

# Dynamique de populations faisant face au réchauffement climatique

Morgane ALARY et Margot BAGES – L3 MAF

17 mai 2016

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Modèle logistique</b>	<b>3</b>
1.1	Dérivation du modèle . . . . .	3
1.2	Résolution . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Modèle de diffusion spatiale</b>	<b>5</b>
2.1	Marches aléatoires non corrélées . . . . .	5
2.2	Passage au continu . . . . .	6
2.3	Etude qualitative de l'équation de la chaleur . . . . .	6
2.3.1	Solution fondamentale . . . . .	7
2.3.2	Problème à valeur initiale . . . . .	7
2.3.3	Quelques propriétés des solutions . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Équation de réaction-diffusion</b>	<b>8</b>
3.1	Simplification du modèle . . . . .	8
3.2	Étude des points stationnaires . . . . .	9
3.2.1	Stabilité du point $(1,0)$ . . . . .	9
3.2.2	Stabilité du point $(0,0)$ . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Modèle de dynamique de populations faisant face au réchauffement climatique</b>	<b>15</b>
4.1	Modèle de réaction-diffusion . . . . .	15
4.2	Ondes solitaires. . . . .	16
4.3	Recollement des solutions . . . . .	17
4.4	Programme Matlab de modélisation . . . . .	19
4.5	Taille critique de la zone favorable . . . . .	21

# Introduction

Les modèles spatialisés de dynamique de population sont de plus en plus utilisés pour répondre à des questions à fort enjeu biologique et environnemental, comme la propagation des épidémies, la gestion des milieux agricoles et de la biodiversité ou encore la colonisation de nouveaux milieux par des espèces envahissantes. L'objectif principal de ce projet est l'étude de la dynamique de populations faisant face au réchauffement climatique. Nous commencerons par étudier l'évolution de la taille de la population au cours du temps (modèle logistique). Ensuite, nous nous intéresserons à des modèles spatialisés, qui prendront ainsi en compte l'aspect spatial des interactions entre les individus d'une population (équation de diffusion). Finalement, nous présenterons des modèles, dits modèles de réaction-diffusion, décrivant la survie de la population face au réchauffement climatique.

# Chapitre 1

## Modèle logistique

Nous cherchons d'abord à décrire l'évolution de la taille d'une population  $N(t)$  au cours du temps  $t > 0$ , à partir de la taille initiale de la population  $N(0) = N_0 \geq 0$ . Nous supposons que les variations de population sont dues uniquement au taux de mortalité et au taux de natalité. La seule variable est le temps, et on suppose que chaque individu interagit avec tous les autres.

### 1.1 Dérivation du modèle

Soit  $N(t)$  la taille de la population à l'instant  $t$ , avec la condition initiale  $N(0) = N_0$ . Soient  $n$  le nombre de naissances par unité de temps (supposé constant) et  $m$  le nombre de morts par unité de temps (supposé constant). Sur un intervalle de temps  $\delta t$ , l'accroissement de la population est

$$N(t + \delta t) - N(t) = (n - m)\delta t.$$

On suppose désormais que le nombre de naissances est proportionnel à la taille de la population avec taux de natalité  $a > 0$  et que le nombre de morts est aussi proportionnel à la taille de la population avec taux de mortalité qui augmente linéairement avec la taille de la population. On a alors, en notant  $n(t)$  le nombre de naissances à l'instant  $t$ ,  $m(t)$  le nombre de morts à l'instant  $t$ , et  $N(t)$  la taille de la population à l'instant  $t$ ,

$$\begin{cases} n(t) = aN(t), \\ m(t) = (b_0 + b_1N(t))N(t), \end{cases}$$

d'où

$$\frac{N(t + \delta t) - N(t)}{\delta t} = (a - b_0)N(t) - b_1N(t)^2.$$

En passant à la limite lorsque  $\delta t \rightarrow 0$ , on obtient finalement le système :

$$\begin{cases} N'(t) = f(N(t)), & t > 0, \\ N(0) = N_0 \geq 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

où

$$f(x) := (a - b_0)x - b_1x^2 = \alpha x \left(1 - \frac{x}{k}\right),$$

avec  $\alpha = a - b_0$  et  $k = \frac{a-b_0}{b_1}$ .

## 1.2 Résolution

On suppose  $b_1 > 0, a > b_0$ .

- Si  $N_0 = 0$  ou  $k$ , la population est constante au cours du temps. 0 et  $k$  sont les deux points d'équilibre.
- Si  $0 < N_0 < k$ , d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, les trajectoires ne se coupant pas, on a  $\forall t > 0, 0 < N(t) < k$ . Donc  $\forall t > 0, 0 < N'(t)$ . La population croît au cours du temps et converge vers le point d'équilibre  $k$ .
- De même, si  $N_0 > k$ , alors  $\forall t > 0, N'(t) < 0$ . La population décroît au cours du temps et converge vers le point d'équilibre  $k$ .

On peut également résoudre explicitement (1.1). On pose  $Y = \frac{1}{N}$ . On a alors  $Y' = \frac{-N'}{N^2}$ . L'équation (1.1) devient alors  $Y' = -(a - b_0)Y + b_1$ , dont la solution est  $Y(t) = \frac{1}{k} + ce^{-(a-b_0)t}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , avec  $k = \frac{a-b_0}{b_1}$ . On a donc  $N(t) = \frac{1}{\frac{1}{k} + ce^{-(a-b_0)t}}$ . On détermine la constante  $c$  avec la condition initiale  $N(0) = N_0$ . On obtient finalement

$$N(t) = \frac{1}{\frac{1}{k} + \left(\frac{1}{N_0} - \frac{1}{k}\right)e^{-(a-b_0)t}}.$$

