TD 2

http://www-sop.inria.fr/members/Olivier.Faugeras/MVA/MMN11

---

1 Bifurcations en dimension 1

Exercice 1. Bifurcation noeud-col

On considère l'équation suivante:

$$\frac{du}{dt} = a\mu + bu^2.$$

Tracer un diagramme de bifurcation dans le plan (u, μ) pour différentes valeurs des paramètres a et b.

Exercice 2. Bifurcation fourche

On considère l'équation suivante:

$$\frac{du}{dt} = a\mu u + bu^3.$$

Tracer un diagramme de bifurcation dans le plan (u, μ) pour différentes valeurs des paramètres a et b.

Exercice 3. Bifurcation transcritique

On considère l'équation suivante:

$$\frac{du}{dt} = a\mu u + bu^2.$$

Tracer un diagramme de bifurcation dans le plan (u, μ) pour différentes valeurs des paramètres a et b.

2 Preuve du théorème de la variété centrale: existence/unicité

Le but de cette partie est de prouver la partie existence et unicité du théorème de la variété centrale. Pour cela, on a besoin d'un lemme qui se déduit de l'hypothèse 2.3 (sur la résolvante) du théorème de la variété centrale.

Lemme 1. Si l'hypothèse 2.3 est satisfaite alors pour tout $\eta \in [0, \gamma]$ et tout $f \in \mathcal{C}_\eta(\mathbb{R}, \mathcal{Y}_h)$ le problème linéaire

$$\frac{du_h}{dt} = \mathbf{L}_h u_h + f(t)$$

admet une unique solution $u_h = \mathbf{K}_h f \in \mathcal{C}_\eta(\mathbb{R}, \mathcal{Z}_h)$. De plus, l'application linéaire $\mathbf{K}_h$ appartient à $\mathcal{L}(\mathcal{C}_\eta(\mathbb{R}, \mathcal{Y}_h), \mathcal{C}_\eta(\mathbb{R}, \mathcal{Z}_h))$ et il existe une fonction continue $C : [0, \gamma] \to \mathbb{R}$ telle que:

$$\|\mathbf{K}_h\|_{\mathcal{L}(\mathcal{C}_\eta(\mathbb{R},\mathcal{Y}_h),\mathcal{C}_\eta(\mathbb{R},\mathcal{Z}_h))} \leq C(\eta).$$

où $\mathcal{C}_\eta(\mathbb{R}, \mathcal{X}) = \{u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \mid \|u\|_{\mathcal{C}_\eta} \stackrel{def}{=} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left(e^{-\eta|t|}\|u(t)\|_\mathcal{X}\right) < \infty\}$ (c'est un espace de Banach équipé de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_\eta}$).

On redonne le cadre général du théorème. On se donne $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ et $\mathcal{Z}$, espaces de Banach tels que:

$$\mathcal{Z} \hookrightarrow \mathcal{Y} \hookrightarrow \mathcal{X}$$

avec inclusion continue. On considère l'EDO sur $\mathcal{X}$ suivante:

$$\frac{du}{dt} = \mathbf{L}u + \mathbf{R}(u) \tag{2.1}$$

où l'on suppose que $\mathbf{L}$ et $\mathbf{R}$ satisfont toutes les hypothèses du théorème (régularité, décomposition spectrale et le Lemme 1).

Pour tout $u \in \mathcal{Z}$ on écrit:

$$u = u_0 + u_h \in \mathcal{Z}, \quad u_0 = \mathbf{P}_0 u \in \mathcal{E}_0, \quad u_h = \mathbf{P}_h u \in \mathbb{Z}_h$$

et on réécrit le système (2.1) comme

$$\begin{aligned} \frac{du_0}{dt} - \mathbf{L}_0 u_0 &= \mathbf{P}_0 \mathbf{R}(u) \\ \frac{du_h}{dt} - \mathbf{L}_h u_h &= \mathbf{P}_h \mathbf{R}(u) \end{aligned} \tag{2.2}$$

On introduit une fonction "cut-off" $\chi : \mathcal{E}_0 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que

$$\chi(u_0) = \begin{cases} 1 \text{ pour } \|u_0\| \leq 1 \\ 0 \text{ pour } \|u_0\| \geq 2 \end{cases} \qquad \chi(u_0) \in [0,1] \text{ pour tout } u_0 \in \mathcal{E}_0.$$

