Rappels sur les systèmes dynamiques

Grégory Faye and Olivier Faugeras

NeuroMathComp Laboratory, INRIA, Sophia Antipolis, CNRS, ENS Paris, France

M2 MVA / M2 Maths-Bio

28 September, 2011

http://www-sop.inria.fr/members/Olivier.Faugeras/MVA/MMN11

gregory.faye@inria.fr

Outline

Opérateur d'évolution

- Soit $\dot{x} = f(x)$, f est $\mathcal{C}^1$ une EDO autonome.

Opérateur d'évolution

- Soit $\dot{x} = f(x)$, f est $\mathcal{C}^1$ une EDO autonome.
- On ne considère que des temps continus : $t \in \mathbf{R}$.

Opérateur d'évolution

- Soit $\dot{x} = f(x)$, f est $\mathcal{C}^1$ une EDO autonome.
- On ne considère que des temps continus : $t \in \mathbf{R}$.
- $\varphi^t : X \rightarrow X$ est tel que $x_t = \varphi^t x_0$, x_0 état initial, X espace d'état.

Opérateur d'évolution

- Soit $\dot{x} = f(x)$, f est $\mathcal{C}^1$ une EDO autonome.
- On ne considère que des temps continus : $t \in \mathbf{R}$.
- $\varphi^t : X \to X$ est tel que $x_t = \varphi^t x_0$, x_0 état initial, X espace d'état.
- φ^t peut ne pas être défini pour tout $(t, x) \in \mathbf{R} \times X$.

Opérateur d'évolution

- Soit $\dot{x} = f(x)$, f est $\mathcal{C}^1$ une EDO autonome.
- On ne considère que des temps continus : $t \in \mathbf{R}$.
- $\varphi^t : X \to X$ est tel que $x_t = \varphi^t x_0$, x_0 état initial, X espace d'état.
- φ^t peut ne pas être défini pour tout $(t, x) \in \mathbf{R} \times X$.
- Si φ^t est défini pour tout $t \in \mathbf{R}$, l'opérateur est dit inversible.

Opérateur d'évolution

- Soit $\dot{x} = f(x)$, f est $\mathcal{C}^1$ une EDO autonome.
- On ne considère que des temps continus : $t \in \mathbf{R}$.
- $\varphi^t : X \to X$ est tel que $x_t = \varphi^t x_0$, x_0 état initial, X espace d'état.
- φ^t peut ne pas être défini pour tout $(t, x) \in \mathbf{R} \times X$.
- Si φ^t est défini pour tout $t \in \mathbf{R}$, l'opérateur est dit inversible.
- $\varphi^t x_0$ peut n'être défini que localement en temps: $0 \leq t \leq t_0$ (explosion en temps fini).

Opérateur d'évolution

- Soit $\dot{x} = f(x)$, f est $\mathcal{C}^1$ une EDO autonome.
- On ne considère que des temps continus : $t \in \mathbf{R}$.
- $\varphi^t : X \to X$ est tel que $x_t = \varphi^t x_0$, x_0 état initial, X espace d'état.
- φ^t peut ne pas être défini pour tout $(t, x) \in \mathbf{R} \times X$.
- Si φ^t est défini pour tout $t \in \mathbf{R}$, l'opérateur est dit inversible.
- $\varphi^t x_0$ peut n'être défini que localement en temps: $0 \leq t \leq t_0$ (explosion en temps fini).
- Deux hypothèses:
  1. $\varphi^0 = Id$
  2. $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$.

Opérateur d'évolution

- Soit $\dot{x} = f(x)$, f est $\mathcal{C}^1$ une EDO autonome.
- On ne considère que des temps continus : $t \in \mathbf{R}$.
- $\varphi^t : X \to X$ est tel que $x_t = \varphi^t x_0$, x_0 état initial, X espace d'état.
- φ^t peut ne pas être défini pour tout $(t, x) \in \mathbf{R} \times X$.
- Si φ^t est défini pour tout $t \in \mathbf{R}$, l'opérateur est dit inversible.
- $\varphi^t x_0$ peut n'être défini que localement en temps: $0 \leq t \leq t_0$ (explosion en temps fini).
- Deux hypothèses:
  1. $\varphi^0 = Id$
  2. $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$.