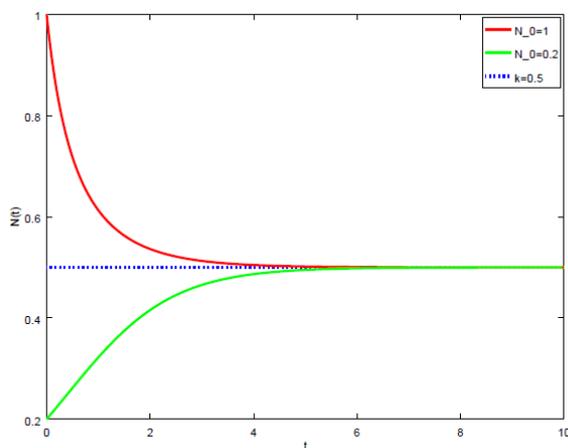


FIGURE 1.1 – *Tracé des solutions.*

## Chapitre 2

# Modèle de diffusion spatiale

On souhaite désormais prendre en compte l'aspect spatial des interactions entre les individus de la population. On introduit pour cela une deuxième variable  $x$  qui représente l'espace, et la quantité modélisée  $u(t, x)$  représente la densité de la population à l'instant  $t$  et au point  $x$ . La dispersion des individus au cours du temps est décrite par une équation aux dérivées partielles appelée équation de diffusion.

### 2.1 Marches aléatoires non corrélées

On se place au début dans un espace discret (un réseau). Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on note  $p_n(t)$  la probabilité de trouver un individu au point  $n$  et à l'instant  $t$ . On va faire l'hypothèse, qu'à chaque itération en temps, l'individu se déplace à gauche ou à droite d'une distance 1 sur le réseau avec la même probabilité  $\beta > 0$  et reste sur place avec une probabilité  $1 - 2\beta$ . On a alors :

$$p_n(t + \delta t) = (1 - 2\beta)p_n(t) + \beta(p_{n-1}(t) + p_{n+1}(t)),$$

qui peut se réécrire :

$$p_n(t + \delta t) - p_n(t) = \beta(-2p_n(t) + p_{n-1}(t) + p_{n+1}(t)).$$

On en déduit donc que

$$\frac{p_n(t + \delta t) - p_n(t)}{\delta t} = \frac{\beta}{\delta t}(p_{n+1}(t) - 2p_n(t) + p_{n-1}(t)).$$

Pour  $\beta$  assez petit,  $\frac{\beta}{\delta t} = \text{constante}$ . On pose  $\beta' = \frac{\beta}{\delta t}$ , c'est-à-dire  $\beta = \beta'\delta t$ . En passant à la limite lorsque  $\delta t \rightarrow 0$ , on obtient :

$$p'_n(t) = \beta'(p_{n+1}(t) - 2p_n(t) + p_{n-1}(t)).$$

## 2.2 Passage au continu

On introduit  $q(t, x)$  qui représente la densité de la population où  $x$  correspond à la position de l'individu dans l'espace continu  $\mathbb{R}$ . On fait à nouveau l'hypothèse, qu'à chaque itération en temps, l'individu se déplace à gauche ou à droite d'une distance  $\delta x$  dans l'espace avec la même probabilité  $\beta > 0$  et reste sur place avec une probabilité  $1 - 2\beta$ . On a alors :

$$q(t + \delta t, x) = \beta q(t, x - \delta x) + \beta q(t, x + \delta x) + (1 - 2\beta)q(t, x).$$

En réarrangeant les termes, on obtient :

$$q(t + \delta t, x) - q(t, x) = \beta(q(t, x - \delta x) + q(t, x + \delta x) - 2q(t, x)). \quad (2.1)$$

Or, en faisant des développements de Taylor à l'ordre 1 ou 2, on obtient

$$\begin{aligned} q(t + \delta t, x) &= q(t, x) + \delta t \frac{\partial q}{\partial t}(t, x) + o(\delta t), \\ q(t, x - \delta x) &= q(t, x) - (\delta x) \frac{\partial q}{\partial x}(t, x) + \frac{(\delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}(t, x) + o((\delta x)^2), \\ q(t, x + \delta x) &= q(t, x) + (\delta x) \frac{\partial q}{\partial x}(t, x) + \frac{(\delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}(t, x) + o((\delta x)^2). \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation (2.1) devient

$$\frac{\partial q}{\partial t}(t, x) = \beta \frac{(\delta x)^2}{\delta t} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}(t, x) + o\left(\frac{(\delta x)^2}{\delta t}\right).$$

On suppose  $(\delta x)^2 \sim \delta t$  et on note

$$d := \lim_{\substack{(\delta x)^2 \rightarrow 0 \\ \delta t \rightarrow 0}} \beta \frac{(\delta x)^2}{\delta t}.$$

D'où

$$\frac{\partial q}{\partial t}(t, x) = d \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}(t, x) + o(1).$$

Par passage à la limite, on obtient finalement

$$\boxed{\frac{\partial q}{\partial t}(t, x) = d \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}(t, x),} \quad (2.2)$$

pour  $t > 0$  et  $x \in \mathbb{R}$ .

## 2.3 Etude qualitative de l'équation de la chaleur

L'équation (2.2) est appelée l'équation de la chaleur. Dans la suite, on prendra toujours  $d = 1$  pour simplifier les calculs.