On pose

$$\mathbf{R}^\epsilon(u) = \chi\left(\frac{u_0}{\epsilon}\right) \mathbf{R}(u) \text{ pour tout } \epsilon \in]0, \epsilon_0[$$

où ϵ_0 est choisi de telle sorte que

$$\{u = u_0 + u_h \mid \|u_0\|_{\mathcal{E}_0} \leq 2\epsilon_0, \|u_h\|_{\mathcal{Z}_h} \leq \epsilon_0\} \subset \mathcal{V}$$

et $\mathcal{V}$ est le voisinage choisi dans l'hypothèse 2.1 du théorème.

Exercice 4. **1.** Vérifier que $\mathbf{R}^\epsilon$ est bien définie sur l'espace fermé

$$\mathcal{O}_\epsilon = \mathcal{E}_0 \times B_\epsilon(\mathcal{Z}_h), \quad B_\epsilon(\mathcal{Z}_h) = \{u_h \in \mathcal{Z}_h \mid \|u_h\|_{\mathcal{Z}_h} \leq \epsilon\}$$

et satisfait $\mathbf{R}^\epsilon(u) = \mathbf{R}(u)$ pour tout $u \in \mathcal{O}_\epsilon$, $\|u_0\|_{\mathcal{E}_0} \leq \epsilon$.

2. On considère le système modifié:

$$\begin{aligned} \frac{du_0}{dt} - \mathbf{L}_0 u_0 &= \mathbf{P}_0 \mathbf{R}^\epsilon(u) \\ \frac{du_h}{dt} - \mathbf{L}_h u_h &= \mathbf{P}_h \mathbf{R}^\epsilon(u) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Montrer que les termes nonlinéaires satisfont:

$$\begin{aligned} \delta_0(\epsilon) &\stackrel{def}{=} \sup_{u \in \mathcal{O}_\epsilon} (\|\mathbf{P}_0 \mathbf{R}^\epsilon(u)\|_{\mathcal{E}_0}, \|\mathbf{P}_h \mathbf{R}^\epsilon(u))\|_{\mathcal{Y}_h} = O(\epsilon^2) \\ \delta_1(\epsilon) &\stackrel{def}{=} \sup_{u \in \mathcal{O}_\epsilon} \left(\|D_u \mathbf{P}_0 \mathbf{R}^\epsilon(u)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z},\mathcal{E}_0)}, \|D_u \mathbf{P}_h \mathbf{R}^\epsilon(u)\right)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z},\mathcal{Y}_h)} = O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

3. On remplace le système (2.3) par sa formulation intégrale:

$$\begin{aligned} u_0(t) &= \mathcal{S}_{0,\epsilon}(u, t, u_0(0)) \stackrel{def}{=} e^{\mathbf{L}_0 t} u_0(0) + \int_0^t e^{\mathbf{L}_0(t-s)} \mathbf{P}_0 \mathbf{R}^\epsilon(u(s)) ds \\ u_h &= \mathcal{S}_{h,\epsilon}(u) \stackrel{def}{=} \mathbf{K}_h \mathbf{P}_h \mathbf{R}^\epsilon(u) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Ici la condition initiale $u_0(0)$ est supposée être dans $\mathcal{E}_0$.

Montrer que le système intégral (2.4) est équivalent au système (2.3) pour

$$u = (u_0, u_h) \in \mathcal{N}_{\eta,\epsilon} \stackrel{def}{=} \mathcal{C}_\eta(\mathbb{R}, \mathcal{E}_0) \times \mathcal{C}_0(\mathbb{R}, B_\epsilon(\mathcal{Z}_h))$$

avec $\eta \in]0, \gamma]$ et $\epsilon \in]0, \epsilon_0[$.

