topologique, muni de la norme d'opérateur*

$$||\varphi|| := \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{|\varphi(x)|}{N(x)}.$$

Montrer que $(E, ||\cdot||)$ est un espace de Banach.

Exercice 19 *Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni des normes N_1, N_∞.*
1) Montrer que (E, N_∞) est complet.
2) Montrer que (E, N_1) n'est pas complet.

Exercice 20 *Soit* $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *muni de la norme* $N_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. *Montrer que* $f_n(x) = x^n$ *définit une suite d'éléments de* (E, N_∞) *qui n'est pas de Cauchy. Est-elle de Cauchy dans* (E, N_1) *?* (E, N_2) *?*

Exercice 21 *Soit* (K, d) *un espace métrique compact et* (F, δ) *un espace métrique complet. On considère*

$$E := \mathcal{C}^0(K, F) \text{ muni de } D(f, g) := \sup_{x\in K} \delta(f(x), g(x)).$$

Montrer que (E, D) *est un espace métrique complet.*

Exercice 22 *Soit* $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. *On note* $N(f) := N_\infty(f) + N_\infty(f')$.

1) Montrer que (E, N) *est un Banach.*

2) Montrer que (E, N_∞) *est un espace vectoriel normé non complet. Quel est son complété ?*

Exercice 23 *On considère l'espace* $E = L^1([0,1],\mathbb{R})$ *des fonctions Lebesgue-intégrables, muni de la norme* $N_1(f) = \int_0^1 |f|$ *et* $F = L^2([0,1],\mathbb{R}) \subset E$.

1) Montrer que (E, N_1) *est complet.*

2) Montrer que (F, N_1) *n'est pas complet.*

Exercice 24 *Soit* (E, N) *et* (F, N') *deux espaces de Banach. On considère* $G := \mathcal{L}_c(E, F)$ *l'espace des applications linéaires continues de* E *dans* F*muni de la norme d'opérateur*

$$||f|| := \sup_{x\neq 0} \frac{N'(f(x))}{N(x)}.$$

Montrer que $(G, ||\cdot||)$ *est un Banach. Utilise-t'on toutes les hypothèses ?*

Exercice 25 *Pour* $p \in [1, +\infty]$, *on considère l'espace*

$$\ell^p(\mathbb{R}) := \left\{ x = (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n\geq 0} |x_n|^p < +\infty \right\}.$$

muni de la topologie associée à la famille dénombrable séparante p *de semi-normes* $p_n(x) = |x_n|$, $n \in \mathbb{N}$.

1) Donner un exemple de suite qui converge vers la suite nulle dans $(\ell^p(\mathbb{R}), p)$ *mais pas dans* $(\ell^p(\mathbb{R}), N_p)$, *où* $N_p(x) := \left(\sum_{n\geq 0} |x_n|^p\right)^{1/p}$.

2) Montrer que l'espace $(\ell^p(\mathbb{R}), p)$ *n'est pas complet.*

Exercice 26 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $E = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. On note K_j une suite exhaustive de compacts de I, $p_j(f) := \sup_{x \in K_j} |f_j(x)|$ et on pose*

$$d(f,g) := \sum_{j \geq 0} 2^{-j} \frac{p_j(f-g)}{1 + p_j(f-g)}.$$

1) Montrer que d est une distance sur E qui en fait un espace complet.

2) Montrer qu'un ensemble $A \subset E$ est borné si et seulement si pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe $M_j > 0$ tel que $p_j(f) \leq M_j$ pour tout $f \in A$.

3) Est-ce que E a la propriété de Borel-Heine ?

1.6.3 Grands classiques

Exercice 27 *Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Montrer que (E, N) est complet ssi toute série absolument convergente est convergente.*

Exercice 28 *Soit (E, N) un espace de Banach et $u \in \mathcal{L}_c(E)$ un endomorphisme continu de norme $||u|| < 1$. Montrer que*

$$v := \sum_{n \geq 0} u^n \in \mathcal{L}_c(E)$$

et en déduire que $Id - u$ est un élément inversible de $\mathcal{L}_c(E)$.

Exercice 29 *Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de $N_\infty(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$.*

1) On considère $N_p(f) := (\int_0^1 |f(x)| dx)^{1/p}$ pour $p = 1, 2$. Montrer que N_1, N_2, N_∞ sont des normes sur E et qu'elles ne sont pas équivalentes.

2) Quelle est l'adhérence (pour chacune de ces normes) du sous-espace $\mathcal{P}$ des fonctions polynômiales ?

Exercice 30 *Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie et $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ une famille orthonormée. Montrer que la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de sous-suite convergente.*

Exercice 31 *Soit $(E, \|\cdot\|))$ un espace vectoriel normé. Montrer que la norme provient d'un produit scalaire si et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme, i.e. pour tout $x, y \in E$,*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Exercice 32 *On munit l'espace* $\mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ *de la topologie* $\mathcal{T}$ *associée à la famille dénombrable séparante de semi-normes*

$$p_j(f) = \sum_{i=0}^{j} \sup_{x\in[-j,+j]} |f^{(i)}(x)|.$$

Montrer que l'espace $(\mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R}),\mathcal{T})$ *est un espace de Fréchet qui a la propriété de Borel-Heine.*

Exercice 33 *Soit* $H := \{x = (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,/\, \sum_n |x_n|^2 < +\infty\}$ *muni de*

$$\langle x, y\rangle := \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n.$$

1) Vérifier que $(H, \langle\ \rangle)$ *est un espace de Hilbert.*

2) Soit $c \in H$*. Montrer que le cube de Hilbert,*

$$Q_c := \{x \in H \,/\, |x_n| \leq |c_n| \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}$$

est compact.

Exercice 34 *Soit* $F \subset \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *un sous-espace de dimension finie. Montrer qu'une suite d'éléments de* F *converge uniformément si et seulement si elle converge simplement.*

Exercice 35 *Soit* $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *muni de la norme sup. Mq l'ensemble*

$$\mathcal{B} := \{x^n \in E \,/ n \in \mathbb{N}\}$$

est un fermé borné de (E, N_∞) *qui n'est pas compact.*

Exercice 36 *Soit* $Lip \subset E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *le sous-espace des fonctions Lipschitziennes. On note* $Lip(C)$ *le sous-ensemble des fonctions* f *telles que*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|,\ \forall x, y \in [0,1].$$

1) Montrer que $Lip(C)$ *est équicontinue.*

2) Montrer que $Lip(C)$ *est fermé dans* (E, N_∞).

3) Montrer que si $(f_n) \in Lip(C)^{\mathbb{N}}$ *converge simplement vers une fonction* f*, alors* $f \in Lip(C)$ *et* f_n *converge uniformément vers* f *sur* $[0,1]$.

4) Montrer que Lip est d'intérieur vide dans (E, N_∞).