### 2.3.1 Solution fondamentale

On cherche tout d'abord à résoudre l'équation (2.2) avec une condition initiale de type masse de Dirac, c'est à dire, on cherche la solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = \delta(x), \end{cases} \quad (2.3)$$

où  $\delta(x)$  est la masse de Dirac en zéro telle que  $\mathcal{F}(\delta)(\ell) = 1$  et  $\mathcal{F}$  est la transformée de Fourier définie par

$$\mathcal{F}(u)(\ell) := \int_{\mathbb{R}} u(x)e^{-i\ell x} dx, \quad \ell \in \mathbb{R}.$$

En prenant la transformée de Fourier dans (2.3), on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{F}(u)}{\partial t}(t, \ell) = -\ell^2 \mathcal{F}(u)(t, \ell), & t > 0, \quad \ell \in \mathbb{R}, \\ \mathcal{F}(u)(0, \ell) = 1. \end{cases}$$

On obtient donc que

$$\mathcal{F}(u)(t, \ell) = e^{-\ell^2 t}, \quad t > 0 \text{ et } \ell \in \mathbb{R}$$

et en prenant la transformée de Fourier inverse, on trouve

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\ell^2 t} e^{i\ell x} d\ell = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

On appelle cette solution, la solution fondamentale de l'équation de la chaleur et dans la suite on notera

$$\phi(t, x) = \phi_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Celle-ci est normalisée de telle façon que pour tout  $t > 0$ , on ait  $\int_{\mathbb{R}} \phi(t, x) dx = 1$ .

### 2.3.2 Problème à valeur initiale

On considère le problème de Cauchy suivant pour une donnée initiale  $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x), & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.4)$$

En utilisant de nouveau la transformée de Fourier de  $u$ , solution de l'équation de la chaleur, on obtient

$$u(t, x) = \phi_t * u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} u_0(y) dy.$$

### 2.3.3 Quelques propriétés des solutions

En utilisant le théorème de dérivation sous le signe intégrale, on vérifie que

- $u \in \mathcal{C}^\infty(]0, \infty[ \times \mathbb{R})$ ,
- $u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \phi(t, x - y) u_0(y) dy$  est solution de (2.4).

De plus, avec le théorème de convergence dominée, on obtient

- pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$ , on a  $\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x_0) = u_0(x_0)$ .

## Chapitre 3

# Équation de réaction-diffusion

L'intérêt de ce 3<sup>me</sup> chapitre est de constater l'influence de différents paramètres sur la persistance ou l'extinction de l'espèce à travers l'étude de l'équation de réaction-diffusion. Celle-ci regroupe une partie réaction, notée  $f(u(t, x))$ , que nous avons étudiée dans la partie logistique, et une partie diffusion, notée  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$ , et qui provient de l'équation de la chaleur, vue dans le chapitre précédent.

On la note ainsi :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + f(u(t, x)) \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

avec

$$f(u) := \alpha u \left(1 - \frac{u}{\kappa}\right)$$

et on prendra  $\kappa = 1$  pour simplifier les calculs.

### 3.1 Simplification du modèle

Pour la suite, nous poserons  $u(t, x) = U(x - ct) = U(\xi)$  afin d'obtenir une équation ne dépendant que d'un seul paramètre  $\xi$  qui représente à la fois l'espace et le temps, et où  $c$  est la vitesse de propagation du front. On obtient ainsi,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{dU}{d\xi}(\xi) = -c \frac{dU}{d\xi}(\xi)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{dU}{d\xi}(\xi) = \frac{dU}{d\xi}(\xi)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{d^2 U}{d\xi^2}(\xi) = \frac{d^2 U}{d\xi^2}(\xi)$$

La nouvelle équation différentielle en  $U(\xi)$  est :

$$-c \frac{dU}{d\xi}(\xi) = \frac{d^2 U}{d\xi^2}(\xi) + f(U(\xi)) \quad (3.2)$$

Le but sera, par la suite, de résoudre cette équation différentielle. Nous nous intéresserons, pour cela, aux solutions qui vérifient :

$$\begin{cases} \lim_{\xi \rightarrow -\infty} U(\xi) = 1 \\ \lim_{\xi \rightarrow +\infty} U(\xi) = 0 \\ U'(\xi) < 0 \end{cases}$$

On pose maintenant

$$V = \frac{dU}{d\xi}$$

Alors,

$$\frac{dV}{d\xi} = \frac{d^2U}{d\xi^2}$$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} U' = V \\ V' = U'' = -cV - f(U) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U' = V \\ V' = -cV - \alpha U(1 - U) \end{cases}$$

Cherchons les points stationnaires de ce système, c'est-à-dire  $(U_0, V_0)$  tel que :

$$\begin{cases} U'_0 = 0 \\ V'_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_0 = 0 \\ -cV_0 - \alpha U_0(1 - U_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_0 = 0 \\ -\alpha U_0(1 - U_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_0 = 0 \\ U_0 = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} V_0 = 0 \\ U_0 = 1 \end{cases}$$

On a deux points stationnaires :  $(0, 0)$  et  $(1, 0)$ .

## 3.2 Étude des points stationnaires

### 3.2.1 Stabilité du point $(1, 0)$

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & -c \end{pmatrix}$  la matrice jacobienne associée au système en  $(1, 0)$ . Son polynôme caractéristique est  $P_A(\lambda) = \lambda^2 + c\lambda - \alpha$  et ses valeurs propres sont :

$$\lambda_+ = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 4\alpha}}{2}$$

et

$$\lambda_- = \frac{-c - \sqrt{c^2 + 4\alpha}}{2}$$

Pour  $c \geq 0$  et  $\alpha > 0$  on a  $\sqrt{c^2 + 4\alpha} > \sqrt{c^2}$  donc  $\lambda_+ > 0$  et  $\lambda_- < 0$ . Le point  $(1, 0)$  est instable.

Les deux racines sont distinctes donc  $A$  est diagonalisable et il existe  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  tel que  $A = PDP^{-1}$ . On obtient le vecteur propre associé à  $\lambda_+$  qui est  $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_+ \end{pmatrix} = \omega_+$ .

De même, le vecteur propre associé à  $\lambda_-$  est  $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_- \end{pmatrix} = \omega_-$ .