4. On va appliquer un argument de point fixe et montrer que le système (2.4) a une unique solution $u = (u_0, u_h) \in \mathcal{N}_{\eta,\epsilon}$. On définit l'application suivante:

$$\mathcal{S}_\epsilon(u, u_0(0)) \stackrel{def}{=} (\mathcal{S}_{0,\epsilon}(u, \cdot, u_0(0)), \mathcal{S}_{h,\epsilon}(u))$$

- Montrer que pour tout $u = (u_0, u_h) \in \mathcal{N}_{\eta,\epsilon}$, $\mathcal{S}_\epsilon(u, u_0(0)) \in \mathcal{N}_{\eta,\epsilon}$.
- Montrer que $\mathcal{S}_\epsilon(\cdot, u_0(0))$ est une contraction pour la norme $\mathcal{C}_\eta(\mathbb{R}, \mathcal{Z})$ avec $\eta \in]0, \gamma]$ et ϵ assez petit.
- Montrer qu'il existe une unique solution de (2.4)

$$u \stackrel{def}{=} \Phi(u_0(0)) \in \mathcal{N}_{\eta,\epsilon}$$

pour tout $u_0(0) \in \mathcal{E}_0$ avec $\eta \in]0, \gamma]$ et ϵ assez petit.

5. Construction de Ψ dans le théorème. On définit ψ comme étant l'application $\Psi : \mathcal{E}_0 \to \mathcal{Z}_h$ par

$$(u_0(0), \Psi(u_0(0))) \stackrel{def}{=} \Phi(u_0(0))(0) \text{ pour tout } u_0(0) \in \mathcal{E}_0$$

Montrer que $\Psi(0) = 0$.

Remarque 1. Il reste encore à prouver les prorpiétés i) et ii) du théorème ainsi que la régularité de Ψ pour compléter la preuve.

3 Vérification des hypothèses 2.1 2.2 et 2.3 du théorème

Exercice 5. On considère le problème suivant:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u + g(u, \frac{\partial u}{\partial x}) \\ 0 &= u(0,t) = u(\pi, t) \end{aligned}$$

où $u(x,t) \in \mathbb{R}$ pour $(x,t) \in]0, \pi[\times \mathbb{R}$ et $g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $k \geq 2$ satisfaisant:

$$g(0, v) = 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}, \quad g(u,v) = O(|u|^2 + |v|^2), \text{ lorsque } (u,v) \to 0.$$

1. Identifier les opérateurs $\mathbf{L}$ et $\mathbf{R}$.
2. Sachant qu'on se place sur $\mathcal{X} = \mathcal{C}^0([0,\pi])$, que doit-on choisir comme espaces pour $\mathcal{Y}$ et $\mathcal{Z}$?
3. Montrer que pour ces espaces là, l'hypothèse 2.1 est satisfaite.
4. Calculer le spectre de $\mathbf{L}$ et donner σ_+, σ_- et σ_0.
5. Montrer que l'hypothèse 2.2 est satisfaite.
6. Montrer que si $\omega \neq 0$ et si $\gamma = \sqrt{i\omega - 1}$ alors

$$u(x) = \frac{1}{\gamma \sinh(\gamma\pi)} \left(\int_0^x \sinh(\gamma\xi)\sinh(\gamma(\pi - x)) f(\xi) d\xi + \int_x^\pi \sinh(\gamma x)\sinh(\gamma(\pi - \xi)) f(\xi) d\xi \right)$$

est solution de

$$\begin{aligned} (i\omega - 1)u - u'' &= f \\ u(0) = u(\pi) = 0 & \end{aligned}$$

avec $f \in \mathcal{X}$.

7. En s'aidant des inégalités suivantes $|\sinh(a + ib)| \geq \sinh(a)$ et $|\cosh(a + ib)| \leq 1 + \sinh(a)$ avec $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ montrer que

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \frac{2\|f\|_{\mathcal{C}^0}}{|\gamma|\Re(\gamma)} \text{ pour } f \in \mathcal{C}^0([0,\pi]) \\ \|u'\|_{\mathcal{C}^0} &\leq \frac{c\|f\|_{\mathcal{C}^0}}{|\omega|^{1/2}} \text{ pour } f \in \mathcal{C}^0([0,\pi]) \\ \|u''\|_{\mathcal{C}^0} &\leq \frac{c\|f'\|_{\mathcal{C}^0}}{|\omega|^{1/2}} \text{ pour } f \in \mathcal{C}^1([0,\pi]) \end{aligned}$$

et prouver que l'hypothèse 2.3 est satisfaite.