Exercice 37 *En utilisant le théorème de Weierstrass, montrer que l'espace* $(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), N_\infty)$ *est séparable.*

Exercice 38 *Soit* (E_n, N_n) *une suite décroissante d'espaces de Banach, i.e. tels que* $E_{n+1} \subset E_n$*. On munit* $E := \cap_{n\geq 0} E_n$ *de la famille de semi-normes* $p = \{N_n,\ n \in \mathbb{N}\}$*. Montrer que* (E, p) *est un espace de Fréchet.*

Quels exemples vus jusqu'ici relèvent de cette construction ?

Chapitre 2

Les théorèmes de Banach

Ce chapitre présente les théorèmes principaux d'Analyse fonctionnelle (théorème de Banach-Steinhaus, de l'application ouverte et du graphe fermé) établis par l'école mathématique polonaise dans la première partie du vingtième siècle. Tous reposent sur le lemme de Baire qui a de nombreuses autres applications en analyse.

Pour simplifier la présentation, nous énonçons et démontrons ces résultats dans le cadre des espaces de Banach. Ils sont cependant tous valables dans celui des espaces de Fréchet et nous encourageons le lecteur à essayer de les démontrer dans ce cadre après une première lecture, afin d'approfondir sa compréhension des raisonnements (plusieurs références indiquées à la fin se placent ce cadre plus général).

2.1 Le lemme de Baire

2.1.1 Le grand théorème de Baire

Le résultat suivant, dû à Baire [1], est la clef de voûte de plusieurs résultats fondamentaux d'Analyse (fonctionnelle ou non).

Lemme 2.1 *Soit* (E, d) *un espace métrique complet et* $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'ouverts dense dans* E*. Alors* $\cap_{n\in N} O_n$ *est encore dense dans* E*.*

Remarque 2.2 *Il est crucial de considérer une famille* dénombrable *d'ouverts. Les ensembles* $O_x := \mathbb{R} \setminus \{x\}$ *forment une famille non dénombrable d'ouverts denses de* $\mathbb{R}$ *dont l'intersection est vide,*

$$\bigcap_{x\in\mathbb{R}} O_x = \emptyset,$$

1. René-Louis Baire, 1874-1932, mathématicien français.

donc non dense !

Remarque 2.3 *En passant aux complémentaires, l'énoncé devient : dans un espace métrique complet, une union dénombrable de fermés d'intérieur vide est encore d'intérieur vide.*

L'hypothèse de complétude est également cruciale : si $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des fonctions polynômiales sur $[0,1]$ à valeurs réelles, muni de la norme $N_\infty(P) := \sup_{[0,1]} |P|$, observez que

$$\mathcal{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n, \text{ avec } \mathcal{P}_n := \{P \in \mathcal{P}, \deg P \leq n\},$$

est un exemple de réunion dénombrable de fermés (sous-espaces de dimension finie) d'intérieur vide (sous-espace strict) qui n'est pas d'intérieur vide.

Vous vérifierez dans l'Exercice 39 qu'on peut remplacer l'hypothèse "complet" par "localement compact".

Preuve. Soit B une boule ouverte de E. Il s'agit de montrer que $B \cap \Omega \neq \emptyset$, où l'on a posé

$$\Omega := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n.$$

Comme O_0 est dense, il rencontre B, on fixe $x_0 \in B \cap O_0$. Comme $B \cap O_0$ est ouvert, on peut fixer $r_0 > 0$ tel que $B(x_0, 2r_0) \subset B \cap O_0$, en particulier

$$\overline{B}(x_0, r_0) \subset B \cap O_0.$$

Quitte à diminuer r_0, on ne perd rien à supposer que $r_0 \leq 1 = 2^{-0}$.

Comme O_1 est dense, l'intersection $O_1 \cap B(x_0, r_0)$ est un ouvert non vide. On peut donc fixer x_1 et $0 < r_1 < 2^{-1}$ tels que

$$\overline{B}(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0) \cap O_1.$$

On continue par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, fixant ainsi $x_n \in E$ et $0 < r_n < 2^{-n}$ tels que

$$\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \cap O_{n+1}.$$

Observons que la suite (x_n) est de Cauchy, car par construction pour tout $p \geq 0$, $x_{n+p} \in B(x_n, r_n)$, donc

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq r_n < 2^{-n}.$$

Comme E est complet, (x_n) converge, on note $a \in E$ sa limite. On obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a \in \overline{B}(x_n, r_n) \subset O_{n-1},$$

donc $a \in \Omega$. De plus $a \in \overline{B}(x_0, r_0) \subset B$, donc $B \cap \Omega \neq \emptyset$ n'est pas vide. $\square$

2.1.2 Terminologie

Un espace topologique est dit de Baire si toute intersection dénombrable d'ouverts dense est dense. Nous venons de montrer qu'un espace métrique complet est de Baire, vous vérifierez dans l'Exercice 39 qu'un espace localement compact est également un espace de Baire. Par contre l'espace des fonctions polynômiales n'est jamais un espace de Baire si on le munit d'une norme (voir Exercice 40).

Rappelons qu'une intersection dénombrable d'ouverts n'est, en général, pas un ouvert (pouvez vous donner un exemple ?). Une telle intersection s'appelle un G_δ. De façon similaire, on appelle F_σ une union dénombrable de fermés. Notez que l'ensemble $[0,1[$ est à la fois un G_δ et un F_σ dans $\mathbb{R}$ (muni de sa topologie usuelle).

Il existe toute une terminologie qui vise à distinguer les ensembles en fonction de leurs propriétés topologiques de plus en plus fines. Il n'est pas nécessaire que vous appreniez tout ce vocabulaire, en voici un petit échantillon :

- un ensemble est dit *maigre* s'il est contenu dans une union dénombrable de fermés d'intérieur vide (on dit aussi qu'il est de *première catégorie*) ;
- les ensembles qui ne sont pas maigres sont de *deuxième catégorie* ;
- un ensemble est un résiduel si son complémentaire est maigre.

Attention ! Le lemme de Baire permet de montrer que certains sous-ensembles sont "topologiquement gros" (inclus dans un G_δ dense). Il se peut néanmoins que ceux-ci soient de mesure nulle pour le mesure de Lebesgue. Voici un exemple à méditer :

Exemple 2.4 *Rappelons qu'une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite semi-continue supérieurement (s.c.s.) si*

$$\forall c \in \mathbb{R},\ \{x \in \mathbb{R} \,|\, \varphi(x) < c\}$$

est un ouvert de $\mathbb{R}$. Le lecteur vérifiera qu'une limite décroissante de fonctions s.c.s. est encore s.c.s. Fixons (a_n) une suite de points dense dans $[0,1]$ et considérons

$$\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n \geq 0} 2^{-n} \log|x - a_n| \in \mathbb{R}.$$

C'est une fonction s.c.s. (limite décroissante, sur tout compact, de fonctions s.c.s.) dont le lecteur vérifiera qu'elle est localement intégrable sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que l'ensemble

$$P := \{x \in \mathbb{R} \,|\, \varphi(x) = -\infty\} = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R} \,|\varphi(x) < -N\}$$

est un G_δ dense dans $[0,1]$ (puisqu'il contient tous les points a_j) qui est toutefois de mesure de Lebesgue nulle.