Définition (Système dynamique)

Un triplet $\{\mathbf{R}, X, \varphi^t\}$, X espace d'état, et φ^t est une famille d'opérateurs d'évolution paramétrée par t et satisfaisant les deux conditions précédents s'appelle un système dynamique.

Définitions

Définition (Orbite)

Une orbite partant de x_0 est l'ensemble

$$x \in X : x = \varphi^t x_0, \forall t \in \mathbf{R}, \varphi^t x_0 \textit{ est défini}$$

Définitions

Définition (Orbite)

Une orbite partant de x_0 est l'ensemble

$$x \in X : x = \varphi^t x_0, \forall t \in \mathbf{R}, \varphi^t x_0 \text{ est défini}$$

Définition (Equilibre)

x^0 *est un équilibre (point fixe) si* $\varphi^t x^0 = x^0$ *pour tout* t.

Définitions

Définition (Orbite)

Une orbite partant de x_0 est l'ensemble

$$x \in X : x = \varphi^t x_0, \forall t \in \mathbf{R}, \varphi^t x_0 \text{ est défini}$$

Définition (Equilibre)

x^0 *est un équilibre (point fixe) si* $\varphi^t x^0 = x^0$ *pour tout* t.

Définition (Cycle)

Un cycle est une orbite périodique L_0 *telle que pour tout* $x_0 \in L_0$, $\varphi^{t+T_0} x_0 = \varphi^t x_0$ *pour un* $T_0 > 0$, *pour tout* $t \in \mathbf{R}$.

Définitions

Définition (Orbite)

Une orbite partant de x_0 est l'ensemble

$$x \in X : x = \varphi^t x_0, \forall t \in \mathbf{R}, \varphi^t x_0 \text{ est défini}$$

Définition (Equilibre)

x^0 *est un équilibre (point fixe) si* $\varphi^t x^0 = x^0$ *pour tout* t.

Définition (Cycle)

Un cycle est une orbite périodique L_0 *telle que pour tout* $x_0 \in L_0$, $\varphi^{t+T_0} x_0 = \varphi^t x_0$ *pour un* $T_0 > 0$, *pour tout* $t \in \mathbf{R}$.

Définition (Portrait de phase)

Le portrait de phase d'un système dynamique est une partition de l'espace d'état en orbites.

Ensembles invariants

Définition (Ensemble invariant)

Un ensemble ensemble invariant d'un système dynamique $\{\mathbf{R}, X, \varphi^t\}$ *est un sous-ensemble* $S \subset X$ *tel que si* $x_0 \in S$ *alors* $\varphi^t \in S$ *pour tout* $t \in \mathbf{R}$.

Ensembles invariants

Définition (Ensemble invariant)

Un ensemble ensemble invariant d'un système dynamique $\{\mathbf{R}, X, \varphi^t\}$ *est un sous-ensemble* $S \subset X$ *tel que si* $x_0 \in S$ *alors* $\varphi^t \in S$ *pour tout* $t \in \mathbf{R}$.

Définition (Stabilité des ensembles invariants: Lyapunov)

Un ensemble invariant S *est dit Lyapunov stable si pour tout voisinage* U *de* S *suffisamment petit il existe un voisinage* V *de* S *tel que* $\varphi^t x \in U$ *pour tout* $x \in V$ *et* $t > 0$.*(*X *est un Banach)*

Ensembles invariants

Définition (Ensemble invariant)

Un ensemble ensemble invariant d'un système dynamique $\{\mathbf{R}, X, \varphi^t\}$ *est un sous-ensemble* $S \subset X$ *tel que si* $x_0 \in S$ *alors* $\varphi^t \in S$ *pour tout* $t \in \mathbf{R}$.