Ainsi on a obtenu  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_+ & \lambda_- \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{\lambda_- - \lambda_+} \begin{pmatrix} \lambda_- & -1 \\ -\lambda_+ & 1 \end{pmatrix}$

On avait,

$$\frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} U(\xi) \\ V(\xi) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} U(\xi) \\ V(\xi) \end{pmatrix}$$

puis,

$$\frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} U(\xi) \\ V(\xi) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} U(\xi) \\ V(\xi) \end{pmatrix}$$

et enfin,

$$\frac{d}{d\xi} P^{-1} \begin{pmatrix} U(\xi) \\ V(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} U(\xi) \\ V(\xi) \end{pmatrix}$$

On pose  $P^{-1} \begin{pmatrix} U(\xi) \\ V(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(\xi) \\ Y(\xi) \end{pmatrix}$  et on se ramène au problème suivant :

$$\frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} X(\xi) \\ Y(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(\xi) \\ Y(\xi) \end{pmatrix}$$

La solution de cette équation différentielle est connue, elle se présente sous la forme :

$$\begin{pmatrix} X(\xi) \\ Y(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 e^{\lambda_+ \xi} \\ Y_0 e^{\lambda_- \xi} \end{pmatrix}$$

Où  $\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix}$ . Ainsi,

$$\begin{pmatrix} U(\xi) \\ V(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 e^{\lambda_+ \xi} + Y_0 e^{\lambda_- \xi} \\ X_0 \lambda_+ e^{\lambda_+ \xi} + Y_0 \lambda_- e^{\lambda_- \xi} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

On peut écrire aussi  $\begin{pmatrix} U(\xi) \\ V(\xi) \end{pmatrix} = X_0 e^{\lambda_+ \xi} \omega_+ + Y_0 e^{\lambda_- \xi} \omega_-$ .

On a convergence vers le point d'équilibre  $(1, 0)$  suivant la direction  $\omega_-$  et divergence suivant la direction du vecteur  $\omega_+$ . Il s'agit d'un point selle.

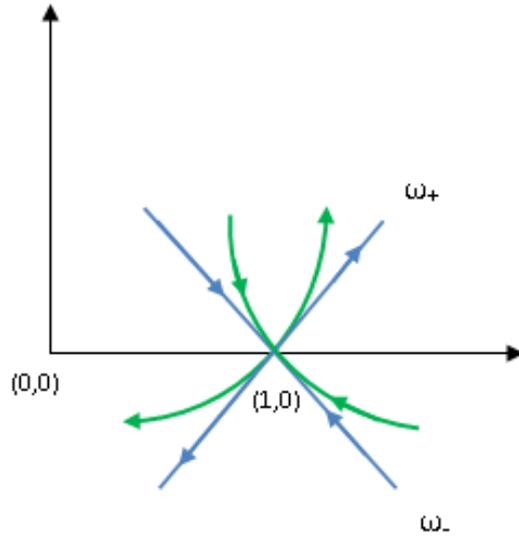


FIGURE 3.1 – Trajectoire de la solution au voisinage du point  $(1,0)$ .

### 3.2.2 Stabilité du point $(0,0)$

Soit  $B$  la matrice jacobienne associée au système en  $(0,0)$ .  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -c \end{pmatrix}$  et son polynôme caractéristique est  $P_B(\lambda) = \lambda^2 + c\lambda + \alpha$ . On calcule son discriminant  $\Delta_B = c^2 - 4\alpha$

1<sup>er</sup> cas : si  $c < 2\sqrt{\alpha}$

Si  $c < 2\sqrt{\alpha}$ , alors  $c^2 - 4\alpha < 0$  avec  $\alpha > 0$ . Cela implique que  $P_B(\lambda)$  admet deux racines complexes conjuguées :

$$\lambda_+ = \frac{-c + i\sqrt{4\alpha - c^2}}{2}$$

et

$$\lambda_- = \frac{-c - i\sqrt{4\alpha - c^2}}{2}$$

On pose  $\alpha = \frac{-c}{2}$  et  $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{4\alpha - c^2}$ , alors  $\lambda_+ = \alpha + i\beta$  et  $\lambda_- = \alpha - i\beta$ .

Il existe une base dans laquelle,  $B = P\Gamma P^{-1}$  où  $P$  est inversible et  $\Gamma = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$  avec  $\alpha \neq 0$ .

L'équation

$$\begin{pmatrix} U'(\xi) \\ V'(\xi) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} U(\xi) \\ V(\xi) \end{pmatrix}$$

devient

$$\begin{pmatrix} U'(\xi) \\ V'(\xi) \end{pmatrix} = P\Gamma P^{-1} \begin{pmatrix} U(\xi) \\ V(\xi) \end{pmatrix}$$

et ainsi

$$P^{-1} \begin{pmatrix} U'(\xi) \\ V'(\xi) \end{pmatrix} = \Gamma P^{-1} \begin{pmatrix} U(\xi) \\ V(\xi) \end{pmatrix}$$

On pose  $P^{-1} \begin{pmatrix} U(\xi) \\ V(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(\xi) \\ Y(\xi) \end{pmatrix}$  et on se ramène au problème suivant :

$$\begin{pmatrix} X'(\xi) \\ Y'(\xi) \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} X(\xi) \\ Y(\xi) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

La solution de ce type d'équation est connue :

$$\begin{pmatrix} X(\xi) \\ Y(\xi) \end{pmatrix} = e^{\xi\Gamma} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

On calcule  $e^{\xi\Gamma} = \begin{pmatrix} \cos(\beta\xi) & -\sin(\beta\xi) \\ \sin(\beta\xi) & \cos(\beta\xi) \end{pmatrix} e^{\alpha\xi}$  d'où  $\begin{pmatrix} U(\xi) \\ V(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha\xi}(X_0 \cos(\beta\xi) - Y_0 \sin(\beta\xi)) \\ e^{\alpha\xi}(X_0 \sin(\beta\xi) + Y_0 \cos(\beta\xi)) \end{pmatrix}$ .