Observez que P n'est pas dénombrable (il contient donc beaucoup d'autres points que les a_j), sinon on pourrait numéroter ses éléments $P = \{b_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ et aboutir à une contradiction car $O_N := \{x \in [0,1]\,|\varphi(x) < -N\} \setminus \{b_N\}$ est encore un ouvert dense de $[0,1]$ et

$$\bigcap_{N\in\mathbb{N}} O_N = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}\,|\varphi(x) < -N\} \setminus P = \emptyset$$

n'est alors pas dense dans $[0,1]$, contredisant le lemme de Baire.

2.1.3 Applications

Il y a de très nombreuses applications du lemme de Baire. Celles qui nous intéressent principalement dans ce module vont être données dans les sections suivantes. En voici deux supplémentaires, pour alimenter votre culture générale et aiguiser votre appétit !

Proposition 2.5 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Une limite simple f de fonctions continues $f_n : I \to \mathbb{R}$ est continue sur un G_δ dense.*

Notez en particulier que si une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, alors sa fonction dérivée

$$f'(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x+1/n) - f(x)}{1/n}$$

est automatiquement continue sur un G_δ dense, car elle peut s'écrire comme limite simple de taux d'accroissements continus.

Preuve. Voici une esquisse de preuve que je vous recommande de compléter. Considérons

$$F_{n,k} := \bigcap_{p,q\geq n} \{x \in I,\ |f_p(x) - f_q(x)| < 1/k\}\,.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les $F_{n,k}$ sont des ensembles fermés (intersections de fermés) dont la réunion (en $n \in \mathbb{N}$) est égale à I, puisque (f_p) converge simplement vers f. Il résulte donc du lemme de Baire que

$$\Omega_k := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Int(F_{k,n})}$$

est un ouvert dense de I (ici Int(F) désigne l'intérieur de l'ensemble F).

Le lecteur vérifiera que pour tout $x \in \Omega_k$, il existe un voisinage $V_x \subset I$ surlequel f vérifie,

$$\forall y \in V_x, \ \ |f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{k}.$$

Il s'ensuit que $\Omega := \bigcap_{k\geq 1} \Omega_k$ est un G_δ dense (encore le lemme de Baire) tel que f est continue en tout point de Ω. □

Proposition 2.6 *Soit $E := \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de $N_\infty(f) = \sup_{[0,1]} |f|$, et*

$$\mathcal{R} := \{f \in E \,|\, f \text{ n'est nulle part dérivable}\}.$$

Alors $\mathcal{R}$ est dense dans (E, N_∞).

Pour information, c'est Weierstrass (encore) qui a le premier donné un exemple explicite de fonction continue nulle part dérivable. Sauriez vous démontrer ce résultat (avec ou sans le lemme de Baire) et être un peu plus précis ?

2.2 Le théorème de Banach-Steinhaus

2.2.1 Théorème de la borne uniforme

Théorème 2.7 (Banach-Steinhaus) *Soit E, F deux espaces vectoriels normés et $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille d'éléments de $\mathcal{L}_c(E, F)$. On suppose que E est complet et on note*

$$\mathcal{B} := \{x \in E \,|\, \sup_{\alpha\in A} ||T_\alpha(x)|| < +\infty\}.$$

Alors soit $\mathcal{B}$ est maigre, soit $\mathcal{B} = E$ et dans ce cas

$$\sup_{a\in A} ||T_\alpha|| < +\infty.$$

Lorsque $\mathcal{B} = E$ on obtient ainsi que si la famille d'opérateurs $(T_\alpha)_{\alpha\in A}$ est ponctuellement bornée, alors elle est uniformément bornée, d'où le nom parfois donné de théorème de la borne uniforme.

Remarque 2.8 *Il existe de nombreuses variantes de ce résultat dû à S.Banach et W.Steinhaus[2] publié en 1927. Le lecteur pourra consulter le livre de Rudin à ce sujet.*

2. Hugo Steinhaus, 1887-1972, mathématicien polonais.

Preuve. Considérons les ensembles

$$E_N := \{x \in E \mid \sup_{\alpha \in A} ||T_\alpha(x)|| \leq N\} = \bigcap_{\alpha \in A} \{x \in E \mid ||T_\alpha(x)|| \leq N\}.$$

Ce sont des fermé de E (intersection de fermés) tels que $\mathcal{B} = \cup_{N \in \mathbb{N}} E_N$.

Soit chacun de ces fermés est d'intérieur vide, dans ce cas $\mathcal{B}$ est maigre ; soit on peut trouver $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que E_{N_0} est d'intérieur non vide. Fixons $a \in E$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\overline{\mathbb{B}}(a, \varepsilon)$ est contenue dans l'intérieur de E_{N_0}, cela signifie

$$\forall \alpha \in A, \forall x \in E, \, ||x|| < 1 \Longrightarrow ||T_\alpha(a + \varepsilon x)|| \leq N_0.$$

On en déduit que

$$||T_\alpha(\varepsilon x)|| \leq ||T_\alpha(a)|| + ||T_\alpha(a + \varepsilon x)|| \leq 2N_0,$$

puis

$$\sup_{\alpha \in A} \sup_{||x|| \leq 1} ||T_\alpha(x)|| \leq \frac{2N_0}{\varepsilon},$$

qui est le contrôle uniforme souhaité. □

2.2.2 Conséquences

La conséquence la plus remarquable et la plus utile est la suivante :

Corollaire 2.9 *Soit E un Banach, F un espace vectoriel normé et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}_c(E, F)^{\mathbb{N}}$ une suite d'applications linéaires continues. On suppose que pour tout $x \in E$, la suite $(T_n(x)_n$ converge vers une limite notée $T(x) \in F$.*

Alors $T \in \mathcal{L}_c(E, F)$.

Autrement dit, une limite simple d'opérateurs continus (sur un espace complet) est automatiquement continue.

Voici une autre application classique du théorème de Banach-Steinhaus. Etant donné (E, N) un espace de Banach, nous laissons le lecteur vérifier dans l'Exercice 46 qu'une forme bilinéaire $\varphi : (E, E) \to \mathbb{R}$ est continue si et seulement s'il existe $C > 0$ telle que

$$\forall (x, y) \in E \times E, \, |\varphi(x, y)| \leq CN(x)N(y).$$

Proposition 2.10 *Soit (E, N) un espace de Banach et $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. Alors φ est continue si et seulement si elle est séparément continue.*

Preuve. Supposons que φ est séparément continue et considérons (x_n, y_n) une suite de points qui converge vers $(0,0)$. Il s'agit de montrer que $\varphi(x_n, y_n)$ converge vers 0. Posons

$$\varphi_n : y \in E \mapsto \varphi(x_n, y) \in \mathbb{R}.$$

Comme φ est séparément continue, les φ_n sont des formes linéaires continues sur E (continuité en y, à x fixé). Comme (x_n) tend vers zéro, la suite $(\varphi_n(y))_n$ converge vers zéro pour tout y fixé (continuité de φ en x, à y fixé).