Définition (Stabilité des ensembles invariants: Lyapunov)

Un ensemble invariant S *est dit Lyapunov stable si pour tout voisinage* U *de* S *suffisamment petit il existe un voisinage* V *de* S *tel que* $\varphi^t x \in U$ *pour tout* $x \in V$ *et* $t > 0$.*(*X *est un Banach)*

Définition (Stabilité des ensembles invariants: asymptotique)

Un ensemble invariant S *est dit asymptotiquement stable si il existe un voisinage* U_0 *de* S *tel* $\varphi^t x \to S$ *pour tout* $x \in U_0$ *quand* $t \to +\infty$.

Ensembles invariants

Définition (Ensemble invariant)

Un ensemble ensemble invariant d'un système dynamique $\{\mathbf{R}, X, \varphi^t\}$ *est un sous-ensemble* $S \subset X$ *tel que si* $x_0 \in S$ *alors* $\varphi^t \in S$ *pour tout* $t \in \mathbf{R}$.

Définition (Stabilité des ensembles invariants: Lyapunov)

Un ensemble invariant S *est dit Lyapunov stable si pour tout voisinage* U *de* S *suffisamment petit il existe un voisinage* V *de* S *tel que* $\varphi^t x \in U$ *pour tout* $x \in V$ *et* $t > 0$*.(*X *est un Banach)*

Définition (Stabilité des ensembles invariants: asymptotique)

Un ensemble invariant S *est dit asymptotiquement stable si il existe un voisinage* U_0 *de* S *tel* $\varphi^t x \to S$ *pour tout* $x \in U_0$ *quand* $t \to +\infty$.

Remarque

L'asymptotique stabilité n'implique pas la stabilité au sens de Lyapunov.

Théorème de stabilité

Théorème

Soit $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, f *est* $\mathcal{C}^1$, *un système dynamique continu. Si* x_0 *est un point fixe* ($f(x_0) = 0$), *alors si les valeurs propres de* $Df(x_0)$ *sont de partie réelle négative,* x_0 *est asymptotiquement stable.*

Preuve: exercice classique de prépa?

Outline

Définitions

Définition

Un système dynamique $\{\mathbf{R}, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ *est dit topologiquement équivalent au système* $\{\mathbf{R}, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$ *s'il existe un homéomorphisme* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *transformant les orbites du premier système en les orbites du second tout en préservant la direction du temps.*

Définitions

Définition

Un système dynamique $\{\mathbf{R}, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ *est dit topologiquement équivalent au système* $\{\mathbf{R}, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$ *s'il existe un homéomorphisme* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *transformant les orbites du premier système en les orbites du second tout en préservant la direction du temps.*

Définition (Définition locale)

Un système dynamique $\{\mathbf{R}, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ *est dit localement topologiquement équivalent au voisinage de l'équilibre* x_0 *au système* $\{\mathbf{R}, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$ *au voisinage de l'équilibre* y_0 *s'il existe un homéomorphisme* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Définitions

Définition

Un système dynamique $\{\mathbf{R}, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ *est dit topologiquement équivalent au système* $\{\mathbf{R}, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$ *s'il existe un homéomorphisme* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *transformant les orbites du premier système en les orbites du second tout en préservant la direction du temps.*

Définition (Définition locale)

Un système dynamique $\{\mathbf{R}, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ *est dit localement topologiquement équivalent au voisinage de l'équilibre* x_0 *au système* $\{\mathbf{R}, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$ *au voisinage de l'équilibre* y_0 *s'il existe un homéomorphisme* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

- *défini dans un petit voisinage* $U \subset \mathbb{R}^n$ *de* x_0*,*

Définitions

Définition

Un système dynamique $\{\mathbf{R}, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ est dit topologiquement équivalent au système $\{\mathbf{R}, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$ s'il existe un homéomorphisme $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ transformant les orbites du premier système en les orbites du second tout en préservant la direction du temps.