Soit  $\varphi$  l'angle tel que  $\cos(\varphi) = \frac{X_0}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}}$  et  $\sin(\varphi) = \frac{Y_0}{\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}}$ . Alors,

$$\begin{cases} U(\xi) = e^{\alpha\xi} \sqrt{X_0^2 + Y_0^2} \cos(\beta\xi - \varphi) \\ V(\xi) = e^{\alpha\xi} \sqrt{X_0^2 + Y_0^2} \sin(\beta\xi - \varphi) \end{cases} \quad (3.6)$$

La trajectoire a donc une allure de spirale. Comme  $\alpha < 0$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$  on s'approche de  $(0, 0)$ .

On applique le changement de base pour se ramener à la trajectoire de  $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ . On a un foyer spiral attractif.

En recollant les deux graphiques, on obtient le schéma suivant :

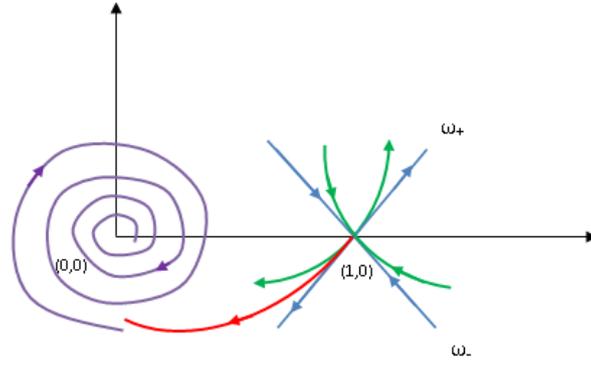


FIGURE 3.2 – Trajectoires de la solution au voisinage des points  $(1, 0)$  et  $(0, 0)$ .

Ce type de solution n'est pas monotone. Or on cherche  $U(\xi)$  telle que  $\forall \xi \in \mathbb{R}, U'(\xi) < 0$  donc les racines ne peuvent pas être complexes  $\Rightarrow c \geq 2\sqrt{\alpha}$  et les racines sont réelles.

**2<sup>me</sup> cas : si  $c \geq 2\sqrt{\alpha}$**

Si  $c \geq 2\sqrt{\alpha}$ , alors  $c^2 - 4\alpha \geq 0$  avec  $\alpha > 0$ .  $P_B(\lambda)$  admet donc deux racines réelles (voire une double si  $c = 2\sqrt{\alpha}$ ). Les valeurs propres sont :

$$\lambda_+ = \frac{-c + \sqrt{4\alpha - c^2}}{2}$$

et

$$\lambda_- = \frac{-c - \sqrt{4\alpha - c^2}}{2}$$

avec  $\alpha > 0$  et  $c \geq 0$ .

On a ainsi  $\sqrt{c^2 - 4\alpha} < \sqrt{c^2} \Rightarrow \lambda_- < \lambda_+ < 0 \Rightarrow$  le point d'équilibre  $(0, 0)$  est stable.

Dans le cas où  $c \neq 2\sqrt{\alpha}$ , on diagonalise B à partir de ses deux racines distinctes et on trouve :

$$\begin{pmatrix} U(\xi) \\ V(\xi) \end{pmatrix} = X_0 e^{\lambda_+ \xi} \omega_+ + Y_0 e^{\lambda_- \xi} \omega_-$$

avec  $\omega_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_+ \end{pmatrix}$  et  $\omega_- = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_- \end{pmatrix}$ .

On a  $\lambda_- < \lambda_+ < 0$  mais  $|\lambda_-| > |\lambda_+|$  donc la convergence vers  $(0, 0)$  est plus rapide selon  $\omega_-$ .

Il n'y a qu'une seule trajectoire, sur un voisinage de  $(1, 0)$  qui vérifie  $V < 0$  et qui converge vers  $(1, 0)$  en  $-\infty$ , de plus cette trajectoire converge vers  $(0, 0)$  en  $+\infty$  selon la direction  $\omega_-$  tout en vérifiant  $U' < 0$ .

En particulier pour  $c = 2\sqrt{\alpha}$  on a  $\lambda = \frac{-c}{2}$ . On se retrouve avec une équation différentielle d'ordre 2 en fonction de V à résoudre :

$$\frac{d^2 V}{d\xi^2} + c \frac{dV}{d\xi} + \frac{c^2}{4} V = 0 \quad (3.7)$$

Une fois les calculs effectués on trouve :

$$V_1(\xi) = \xi e^{-\frac{c}{2}\xi} \text{ et } V_2(\xi) = e^{-\frac{c}{2}\xi}.$$

$V_1$  et  $V_2$  sont libres et ils génèrent un espace vectoriel de dimension 2 donc

$$V(\xi) = AV_1(\xi) + BV_2(\xi) = A\xi e^{-\frac{c}{2}\xi} + B e^{-\frac{c}{2}\xi}$$

En intégrant  $V$  on trouve  $U$  :

$$U(\xi) = -\frac{2}{c} e^{-\frac{c}{2}\xi} \left( A\xi - \frac{2}{c}A + B \right) \quad (3.8)$$

Ainsi quand  $\xi \rightarrow +\infty$ ,  $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$  converge vers  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et quand  $\xi \rightarrow -\infty$ ,  $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$  s'éloigne de  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et part en  $\infty$ .

On obtient alors le graphe suivant en recollant les deux solutions obtenues en  $(0, 1)$  et  $(0, 0)$ .

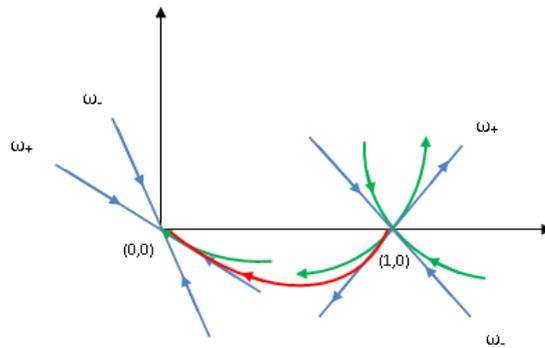


FIGURE 3.3 – Trajectoires de la solution issue du point  $(1, 0)$ .