Il résulte du théorème de Banach-Steinhaus que la suite des normes d'opérateurs $(\|\varphi_n\|)_n$ est bornée, i.e. il existe $C > 0$ telle que

$$\|\varphi_n\| := \sup_{y \in E \setminus \{0\}} \frac{|\varphi_n(y)|}{N(y)} \leq C$$

d'où en particulier

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\varphi(x_n, y_n)| \leq C N(y_n),$$

ce qui montre la continuité en (x, y) de φ.

L'autre implication est immédiate. $\square$

2.3 Le théorème de l'application ouverte

2.3.1 Applications ouvertes

Définition 2.11 *On dit qu'une application $f : E \to F$ entre deux espaces topologiques est ouverte en un point $a \in E$ si l'image $f(V)$ de tout voisinage ouvert V de a est un voisinage ouvert de $f(a)$.*

On dit que f est ouverte si elle est ouverte en tout point, i.e. si l'image de tout ouvert est un ouvert.

Lorsque f est *bijective*, elle est ouverte si et seulement si l'application réciproque f^{-1} est continue.

Lorsque f est *linéaire*, elle est ouverte si et seulement si elle est ouverte à l'origine, si (E, N_E) et (F, N_F) sont de plus des espaces vectoriels *normés*, f est ouverte si et seulement si il existe $c > 0$ telle que

$$T(B_E(0_E, 1)) \supset B_F(0_F, c).$$

Exemple 2.12 *L'application*

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$$

n'est pas ouverte en zéro puisque $f(]-1,+1[) = [0,1[$ *n'est pas un voisinage ouvert de zéro. Elle est cependant ouverte en tout point* $a \in \mathbb{R}^*$.

Plus généralement il résulte du théorème d'inversion locale qu'une application $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *est ouverte en tout point* a *tel que* $f'(a) \neq 0$.

Nous rappelerons au Chapitre 3 qu'une fontion holomorphe $f : \Omega \to \mathbb{C}$ sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$ est soit constante, soit ouverte (conséquence du principe des zéros isolés).

Quant au cas d'une application linéaire en dimension finie $f : E \to F$, je vous encourage (Exercice 41) à vérifier qu'elle est ouverte si et seulement si elle est surjective.

2.3.2 Le théorème

Théorème 2.13 *Soit* E, F *deux espaces de Banach et* $T : E \to F$ *une application linéaire continue. Si* T *est surjective alors elle est ouverte, i.e. il existe* $c > 0$ *telle que*

$$T(\mathbb{B}_E(0,1)) \supset \mathbb{B}_F(0,c).$$

Ce "Théorème de l'application ouverte" est dû à Banach et Schauder [3].

Preuve. C'est la preuve la plus difficile de ce chapitre, travaillez la bien ! Nous allons procéder en deux étapes.

Étape 1. Nous allons montrer qu'il existe $c > 0$ tel que la boule ouverte (centrée en 0_F) de rayon $2c$ est contenue dans l'adhérence de l'image de la boule unité,

$$\mathbb{B}_F(0_F, 2c) \subset \overline{T(\mathbb{B}_E(0,1))}. \tag{2.1}$$

La démonstration est très proche de celle du théorème de Banach-Steinhaus, nous allons utiliser le fait que T est linéaire et surjective, et que F est complet.

Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $F_n := \overline{T(\mathbb{B}_E(0,n))}$. Ce sont des fermés de F tels que $\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n = F$, puisque T est supposée surjective. Le lemme de Baire garantit donc que l'un au moins de ces fermés est d'intérieur non vide, disons F_s. On fixe donc $a \in F$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\mathbb{B}_F(a,\varepsilon) \subset F_s = \overline{T(\mathbb{B}_E(0,s))}.$$

3. Juliusz Schauder, 1899-1943, mathématicien polonais.

Par symétrie, a et $-a$ sont dans F_s, donc

$$\mathbb{B}_F(0,\varepsilon) = -a + \mathbb{B}_F(a,\varepsilon) \subset 2F_s = \overline{T(\mathbb{B}_E(0,2s))}.$$

On en déduit que $\mathbb{B}_F(0,2c) \subset \overline{T(\mathbb{B}_E(0,1))}$ avec $c = \varepsilon/4s$.

Étape 2. Nous allons à présent "ôter l'adhérence" et montrer que

$$\mathbb{B}_F(0_F,c) \subset T(\mathbb{B}_E(0_E,1))$$

en utilisant (2.1), la continuité de T (et à nouveau son caractère linéaire), ainsi que le caractère complet de E.

Soit $y \in \mathbb{B}_F(0_F,c)$. Nous allons fabriquer $z_\infty = \lim z_n \in \mathbb{B}_E(0_E,1)$ tel que $y = T(z_\infty)$ en procédant par approximation. Il résulte de (2.1) que l'on peut trouver $x_0 \in \mathbb{B}_E(0_E,1/2)$ tel que

$$N_F(y - Tx_0) < c/2.$$

Notez en effet que par homogénéité, (2.1) est équivalent à

$$\mathbb{B}_F(0,2cr) \subset \overline{T(\mathbb{B}_E(0,r))}, \tag{2.2}$$

quelque soit $r > 0$. Nous venons d'utiliser ici cette information avec $r = 1/2$.

Posons $y_0 = y$ et $y_1 = y_0 - Tx_0 \in B_F(0,c/2)$. Cettte même information (utilisée avec $r = 1/4$) assure que l'on peut fixer $x_1 \in \mathbb{B}_E(0_E,1/4)$ tel que

$$N_F(y_1 - Tx_1) < c/4.$$

On pose $y_2 = y_1 - Tx_1$ et on continue par récurrence en construisant pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n \in B_E(0,2^{-(n+1)}) \text{ et } y_n \in B_F(0,c2^{-n}) \text{ tels que } y_{n+1} = y_n - Tx_n.$$

Observons que la série de terme général x_n est absloument convergente, donc convergente car E est complet. On note $z_n = \sum_{j=0}^n x_j$ sa somme partielle et z_∞ sa limite. Il résulte de la continuité et de la linéarité de T que

$$T(z_\infty) = \lim_{n\to+\infty} T(z_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^n T(x_j) = y$$

car $y_{n+1} = y_n - Tz_n$ converge vers 0_F. On vérifie enfin que $z_\infty \in \mathbb{B}_E(0_E,1)$ car

$$N_E(z_\infty) \leq \sum_{j\geq 0} N_E(x_j) < \sum_{j\geq 0} 2^{-(j+1)} = 1.$$

□

2.3.3 Applications

La conséquence suivante du théorème de l'application ouverte est appelée "théorème d'isomorphie de Banach".