Définition (Définition locale)

Un système dynamique $\{\mathbf{R}, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ est dit localement topologiquement équivalent au voisinage de l'équilibre x_0 au système $\{\mathbf{R}, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$ au voisinage de l'équilibre y_0 s'il existe un homéomorphisme $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

- *défini dans un petit voisinage $U \subset \mathbb{R}^n$ de x_0,*
- *qui satisfait $y_0 = h(x_0)$,*

Définitions

Définition

Un système dynamique $\{\mathbf{R}, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ est dit topologiquement équivalent au système $\{\mathbf{R}, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$ s'il existe un homéomorphisme $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ transformant les orbites du premier système en les orbites du second tout en préservant la direction du temps.

Définition (Définition locale)

Un système dynamique $\{\mathbf{R}, \mathbb{R}^n, \varphi^t\}$ est dit localement topologiquement équivalent au voisinage de l'équilibre x_0 au système $\{\mathbf{R}, \mathbb{R}^n, \psi^t\}$ au voisinage de l'équilibre y_0 s'il existe un homéomorphisme $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

- *défini dans un petit voisinage $U \subset \mathbb{R}^n$ de x_0,*
- *qui satisfait $y_0 = h(x_0)$,*
- *qui transforme les orbites du premier système dans U en les orbites du second dans $V = h(U)$ tout en préservant la direction du temps.*

Equilibres hyperboliques

Soit $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, f régulière, x_0 un point d'équilibre. Soit $Df(x_0)$ la matrice Jacobienne en x_0 et soient n_-, n_0 et n_+ le nombre de ses valeurs propres de partie réelle $< 0, = 0$ et > 0, en comptant leur multiplicité.

Equilibres hyperboliques

Soit $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, f régulière, x_0 un point d'équilibre. Soit $Df(x_0)$ la matrice Jacobienne en x_0 et soient n_-, n_0 et n_+ le nombre de ses valeurs propres de partie réelle $< 0, = 0$ et > 0, en comptant leur multiplicité.

Définition

Un équilibre est dit hyperbolique si $n_0 = 0$, c'est un col hyperbolique si $n_- n_+ \neq 0$.

Equilibres hyperboliques

Soit $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, f régulière, x_0 un point d'équilibre. Soit $Df(x_0)$ la matrice Jacobienne en x_0 et soient n_-, n_0 et n_+ le nombre de ses valeurs propres de partie réelle $< 0, = 0$ et > 0, en comptant leur multiplicité.

Définition

Un équilibre est dit hyperbolique si $n_0 = 0$, c'est un col hyperbolique si $n_- n_+ \neq 0$.

Question: Existe-t-il un lien entre les solutions de $\dot{x} = f(x)$ et de sa linéarisation $\dot{\xi} = Df(x_0)\xi$ au voisinage d'un équilibre?

Equilibres hyperboliques

Soit $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, f régulière, x_0 un point d'équilibre. Soit $Df(x_0)$ la matrice Jacobienne en x_0 et soient n_-, n_0 et n_+ le nombre de ses valeurs propres de partie réelle $< 0, = 0$ et > 0, en comptant leur multiplicité.

Définition

Un équilibre est dit hyperbolique si $n_0 = 0$, c'est un col hyperbolique si $n_- n_+ \neq 0$.

Question: Existe-t-il un lien entre les solutions de $\dot{x} = f(x)$ et de sa linéarisation $\dot{\xi} = Df(x_0)\xi$ au voisinage d'un équilibre?
Réponse: Oui si l'équilibre est hyperbolique.