## Chapitre 4

# Modèle de dynamique de populations faisant face au réchauffement climatique

Dans cette dernière partie, nous tenterons de faire un lien entre les différentes équations résolues dans les parties précédentes, le but étant de proposer un modèle simple de dynamique de populations faisant face au réchauffement climatique.

### 4.1 Modèle de réaction-diffusion

La densité de population étudiée dans la partie 1 représente le terme de réaction à l'intérieur de la zone favorable. A l'extérieur de cette zone, la population ne peut survivre et meurt, le terme de réaction devient alors  $f(u) = -u$ . La diffusion reste la même dans et en dehors de la zone favorable, elle est issue de l'expérience de la marche aléatoire de la partie 2.

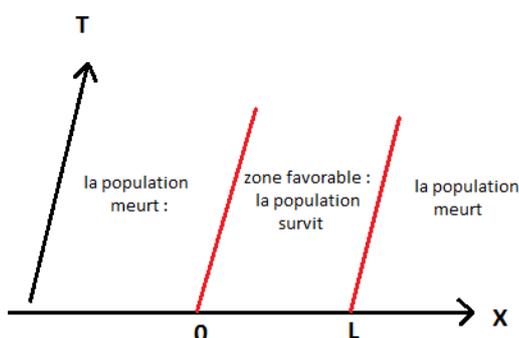


FIGURE 4.1 – *Survie de la population en fonction de sa position dans l'espace.*

La zone favorable se présente sous la forme d'un territoire de longueur  $L$  qui se déplace à la vitesse  $v$ . A l'instant  $t$ , elle est représentée par le segment  $[l_1(t), l_2(t)]$  avec  $\forall t > 0, l_2(t) - l_1(t) = L$ . On pose  $l_1(t) = vt$  et  $l_2(t) = vt + L$  et  $\xi = x - vt$ .

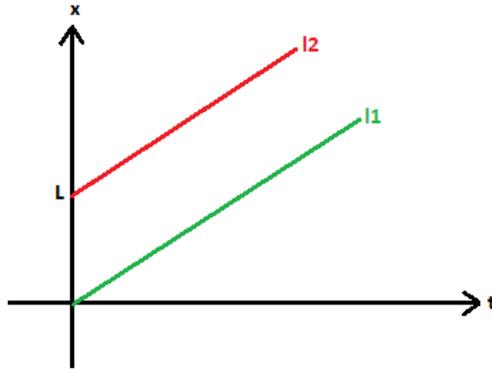


FIGURE 4.2 – Déplacement de la zone favorable en fonction du temps.

Si  $x$  appartient à la zone favorable,  $x \in [vt, vt+L] \Leftrightarrow vt \leq x \leq vt+L \Leftrightarrow 0 \leq x-vt \leq L \Leftrightarrow 0 \leq \xi \leq L$ .

On peut ainsi modéliser le terme de réaction par :

$$F(U, \xi) = \begin{cases} f(U(\xi)) & \text{si } \xi \in [0, L] \\ -U(\xi) & \text{sinon.} \end{cases}$$

où  $f(U) = U(1 - U)$  comme défini précédemment.

## 4.2 Ondes solitaires.

On cherche des solutions positives sous la forme  $u(t, x) = W(x - vt)$  de l'équation de réaction-diffusion

$$\partial_t u = \partial_{xx} u + F(u, x - vt) \tag{4.1}$$

On souhaite également que la solution  $W$  vérifie :

$$\begin{cases} W > 0 \\ \lim_{\xi \rightarrow +\infty} W(\xi) = 0 \\ \lim_{\xi \rightarrow -\infty} W(\xi) = 0 \end{cases}$$

Pour  $\xi \in [0, L]$ , l'équation (4.1) devient  $-vW' = W'' + f(W(\xi)) \Leftrightarrow W'' + vW' + f(W(\xi)) = 0$ . L'étude de cette zone a été faite dans la partie 3.

Pour  $\xi \in ]-\infty; 0[ \cup ]L; +\infty[$ , l'équation (4.1) devient  $-vW' = W'' - W \Leftrightarrow W'' + vW' - W = 0$ . On pose  $Z = W'$ , et on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} W' = Z \\ Z' + vZ - W = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} W' = Z \\ Z' = W - vZ \end{cases}$$

La matrice du système est  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -v \end{pmatrix}$  tel que  $\begin{pmatrix} W' \\ Z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} W \\ Z \end{pmatrix}$

Les points d'équilibre du système sont :

$$\begin{cases} W' = 0 \\ Z' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z = 0 \\ W - vZ = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z = 0 \\ W = 0 \end{cases}$$

$(0, 0)$  est le seul point d'équilibre du système. La jacobienne en  $(0, 0)$  est la matrice  $A$ . On veut diagonaliser  $A$ . Son polynôme caractéristique est  $P_A(X) = X^2 + vX - 1 = (X - r_1)(X - r_2)$  avec

$$r_1 = \frac{-v - \sqrt{v^2 + 4}}{2} < 0$$

et

$$r_2 = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 4}}{2} > 0$$

Ainsi  $A = PDP^{-1}$  avec  $D = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$

Le vecteur propre associé à la valeur propre  $r_1$  est  $V_{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \end{pmatrix}$ . De même  $V_{r_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix}$  est le vecteur propre associé à la valeur propre  $r_2$ .

Ainsi, on a obtenu  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix}$ . Les solutions obtenues sont :

$$\begin{pmatrix} W(\xi) \\ Z(\xi) \end{pmatrix} = W_0 e^{r_1 \xi} \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \end{pmatrix} + Z_0 e^{r_2 \xi} \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

### 4.3 Recollement des solutions

On souhaite recoller cette solution avec la solution trouvée dans la zone  $[0, L]$ .