Corollaire 2.14 *Soit $T : E \to F$ une application linéaire bijective entre deux espaces de Banach. Si T est continue, alors T^{-1} l'est également, donc T est un homéomorphisme.*

Un cas particulier utile de ce résultat concerne le cas où $F = E$ est muni de deux normes différentes. On considère l'application identité

$$T : x \in (E, N_1) \mapsto x \in (E, N_2)$$

qui est bien sûr linéaire et bijective et on suppose que la norme N_1 domine la norme N_2 de sorte que T est continue. Il résulte du corollaire précédent que si (E, N_1) et (E, N_2) sont complets, alors les normes N_1 et N_2 sont équivalentes.

De façon alternative, si la norme N_2 ne domine pas la norme N_1, l'un au moins des espaces $(E, N_1), (E, N_2)$ n'est pas complet.

Nous renvoyons le lecteur à l'Exercice 50 pour une utilisation de ce type de raisonnement.

Voici une autre application typique du théorème de l'application ouverte.

Proposition 2.15 *Soit E un sous-espace vectoriel fermé de $(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), N_\infty)$. On suppose que E est constitué de fonctions continûment différentiables. Alors E est de dimension finie.*

Preuve. On note $N(f) = N_\infty)(f) + N_\infty)(f')$ la norme naturelle sur l'espace $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Rappelons (cf Exercice 22) que $(\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}), N)$ est complet.

Observons que E est également fermé dans $(\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}), N)$. En effet, si une suite $(f_j) \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers f dans $(\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}), N)$, i.e. $N(f_j - f) \to 0$, alors en particulier $N_\infty(f_j - f) \to 0$, donc $f \in E$ car E est fermé dans $(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), N_\infty)$.

Il s'ensuit que les espaces (E, N) et (E, N_∞) sont des Banach et que l'application identité

$$f \in (E, N) \mapsto f \in (E, N_\infty)$$

est continue bijective (puisque N domine N_∞). Le théorème de l'application ouverte garantit alors que ces deux normes sont équivalentes sur E, en particulier il existe $C > 0$ telle que

$$\forall f \in E, \;\; N_\infty(f') \leq N_\infty(f).$$

Il s'ensuit que la boule unité fermée $\overline{\mathbb{B}}_E(1)$ est équicontinue puisque

$$\forall f \in \overline{\mathbb{B}}_E(1), \forall x, y \in [0,1], \quad |f(x) - f(y)| \leq N_\infty(f')|x-y| \leq C|x-y|.$$

Comme $\overline{\mathbb{B}}_E(1)$ est également fermée et bornée, le théorème d'Arzela-Ascoli assure que $\overline{\mathbb{B}}_E(1)$ est compacte. Enfin le théorème de Riesz nous permet de conclure que E est de dimension finie. □

2.4 Le théorème du graphe fermé

2.4.1 Le théorème

Théorème 2.16 *Soit E, F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire. On note $\Gamma_T := \{(x,y) \in E \times F \,|\, y = T(x)\}$ le graphe de T dans $E \times F$ muni de la topologie produit.*

Alors T est continu si et seulement si Γ_T est fermé dans $E \times F$.

Preuve. Notez qu'il est simple et toujours vrai que le graphe de T est fermé dés lors que T est continu : si $(x_n, y_n) \in \Gamma_T$ converge vers (a,b), alors

$$y_n = T(x_n) \longrightarrow T(a) = b,$$

donc $(a,b) \in \Gamma_T$.

C'est donc la réciproque qui nous intéresse ici et qui requiert la linéarité et les hypothèses de complétude. Supposons que Γ_T est fermé et notons

$$N(x,y) := N_E(x) + N_F(y)$$

le norme produit. Rappelons que $(E \times F, N)$ est un Banach (nous incitons le lecteur à le vérifier !). Considérons la projection

$$\pi : (x,y) \in (\Gamma_T, N) \mapsto x \in (E, N_E).$$

C'est une application linéaire bijective entre deux espaces de Banach, puisque Γ_T est un sous-espace vectoriel fermé de $E \times F$. Elle est continue car

$$\forall (x,y) \in \Gamma_T, \quad N_E(x) \leq N(x,y) = N_E(x) + N_F(y).$$

Le théorème de l'application ouverte garantit alors que π est un homéomorphisme, i.e. il existe $C > 0$ telle que

$$\forall (x,y) \in \Gamma_T, \quad N(x,y) = N_E(x) + N_F(y) \leq C N_E(x),$$

en particulier $N_F(y) = N_F(Tx) \leq C N_E(x)$, i.e. T est continue. □

2.4.2 Applications

Le gain obtenu grâce au théorème de graphe fermé est le suivant. Pour montrer qu'une application linéaire est continue à l'origine, il faut montrer que si x_n tend vers 0, il en est de même de Tx_n (on se place dans le contexte des espaces vectoriels normés). En principe, on ne sait rien a priori de la suite (Tx_n) (elle pourrait être non bornée, etc). Le théorème du graphe fermé (lorsqu'on peut l'appliquer) permet de se ramener au cas où la suite (Tx_n) est convergente, disons de limite b, et il ne reste plus qu'à vérifier que cette limite b est nulle.

Une conséquence très utile fait appel à la notion de topologie faible que vous verrez plus tard : une application linéaire est continue (pour la topologie forte) si et seulement si elle est continue pour la topologie faible.

Nous illustrons ceci sur un exemple classique :

Proposition 2.17 *Soit H un espace de Hilbert et $T : H \to H$ un endomorphisme symétrique, i.e. tel que*

$$\forall x, y \in H, \quad \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle.$$

Alors T est continu.

Preuve. On est en mesure d'utiliser le théorème du graphe fermé, il suffit donc de montrer que le graphe Γ_T de T dans $H \times H$ est fermé. Soit donc $(x_n, y_n) \in \Gamma_T^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $(a, b) \in H \times H$. On doit montrer que $b = Ta$, sachant que $y_n = Tx_n$. Notez qu'on peut changer (x_n, y_n) en $(x'_n, y'_n) = (x_n - a, y_n - Ta) \in \Gamma_T$ et (a, b) en $(0, b')$ avec $b' = b - Ta$, pour se ramener au cas où $a = 0$. Il s'agit alors de montrer que $b' = 0$.