Equilibres hyperboliques

Soit $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, f régulière, x_0 un point d'équilibre. Soit $Df(x_0)$ la matrice Jacobienne en x_0 et soient n_-, n_0 et n_+ le nombre de ses valeurs propres de partie réelle $< 0, = 0$ et > 0, en comptant leur multiplicité.

Définition

Un équilibre est dit hyperbolique si $n_0 = 0$, c'est un col hyperbolique si $n_- n_+ \neq 0$.

Question: Existe-t-il un lien entre les solutions de $\dot{x} = f(x)$ et de sa linéarisation $\dot{\xi} = Df(x_0)\xi$ au voisinage d'un équilibre?
Réponse: Oui si l'équilibre est hyperbolique.

Théorème (Théorème de Hartman-Grobman)

Au voisinage d'un équilibre hyperbolique x_0, le système dynamique est localement topoligiquement équivalent à sa linéarisation $\dot{\xi} = Df(x_0)\xi$.

Variété stable et instable

Définition

Soit x_0 un équilibre, son ensemble stable $W^s(x_0)$ est défini par:

$$W^s(x_0) = \{x : \lim_{t \to +\infty} \varphi^t x = x_0\}$$

son ensemble instable $W^i(x_0)$ est défini par:

$$W^i(x_0) = \{x : \lim_{t \to -\infty} \varphi^t x = x_0\}$$

Variété stable et instable

Définition

Soit x_0 un équilibre, son ensemble stable $W^s(x_0)$ est défini par:

$$W^s(x_0) = \{x : \lim_{t \to +\infty} \varphi^t x = x_0\}$$

son ensemble instable $W^i(x_0)$ est défini par:

$$W^i(x_0) = \{x : \lim_{t \to -\infty} \varphi^t x = x_0\}$$

Théorème (Variété stable locale)

Soit x_0 un équilibre hyperbolique. Les intersections de $W^s(x_0)$ et de $W^i(x_0)$ avec un voisinage suffisamment petit de x_0 contiennent des variétés régulières $W^s_{loc}(x_0)$ et $W^i_{loc}(x_0)$ de dimension n_- et n_+ respectivement. De plus, $W^s_{loc}(x_0)$ (resp. $W^i_{loc}(x_0)$) est tangent en x_0 au sous-espace vectoriel T^s (resp. T^i) correspondant à l'union des valeurs propres λ de $Df(x_0)$ telles que $Re(\lambda) < 0$ (resp. $Re(\lambda) > 0$).

Variété centrale

On suppose $n_0 > 0$.

Notation

- Soit E_0 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ correspondant aux valeurs propres de partie réelle nulle de la Jacobienne $Df(x_0)$.
- Toutes les solutions bornées de $\dot{\xi} = Df(x_0)\xi$ (équilibre et cycle) sont dans E_0.

Variété centrale

On suppose $n_0 > 0$.

Notation

- Soit E_0 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ correspondant aux valeurs propres de partie réelle nulle de la Jacobienne $Df(x_0)$.
- Toutes les solutions bornées de $\dot{\xi} = Df(x_0)\xi$ (équilibre et cycle) sont dans E_0.

Si $n_0 > 0$, savoir si il y a localement équivalence topologique entre le système dynamique $\dot{x} = f(x)$ et sa linéarisation $\dot{\xi} = Df(x_0)\xi$ au voisinage de l'équilibre x_0 est un problème assez compliqué en général.

Variété centrale

On suppose $n_0 > 0$.

Notation

- Soit E_0 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ correspondant aux valeurs propres de partie réelle nulle de la Jacobienne $Df(x_0)$.
- Toutes les solutions bornées de $\dot{\xi} = Df(x_0)\xi$ (équilibre et cycle) sont dans E_0.

Si $n_0 > 0$, savoir si il y a localement équivalence topologique entre le système dynamique $\dot{x} = f(x)$ et sa linéarisation $\dot{\xi} = Df(x_0)\xi$ au voisinage de l'équilibre x_0 est un problème assez compliqué en général.
Question: Est-ce que le système dynamique $\dot{x} = f(x)$ possède une variété ayant des propriétés similaires à celles qu'a E_0 pour $\dot{\xi} = Df(x_0)\xi$?