**Si  $v \geq 2$**

Pour  $\xi \in [0, L]$  on a (cf les notations de la partie 3) :

$$\begin{pmatrix} U(\xi) \\ V(\xi) \end{pmatrix} = X_0 e^{\lambda_+ \xi} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_+ \end{pmatrix} + Y_0 e^{\lambda_- \xi} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_- \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

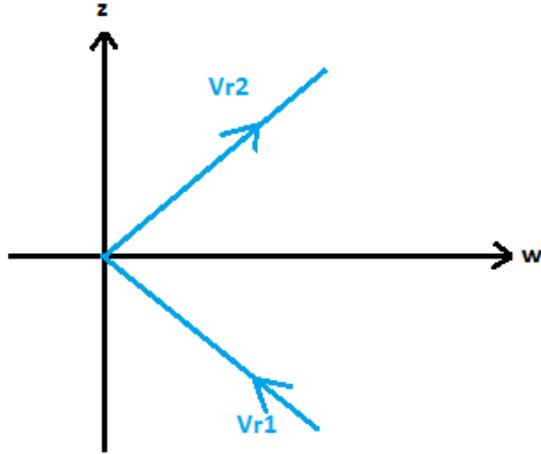


FIGURE 4.3 – Trajectoire de la solution au point  $(0, 0)$ .

et la solution sur  $] -\infty; 0[ \cup ] L, +\infty[$  est

$$\begin{pmatrix} W(\xi) \\ Z(\xi) \end{pmatrix} = W_0 e^{r_1 \xi} \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \end{pmatrix} + Z_0 e^{r_2 \xi} \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

On a  $|r_1| > |\lambda_-| > |\lambda_+|$ . La trajectoire solution (trouvée à l'étape 3)  $\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$  reste strictement au dessus de  $\omega_+$  et  $\omega_-$ . Elle ne peut donc pas se "recoller" à la trajectoire  $\begin{pmatrix} W \\ Z \end{pmatrix}$  qui est tangente au vecteur  $V_{r_1}$ . On ne peut donc pas trouver de solution sur  $\mathbb{R}$  non nulle.

**Si  $v < 2$**

On a une trajectoire elliptique autour de  $(0, 0)$  (trajectoire de la solution trouvée à l'étape 3). Cette trajectoire va donc forcément couper les deux vecteurs  $V_{r_1}$  et  $V_{r_2}$ . On peut donc recoller les deux solutions : la solution sur  $] -\infty, 0[$  avec celle sur  $[0, L]$  et celle sur  $[0, L]$  avec celle sur  $[L, +\infty[$ . On obtient ainsi une solution définie sur  $] -\infty, +\infty[$  et qui vérifie :

- dans la zone favorable  $[0, L]$  la population survit et croît normalement.
- en dehors de cette zone, la population ne peut pas survivre et meurt.

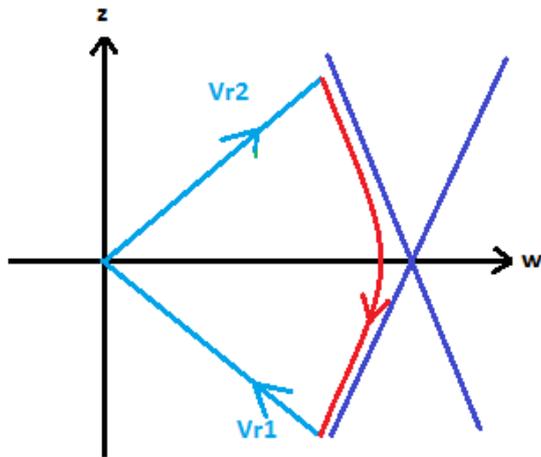


FIGURE 4.4 – Recollement des trajectoires obtenues en  $(0,0)$  et  $(1,0)$ .

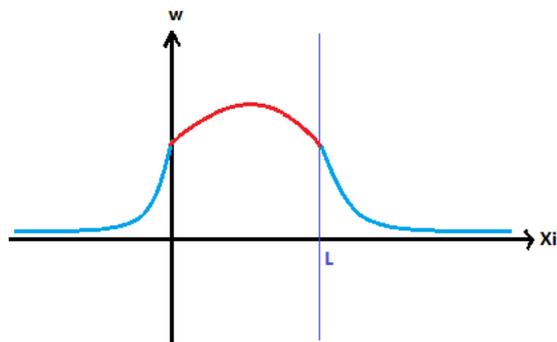


FIGURE 4.5 – Représentation de la densité de population en fonction de l'espace.

#### 4.4 Programme Matlab de modélisation

```

%%% On definit la taille du domaine en temps et en espace
Tf = 150;
L = 300;
l=20; % taille de la zone favorable
c=1; % vitesse du rechauffement climatique
%%% On se donne la discretisation que l'on veut
dx = 0.3;
dt = 0.1;

%%% Construction de la fonction f
f=@(u,y)u.*(1-u).*(0<=y).*(y<=l).-u.*(y<0).-u.*(l<y);

%%% On calcule la taille N et le vecteur x