Comme T est symétrique, il résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$|\langle b', Tx'_n \rangle| = |\langle Tb', x'_n \rangle| \leq ||Tb'|| \cdot ||x'_n|| \to 0.$$

Or Tx'_n converge vers b', donc $|\langle b', Tx'_n \rangle|$ converge vers $||b'||^2$, d'où $b' = 0$. $\square$

2.5 Exercices

Exercice 39 *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique localement compact[4], i.e. un espace topologique séparé tel que tout point admet un voisinage compact.*

Montrer que $(E, \mathcal{T})$ est un espace de Baire. Montrer que si E est un espace vectoriel normé, alors il est de dimension finie.

4. Les espaces localement compacts admettent un compactifié d'Alexandrov, est-ce que cela figure dans votre cours de Topologie de Licence ?

Exercice 40 *Soit* (E, N) *un espace de Banach de dimension infinie et* $\mathcal{B} = \{e_n, n \in \mathbb{N}\} \subset E$ *une famille (algébriquement) libre.*

1) Montrer que $F_n := \mathrm{Vect}\{\mathrm{e_j} \,/ 0 \le \mathrm{j} \le \mathrm{n}\}$ *est un fermé d'intérieur vide.*

2) En déduire que E n'admet pas de base (algébrique) dénombrable. Qu'en déduisez vous pour $\mathcal{P}$*, l'ensemble des fonctions polynômiales sur* $[0, 1]$ *?*

Exercice 41

1) Montrer qu'une application linéaire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est ouverte ssi* $f(1) \neq 0$.

2) Soit E, F *deux espaces vectoriels normés avec* E *de dimension finie. Montrer qu'une application linéaire* $f : E \to F$ *est ouverte si et seulement si elle est surjective.*

Exercice 42 *Soit* $f : E \to F$ *une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés.*

1) Montrer que si f *est ouverte alors elle est surjective.*

2) Donner un exemple d'application surjective non ouverte. Est-ce en contradiction avec le théorème de l'application ouverte ?

Exercice 43 *Montrer que* $L^2([0, 1], \mathbb{R})$ *est maigre dans* $E = (L^1([0, 1], \mathbb{R}), N_1)$ *de trois manières différentes :*

1) En considérant $I_n = \{f \in E \,/\, \int_0^1 |f|^2 \le n\}$ *et le théorème de Baire.*

2) En utilisant le théorème de l'application ouverte et l'injection $L^2 \to L^1$.

3) En considérant les formes linéaires $\varphi_n : f \in E \mapsto \int_0^1 f(t) g_n(t) dt \in \mathbb{R}$ *où* $g_n = n\mathbf{1}_{[0,n^{-3}]}$ *et le théorème de Banach-Steinhaus.*

Exercice 44 *Soit* $p \in [1, +\infty]$. *On se donne* (a_n) *une suite de réels telle que*

$$\forall x \in \ell^p(\mathbb{R}), \ \sum_{n \ge 0} |a_n||x_n| < +\infty.$$

Montrer que $a \in \ell^q(\mathbb{R})$ *où* $1/p + 1/q = 1$.

Exercice 45 *Montrer que l'ensemble des fonctions Lipschitziennes est maigre dans* $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ *(muni de la norme sup).*

Exercice 46 *Soit* E *un Banach et* $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ *une application bilinéaire.*

1) Montrer que φ *est continue ssi il existe* $C > 0$ *telle que*

$$|\varphi(x, y)| \le C||x|| \, ||y|| \ \forall x, y \in E.$$

2) Montrer que φ *est continue ssi elle est séparément continue.*

3) Donner un exemple d'une application (non linéaire) $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ séparément continue qui n'est pas continue.

4) Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des applications polynômiales sur $[0,1]$ à valeurs réelles, muni de la norme $N_1(f) = \int_0^1 |f|$. Montrer que

$$\Phi : (f,g) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} \mapsto \int_0^1 fg \in \mathbb{R}$$

est bilinéaire, séparément continue, mais pas continue.

Exercice 47 *Soit E un sous-espace vectoriel fermé de $L^1([0,1],\mathbb{R})$ (muni de sa topologie "naturelle" associée à la norme $N_1(f) = \int_0^1 |f|$). On suppose que pour tout $f \in E$, il existe $p_f > 1$ tel que $f \in L^{p_f}([0,1],\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $p > 1$ tel que*

$$E \subset L^p([0,1],\mathbb{R}).$$

Vérifiez que le graphe de l'application

$$\Phi : f \in (E, N_1) \mapsto f \in (L^p([0,1],\mathbb{R}), N_p)$$

est fermé et en déduire qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\forall f \in E,\ N_p(f) \leq C N_1(f).$$

Exercice 48 *Soit H un espace de Hilbert et T un endomorphisme positif,*

$$\langle Tx, x\rangle \geq 0 \text{ pour tout } x \in H.$$

1) Montrer que si $||x_n|| \to 0$ alors $\langle Tx_n, y\rangle \to 0$ pour tout $y \in H$.

2) Montrer que si (x_n) converge vers 0 et Tx_n converge vers b, alors $b = 0$.

3) En déduire que T est continu.

Exercice 49 *On considère*

$$E := \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R}) \,|\, \forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0 \right\}$$

muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^1 fg$. Montrer que l'application linéaire

$$T : f \in E \mapsto f' \in E$$

est antisymétrique mais n'est pas continue. Qu'en déduisez vous ?

Exercice 50 *Soit H un sous-espace de $L^2([0,1],\mathbb{R})$ qui est fermé pour la topologie induite par la norme N_2. On suppose que $H \subset \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.*

1) Mq H est fermé dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ pour la topologie induite par N_∞.

2) Montrer que les normes N_2 et N_∞ sont équivalentes sur H.

3) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ il existe un unique $g_x \in H$ tel que

$$f(x) = \langle f, g_x \rangle = \int_0^1 f(t) g_x(t) dt,\ \forall f \in H.$$

Vérifier que $N_2(g_x) \leq A$ où $A > 0$ est telle que $N_\infty \leq A N_2$ sur H.

4) Soit (f_j) une base hilbertienne de H. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$,

$$\sum_j |f_j(x)|^2 \leq A^2$$

et en déduire que H est de dimension finie.

Exercice 51 *Soit (K,d) un espace métrique compact et $E := \mathcal{C}^0(K,\mathbb{R}^n)$ muni de la norme $N_\infty(f) = \sup_{x\in K} ||f(x)||$. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé qui est constitué de fonctions hölderiennes.*

1) Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que toutes les fonctions de E sont α-hölderiennes et qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\forall f \in E, \forall x, y \in K,\ \ \frac{||f(x) - f(y)||}{d(x,y)^\alpha} \leq C N_\infty(f).$$

2) En déduire que E est de dimension finie.

Chapitre 3

Espaces de fonctions holomorphes

L'objectif de ce court chapitre est de compléter brièvement le module d'Analyse complexe que vous avez suivi en Licence, en insistant sur les questions de topologie. Nous en profitons également pour décrire (enfin !) des exemples d'espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$, ce qui vous permettra de vous rendre compte des petites modifications à apporter aux exemples et énoncés vus jusqu'ici pour les faire fonctionner sur $\mathbb{C}$.