Variété centrale

On suppose $n_0 > 0$.

Notation

- Soit E_0 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ correspondant aux valeurs propres de partie réelle nulle de la Jacobienne $Df(x_0)$.
- Toutes les solutions bornées de $\dot{\xi} = Df(x_0)\xi$ (équilibre et cycle) sont dans E_0.

Si $n_0 > 0$, savoir si il y a localement équivalence topologique entre le système dynamique $\dot{x} = f(x)$ et sa linéarisation $\dot{\xi} = Df(x_0)\xi$ au voisinage de l'équilibre x_0 est un problème assez compliqué en général.
Question: Est-ce que le système dynamique $\dot{x} = f(x)$ possède une variété ayant des propriétés similaires à celles qu'a E_0 pour $\dot{\xi} = Df(x_0)\xi$?
Réponse: Oui! Pliss 1964, Kelley 1967, Hirsch et al. 1977.

Théorème de la variété centrale en dimension finie

Théorème (Théorème de la variété centrale)

Il existe une fonction $\Psi \in \mathcal{C}^k(E_0, T^s \oplus T^i)$, $\Psi(x_0) = D\Psi(x_0) = 0$ *et un voisinage* U *de* x_0 *tel que la variété* $W^c_{loc} = \{x + \Psi(x) \mid x \in E_0\}$ *a les propriétés suivantes.*

Théorème de la variété centrale en dimension finie

Théorème (Théorème de la variété centrale)

Il existe une fonction $\Psi \in \mathcal{C}^k(E_0, T^s \oplus T^i)$, $\Psi(x_0) = D\Psi(x_0) = 0$ *et un voisinage* U *de* x_0 *tel que la variété* $W^c_{loc} = \{x + \Psi(x) \mid x \in E_0\}$ *a les propriétés suivantes.*

- *Si* $x \in W^c_{loc} \cap U$ *et* $\varphi^t x \in U$ *pour* $t \in I$*, alors* $\varphi^t x \in W^c_{loc}$ *pour* $t \in I$*, où* I *est un intervalle contenant* $t = 0$*.*

Théorème de la variété centrale en dimension finie

Théorème (Théorème de la variété centrale)

Il existe une fonction $\Psi \in \mathcal{C}^k(E_0, T^s \oplus T^i)$, $\Psi(x_0) = D\Psi(x_0) = 0$ *et un voisinage* U *de* x_0 *tel que la variété* $W^c_{loc} = \{x + \Psi(x) \mid x \in E_0\}$ *a les propriétés suivantes.*

- *Si* $x \in W^c_{loc} \cap U$ *et* $\varphi^t x \in U$ *pour* $t \in I$, *alors* $\varphi^t x \in W^c_{loc}$ *pour* $t \in I$, *où* I *est un intervalle contenant* $t = 0$.
- *Si* $n_- n_+ > 0$, *alors* W^c_{loc} *contient toutes les solutions de* $\dot{x} = f(x)$ *restant dans* U *pour tout* $t \in \mathbf{R}$. *C'est à dire, si* $x \in U$ *et* $\varphi^t x \in U$ *pour tout* $t \in \mathbf{R}$ *alors* $x \in W^c_{loc}$.