```

```

N = floor(L/dx);
x = (0:dx:(N-1)*dx)'; % ecrit comme cela, on evite une boucle for

%%% Nouvelle condition initiale
m = 20;
U0 = [ones(m,1);zeros(N-m,1)];

%%% Construction de la matrice Laplacien
V1 = ones(1,N-1);
V2 = -2.*ones(1,N);
Lap = (1/dx^2)*(diag(V1,-1)+diag(V2)+diag(V1,1));

%%% Conditions au bord de Neumann
Lap(1,1) = -(1/dx)^2;
Lap(N,N) = -(1/dx)^2;

%%% On rend la matrice creuse
Lap = sparse(Lap);

%%% Construction puis inversion de la matrice A, l'inverse etant note R
A = speye(N)-dt*Lap; % il faut bien preciser eye(N)
[P,Q] = lu(A);

%%% Construction de U, avec U0 la condition initiale
U = U0;
t = 0;
nstep = 1;
nSaveStep = floor(1/dt);
figure(1)
while t<Tf
    t=t+dt;
    nstep = nstep+1;
    U=Q/(P/(U+dt*f(U,x-c*t)));
    if mod(nstep,nSaveStep)==0 % cela permet de n'afficher que quelques figures
        plot(x,U,'k','linewidth',2.5)
        axis([0 L min(U)-0.1 max(abs(U))+0.1])
        title(strcat('Time=' ,num2str(nstep*dt)),'fontsize',18)
        drawnow;
    end
end
end

```

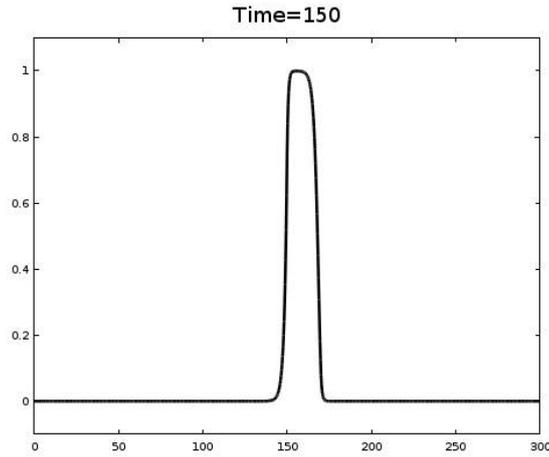


FIGURE 4.6 – Représentation de la solution sur Matlab.

## 4.5 Taille critique de la zone favorable

On cherche désormais la taille minimale de la zone favorable pour laquelle une telle solution existe. Il semble naturel, en effet, de penser que si la zone favorable est trop petite, la population ne peut survivre et donc meurt.

On suppose la taille  $L$  petite, et donc  $W$  petit. On a alors  $W^2 \ll W$ .

L'équation de réaction diffusion devient donc

$$\partial_t u = \partial_{xx} u + F(u, x - vt) \quad (4.4)$$

$$\text{où } F(U, \xi) = \begin{cases} U(\xi) & \text{si } \xi \in [0, L] \\ -U(\xi) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sur  $[0, L]$ , on a une solution  $W_1$  de la forme

$$W_1(\xi) = c_1 e^{\lambda + \xi} + \bar{c}_1 e^{\lambda - \xi}$$

Sur  $] -\infty; 0[ \cup ]L; +\infty[$ , on a une solution  $W_2$  de la forme

$$W_2(\xi) = \begin{cases} k_2 e^{r_2 \xi} & \text{si } \xi \in ] -\infty; 0[ \\ k_1 e^{r_1 \xi} & \text{si } \xi \in ]L; +\infty[ \end{cases}$$

Pour avoir une solution définie, continue et dérivable sur  $] -\infty; +\infty[$ , il faut que les solutions vérifient

$$\begin{cases} W_1(0) = W_2(0) \\ W_1(L) = W_2(L) \\ W_1'(0) = W_2'(0) \\ W_1'(L) = W_2'(L) \end{cases}$$

On impose de plus la condition de normalisation  $W_1(0) = 1$  pour avoir unicité de la solution.

En résolvant ce système, on obtient une taille critique  $L_{crit}$  telle que,

$$L_{crit} = \frac{2}{\sqrt{4 - c^2}} \arctan \left( \frac{-1}{c^2} \sqrt{(4 - c^2)(4 + c^2)} \right)$$

en dessous de laquelle on n'a plus de solution.

# CONCLUSION

Nous avons ainsi étudié et représenté les dynamiques de populations faisant face au réchauffement climatique. Après avoir analysé le comportement des populations en tenant compte uniquement des interactions entre les individus au cours du temps, nous avons spatialisé le problème pour mieux cerner l'impact de l'espace et des potentiels déplacements sur la survie des individus. En étudiant l'équation de la chaleur, nous avons soulevé l'importance de la vitesse du réchauffement climatique et notamment d'une certaine vitesse critique. A l'aide de modélisations, et en regroupant les diverses données, nous avons, finalement, dressé un modèle de dynamique de population faisant face au réchauffement climatique.

Ce projet a été fort enrichissant. Il nous a d'abord permis d'approfondir certaines notions déjà rencontrées, comme la théorie des équations différentielles ordinaires et les équations aux dérivées partielles, la résolution de problèmes d'analyse numérique et d'algèbre linéaire. Il a permis de comprendre et d'aller plus loin dans chacune de ces matières. Il nous a également permis de nous familiariser davantage avec les techniques de simulations numériques, ainsi qu'avec LaTeX. Mais au delà de l'aspect pratique, ce projet nous a surtout permis de nous ouvrir au monde des mathématiques appliquées, domaine qui nous était plutôt inconnu.

# REMERCIEMENTS

Nous souhaitons remercier Monsieur Grégory Faye pour son aide, son soutien et son investissement dans notre projet, ainsi que pour la patience dont il a fait preuve.

# Bibliographie

[1] L. ROQUES.

*Modèles de réaction-diffusion pour l'écologie spatiale.* Edition Quae.

[2] H. BERESTYCKI, O. DIEKMANN, C.J. NAGELKERKE, P.A. ZEGELING.

*Can a species keep pace with a shifting climate ?*

[3] G.R. WALTHER, E. POST, P. CONVEY, A. MENZEL, C. PARMESAN, T.J.C. BEEBEE,  
J.M. FROMENTIN, O. HOEGH-GULDBERG, F. BAIRLEIN.

*Ecological responses to recent climate change.* Macmillan Magazines Ltd, 2002.