3.1 Rappels sur les fonctions holomorphes

3.1.1 Fonctions D.S.E

Définition 3.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction lisse, $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$. On dit que f est développable en série entière (D.S.E.) en $x_0 \in I$ si la série de Taylor*

$$ST_{f,x_0}(x) = \sum_{j \geq 0} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j\,!}(x - x_0)^j$$

admet un rayon de convergence (strictement) positif et coincide avec f au voisinage de x_0. On note

$$\mathcal{C}^\omega(I, \mathbb{R})$$

l'ensemble des fonctions D.S.E. au voisinage de chaque point $x_0 \in I$.

On dit également que les fonctions de $\mathcal{C}^\omega(I, \mathbb{R})$ sont analytiques (réelles).

Exemple 3.2 *Beaucoup de fonctions "usuelles" sont D.S.E, c'est le cas par exemple de l'exponentielle $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x \in \mathbb{R}$. On vérifie en effet aisément que*

$$ST_{f,0}(x) = \sum_{j \geq 0} \frac{1}{j\,!} x^j$$

admet un rayon de convergence infini et satisfait l'équation différentielle $y' = y$ avec condition initiale $y(0) = 1$. Elle coincide donc avec f.

Une méthode alternative et systématique pour montrer qu'une fonction est D.S.E. est d'utiliser une formule de Taylor avec reste (par exemple intégral, la connaissez vous ? !), et de montrer que le reste tend vers zéro lorsque l'ordre tend vers l'infini.

Exemple 3.3 *La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et*

$$f(x) = \exp(-1/x^2) \text{ si } x \neq 0$$

est lisse. Sa série de Taylor en zéro est identiquement nulle (le rayon de convergence est donc strictement positif et même infini !) mais ne coincide pas avec f hors de zéro : cette fonction n'est donc pas D.S.E. en zéro.

Exemple 3.4 *La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{\cos(2^n x)}{n\,!}$$

est une fonction lisse, dont la série de Taylor en zéro a un rayon de convergence nul, elle n'est donc pas D.S.E. en zéro.

3.1.2 Cauchy et Weierstrass

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un *domaine* (ouvert connexe non vide) et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (i.e. continûment différentiable en deux variables réelles). Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. le taux d'accroissement $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ admet une limite lorsque $z \to z_0$;
2. $\overline{\partial} f = 0$ (équation de Cauchy-Riemann [1]) ;
3. f est localement D.S.E. en z_0 (point de vue de Weierstrass) ;
4. f vérifie la formule de Cauchy : pour tout disque $D(a,r) \subset\subset \Omega$,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

1. Bernhard Riemann, 1826-1866, l'un des plus grands mathématiciens allemands.

Observons que (1) et (2) sont clairement équivalentes et indiquent toutes deux que la différentielle Df est $\mathbb{C}$-linéaire. Le lecteur se convaincra facilement que (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2). Montrer que (1) (ou (2)) implique (4) constitue le coeur de la théorie de Cauchy : profitez de l'occasion pour revoir votre cours de L3 de fonctions holomorphes !

Weierstrass

Le *point de vue de Weierstrass* donne immédiatement que f est lisse et même analytique. Il permet d'obtenir également le *principe des zéros isolés.*

Proposition 3.5 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine. Une application holomorphe $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est soit constante, soit ouverte.*

Preuve. Soit $z_0 \in \Omega$, disons $z_0 = 0$ pour simplifier les notations. Soit les dérivées de f en $z_0 = 0$ s'annulent à tout ordre et alors f est constante, soit on peut trouver $m \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$f(z) = f(0) + z^m g(z)$$

où $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ est telle que $g(0) \neq 0$.

On peut définir localement (au voisinage de zéro) une branche du logarithme de g, i.e. définir h holomorphe au voisinage de zéro telle que $g(z) = \exp h(z)$. Considérons alors

$$\Phi(z) := z \exp(h(z)/m).$$

C'est une fonction holomorphe bien définie au voisinage de zéro, telle que $\Phi'(0) \neq 0$. Le théorème d'inversion locale garantit que Φ est un biholomorphisme local en zéro, en particulier, elle est ouverte. Du coup $g(z) = g(0) + (\Phi(z))^m$ est ouverte comme composée d'applications ouvertes. $\square$

Cauchy

La *formule de Cauchy* donne des informations précieuses sur les propriétés topologiques des sous-ensembles de $\mathcal{O}(\Omega)$. Soit $D = \{\zeta \in \mathbb{C} \,|\, |\zeta| < 1\}$ le disque unité et f une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{D}$, alors

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta}) d\theta}{e^{i\theta} - z},$$

pour tout $z \in D$, donc

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})d\theta}{(e^{i\theta} - z)^2}.$$

Fixons $0 < r < 1$ et $z \in D(0, r) \subset\subset D$. Il vient

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(e^{i\theta}|)d\theta}{(1 - r)^2},$$

d'où

$$\sup_{D(0,r)} |f'| \leq \frac{1}{(1 - r)^2} \sup_D |f|.$$

Nous laissons le lecteur obtenir une formule analogue pour deux cercles concentriques de centre et de rayons arbitraires. En recouvrant un compact $K \subset \Omega$ par un nombre de tels disques, on obtient ainsi la très utile

Proposition 3.6 *Soit K, L deux compacts de Ω tels que K est contenu dans l'intérieur de L. Il existe $C_{K,L} > 0$ telle que pour toute $f \in \mathcal{O}(\Omega)$,*

$$\sup_K |f'| \leq C_{K,L} \sup_L |f|.$$

Il s'agit là d'un résultat tout à fait remarquable. Connaissez vous une autre situation dans laquelle la norme de la dérivée est ainsi contrôlée par celle de la fonction ?! Nous allons en déduire plusieurs conséquences sur la topologie de $\mathcal{O}(\Omega)$.