Théorème de la variété centrale en dimension finie

Théorème (Théorème de la variété centrale)

Il existe une fonction $\Psi \in \mathcal{C}^k(E_0, T^s \oplus T^i)$, $\Psi(x_0) = D\Psi(x_0) = 0$ *et un voisinage* U *de* x_0 *tel que la variété* $W^c_{loc} = \{x + \Psi(x) \mid x \in E_0\}$ *a les propriétés suivantes.*

- *Si* $x \in W^c_{loc} \cap U$ *et* $\varphi^t x \in U$ *pour* $t \in I$*, alors* $\varphi^t x \in W^c_{loc}$ *pour* $t \in I$*, où* I *est un intervalle contenant* $t = 0$*.*
- *Si* $n_- n_+ > 0$*, alors* W^c_{loc} *contient toutes les solutions de* $\dot{x} = f(x)$ *restant dans* U *pour tout* $t \in \mathbf{R}$*. C'est à dire, si* $x \in U$ *et* $\varphi^t x \in U$ *pour tout* $t \in \mathbf{R}$ *alors* $x \in W^c_{loc}$ *.*
- *Si* $n_+ = 0$, W^c_{loc} *est localement attractive. Plus précisément, toutes solutions de* $\dot{x} = f(x)$ *restant dans* U *pour tout* $t > 0$ *tendent exponentiellement vers une solution de* $\dot{x} = f(x)$ *dans* W^c_{loc}*.*

Théorème de la variété centrale en dimension finie

Théorème (Théorème de la variété centrale)

Il existe une fonction $\Psi \in \mathcal{C}^k(E_0, T^s \oplus T^i)$, $\Psi(x_0) = D\Psi(x_0) = 0$ et un voisinage U de x_0 tel que la variété $W^c_{loc} = \{x + \Psi(x) \mid x \in E_0\}$ a les propriétés suivantes.

- *Si $x \in W^c_{loc} \cap U$ et $\varphi^t x \in U$ pour $t \in I$, alors $\varphi^t x \in W^c_{loc}$ pour $t \in I$, où I est un intervalle contenant $t = 0$.*
- *Si $n_- n_+ > 0$, alors W^c_{loc} contient toutes les solutions de $\dot{x} = f(x)$ restant dans U pour tout $t \in \mathbf{R}$. C'est à dire, si $x \in U$ et $\varphi^t x \in U$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ alors $x \in W^c_{loc}$.*
- *Si $n_+ = 0$, W^c_{loc} est localement attractive. Plus précisément, toutes solutions de $\dot{x} = f(x)$ restant dans U pour tout $t > 0$ tendent exponentiellement vers une solution de $\dot{x} = f(x)$ dans W^c_{loc}.*
- *La dimension de W^c_{loc} est n_0.*

Théorème de la variété centrale en dimension finie

Théorème (Théorème de la variété centrale)

Il existe une fonction $\Psi \in \mathcal{C}^k(E_0, T^s \oplus T^i)$, $\Psi(x_0) = D\Psi(x_0) = 0$ *et un voisinage* U *de* x_0 *tel que la variété* $W^c_{loc} = \{x + \Psi(x) \mid x \in E_0\}$ *a les propriétés suivantes.*

- *Si* $x \in W^c_{loc} \cap U$ *et* $\varphi^t x \in U$ *pour* $t \in I$, *alors* $\varphi^t x \in W^c_{loc}$ *pour* $t \in I$, *où* I *est un intervalle contenant* $t = 0$.
- *Si* $n_- n_+ > 0$, *alors* W^c_{loc} *contient toutes les solutions de* $\dot{x} = f(x)$ *restant dans* U *pour tout* $t \in \mathbf{R}$. *C'est à dire, si* $x \in U$ *et* $\varphi^t x \in U$ *pour tout* $t \in \mathbf{R}$ *alors* $x \in W^c_{loc}$.
- *Si* $n_+ = 0$, W^c_{loc} *est localement attractive. Plus précisément, toutes solutions de* $\dot{x} = f(x)$ *restant dans* U *pour tout* $t > 0$ *tendent exponentiellement vers une solution de* $\dot{x} = f(x)$ *dans* W^c_{loc}.
- *La dimension de* W^c_{loc} *est* n_0.

Objectif du cours: définir une variété centrale pour des systèmes dynamiques en dimension infinie.