3.2 Topologie sur $\mathcal{O}(\Omega)$

On munit $\mathcal{O}(\Omega)$ de la topologie induite par $\mathcal{C}^0(\Omega)$, i.e. la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de Ω. Si $(K_j)_j$ est une suite exhaustive de compacts de Ω tels que K_j est inclus dans l'intérieur de K_{j+1}, cette topologie est induite par la famille de semi-normes

$$p_j(f) = \sup_{K_j} |f|.$$

3.2.1 Théorème de Weierstrass

On commence par observer que $\mathcal{O}(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}^0(\Omega)$, c'est le théorème de Weierstrass :

Théorème 3.7 *Soit* $(f_n) \in \mathcal{O}(\Omega)^{\mathbb{N}}$ *une suite qui converge uniformément sur les compacts de* Ω *vers* $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$*. Alors* $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ *et de plus* $f^{(j)}$ *converge vers* $f^{(j)}$ *uniformément sur tout compact, à tout ordre* $j \in \mathbb{N}$*.*

Preuve. Vous pouvez passer à la limite dans la formule de Cauchy (ainsi que ses dérivées) et appliquer (plusieurs fois) la Proposition 3.6. □

3.2.2 Propriété de Montel

La propriété de Montel [2] donne un critère efficace de compacité pour les sous-ensembles de fonctions holomorphes :

Théorème 3.8 *Soit* $(f_n) \in \mathcal{O}(\Omega)^{\mathbb{N}}$ *une suite qui est bornée (i.e. uniformément bornée sur tout compact de* Ω*). Alors on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact.*

Preuve. Il résulte de la Proposition 3.6 que la suite (f_n) forme une famille équicontinue. Le théorème d'Arzela-Ascoli et le théorème de Weierstrass garantissent donc le résultat. □

Résumons les informations obtenues sur la topologie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{O}(\Omega)$:

Corollaire 3.9

1. $(\mathcal{O}(\Omega), \mathcal{T})$ *est un espace de Fréchet ;*
2. $(\mathcal{O}(\Omega), \mathcal{T})$ *a la propriété de Borel-Heine ;*
3. $(\mathcal{O}(\Omega), \mathcal{T})$ *n'est donc pas normable.*

3.3 Espaces de Bergman

Etant donné $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine, on note

$$\mathcal{B}(\Omega) := \mathcal{O}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$$

l'espace de Bergman [3] des fonctions holomorphes de carré intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue.

2. Paul Montel, 1876-1975, mathématicien français.
3. Stefan Bergman, 1895-1977, mathématicien polonais.

3.3.1 Topologie

On munit $\mathcal{B}(\Omega)$ de la topologie induite par $L^2(\Omega)$. D'une façon analogue à ce que nous avons observé précédemment pour la topologie induite par $\mathcal{C}^0(\Omega)$, il s'avère que $\mathcal{B}(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel fermé pour la topologie L^2. C'est une conséquence du contrôle suivant :

Proposition 3.10 *Soit K un compact et $f \in \mathcal{B}(\Omega)$. Alors*

$$\sup_K |f| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}\mathrm{dist}(\mathrm{K}, \partial\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Preuve. Soit $z \in K$ et $0 < r < \mathrm{dist}(\mathrm{K}, \partial\Omega)$. La formule de Cauchy montre que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) d\theta.$$

On multiplie par rdr et on intègre pour obtenir

$$f(z)\frac{t^2}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^t f(z + re^{i\theta}) r dr d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{D(z,t)} f dV.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique alors

$$|f(z)|\frac{t^2}{2} \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L^2(D(z,t))} \sqrt{\pi t^2},$$

d'où le résultat. □

On en déduit qu'une suite de fonctions de $\mathcal{B}(\Omega)$ qui converge dans $L^2(\Omega)$, converge également uniformément sur tout compact. Sa limite est donc dans $\mathcal{B}(\Omega)$, ce qui prouve le :

Corollaire 3.11 *L'espace $(\mathcal{B}(\Omega), \langle , \rangle)$ est un espace de Hilbert.*

Exemple 3.12 *Supposons que $\Omega = D$ est le disque unité. Toute fonction f holomorphe dans D se développe en série entière autour de zéro avec rayon de convergence ≥ 1 (pourquoi ?), ainsi*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n,$$

et

$$\int_D |f(z)|^2 dV(z) = \pi \sum_{n \geq 0} \frac{|a_n|^2}{(n+1)}$$

d'où

$$\mathcal{B}(D) = \left\{ f = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \mid \sum_{n\geq 0} \frac{|a_n|^2}{(n+1)} < +\infty \right\}.$$

Notons que les fonctions $e_n : z \in D \mapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n \in \mathbb{C}$ *forment une base hilbertienne de* $\mathcal{B}(D)$.

3.3.2 Noyau de Bergman

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine et $z \in \Omega$. Il résulte de la Proposition 3.10 que

$$\delta_z : f \in \mathcal{B}(\Omega) \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$$

est une forme linéaire continue. Le théorème de représentation de Riesz assure donc l'existence d'une unique fonction $K_z \in \mathcal{B}(\Omega)$ telle que

$$\langle f, K_z \rangle := \int_\Omega f(w)\overline{K_z(w)} dV(w) = f(z),$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{B}(\Omega)$.

Proposition 3.13 *On note* $K(z,w) := K_z(w)$.

1. $w \mapsto K(z,w) \in \mathcal{B}(\Omega)$ *et* $z \mapsto \overline{K(z,w)} \in \mathcal{B}(\Omega)$ *;*
2. $K(z,w) = \overline{K(w,z)}$, *pour tout* $z, w \in \Omega$ *;*
3. *Si* $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *est une base Hilbertienne de* $\mathcal{B}(\Omega)$, *alors*

$$K(z,w) = \sum_{j\geq 0} \overline{f_j(z)} f_j(w).$$

Exemple 3.14 *Le noyau de Bergman du disque unité est*

$$K(z,w) = \frac{1}{\pi(1-\overline{z}w)^2}.$$

3.4 Exercices

Exercice 52

1) Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x^2)$ *est dans* $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2) Justifier le caractère lisse de la fonction f *de l'Exemple 3.3.*
3) Mq la série de Taylor de l'Exemple 3.4 a un rayon de convergence nul.

Exercice 53 *Soit* Ω *un ouvert connexe de* $\mathbb{C}$ *et* $B(\Omega) := L^2(\Omega) \cap \mathcal{O}(\Omega)$*. Montrer que*

$$\delta_z : f \in B(\Omega) \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$$

est une forme linéaire continue et estimer $||\delta_z||$*.*

Exercice 54 *Soit* $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ *l'ensemble des fonctions entières (i.e. holomorphes sur* $\mathbb{C}$*), muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.*

1) Montrer que c'est un espace de Fréchet.

2) Montrer que les compacts de $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ *sont les fermés bornés.*

3) En déduire que cet espace n'est pas normable.

Exercice 55 *Soit* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe. On suppose que pour tout* $z \in \mathbb{C}$*, il existe* $n_z \in \mathbb{N}$ *tel que* $f^{(n_z)}(z) = 0$*.*

Montrer que f *est un polynôme.*

Exercice 56 *Démontrer les assertions de la Proposition 3.13.*

Exercice 57 *Calculer le noyau de Bergman du disque unité.*

Bibliographie

[Bourbaki] N.Bourbaki *Espaces vectoriels topologiques.* Hermann (1967).

[Brezis] H.Brezis *Analyse Fonctionnelle. Théorie et application.* Masson (1983). [Traduction en anglais et édité avec des exercices dans la collection Universitext de Springer en 2010]

[Dieudonne] J.Dieudonné *History of functional analysis.* North Holland (1981).

[Folland] G.B.Folland *Real analysis.*

[Rudin] W.Rudin *Functional analysis.* McGraw Hill (1974).