Dynamique des populations structurées

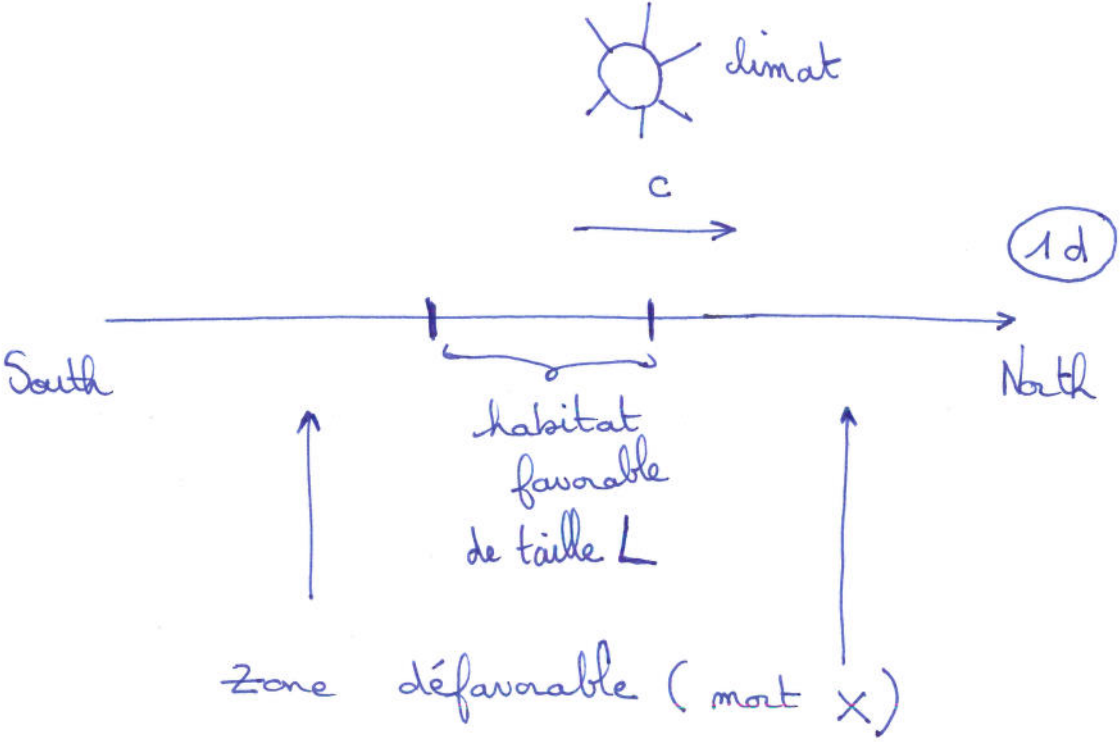
<u>Références</u> :

- Kolmogorov, Petrovkii, Piskunov (1937)
  Etude de l'équation de diffusion avec accroissement de la quantité de matière et son application à un problème biologique

- Aronson, Weinberger (1976)
  Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics

- Berestycki, Dickmann, Nagelkerke, Zegeling (2009)
  Can a species keep pace with a shifting climate?

- A variational approach to reaction-diffusion equations with forced speed in dimension 1
  Bouhours, Nadin (2015)



<u>modèle</u> : $$\frac{\partial u}{\partial t} = \underbrace{D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{diffusion}} + \underbrace{f(u, x - ct)}_{\text{réaction}} \quad , x \in \mathbb{R}, \; t > 0$$

- $D > 0$: coefficient de diffusion
- $c \geqslant 0$: vitesse du réchauffement climatique
- $L \in (0; +\infty]$: taille de l'habitat favorable

<u>Hypothèse</u> :

- $f(u, x) = u\, g(u, x)$ où
  - $g < 0$ quand $|x|$ est large
  - $g(0, x) > 0 \quad x \in [0, L]$

Questions : 1) Existe-t-il des solutions positives de la forme

$$u(t,x) = w(x - ct) \; ?$$

2) Si w existe, est-ce une solution stable ?

3) Quelle est la forme de la solution w ?

4) Si il n'y a pas de solution $w > 0$, a-t-on nécessairement

$$u(t,x) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \; ?$$

5) Comment ces résultats dépendent de c, D, L et f ?

I] g constante par morceau

On suppose que $g(u,x) = \begin{cases} -\tilde{r} & x < 0 \text{ et } x > L \\ r\left(1 - \frac{u}{K}\right) & 0 \leq x \leq L \end{cases}$

<u>note</u> : $\tilde{r} = K = D = 1$ en redimensionnant le problème

<u>Equations des ondes</u> :

soit $\xi = x - ct$, alors on cherche $W > 0$

solution de

$$W_{\xi\xi} + cW_{\xi} + W g(W, \xi) = 0$$

tout en cherchant $W \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

<u>i) Zone défavorable</u>

$$W_{\xi\xi} + cW_{\xi} - W = 0 \qquad \begin{cases} \xi < 0 \\ \xi > L \end{cases}$$

équation linéaire (facile à résoudre)

si $\mu_{\pm} := -\frac{c}{2} \pm \sqrt{1 + (c/2)^2}$

alors $W(\xi) = a\, e^{\mu_+ \xi} \qquad \xi < 0$

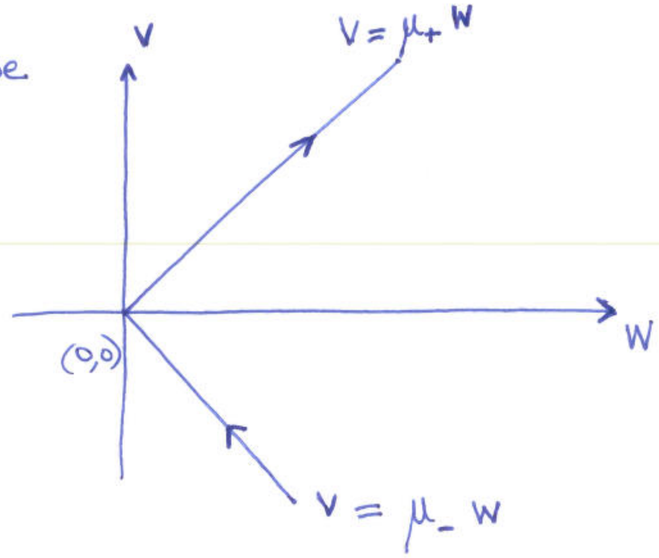
$$W(\xi) = b\, e^{\mu_- \xi} \qquad \xi > L$$

(on veut des solutions bornées).

<u>Visualisation</u> : $W_{\xi\xi} + c W_\xi - W = 0$

alors
$$\begin{cases} W_\xi = V \\ V_\xi = W - cV \end{cases}$$

portrait de phase



<u>ii) Zone favorable</u>

$$W_{\xi\xi} + c W_\xi + r W (1 - W) = 0 \qquad \xi \in [0, L]$$

<u>ou</u>
$$\begin{cases} W_\xi = V \\ V_\xi = - r W (1 - W) - cV \end{cases}$$

Bien sûr, on retrouve l'équation dite de Fisher-KPP classique pour laquelle on sait :

- il existe une unique orbite qui connecte $(V \geq 0)$ $(0,0)$ à $(1,0)$ $\Leftrightarrow$ $c \geq 2\sqrt{r}$

<u>Rappels</u> : * linéarisation en $(1,0)$ donne des v.p.

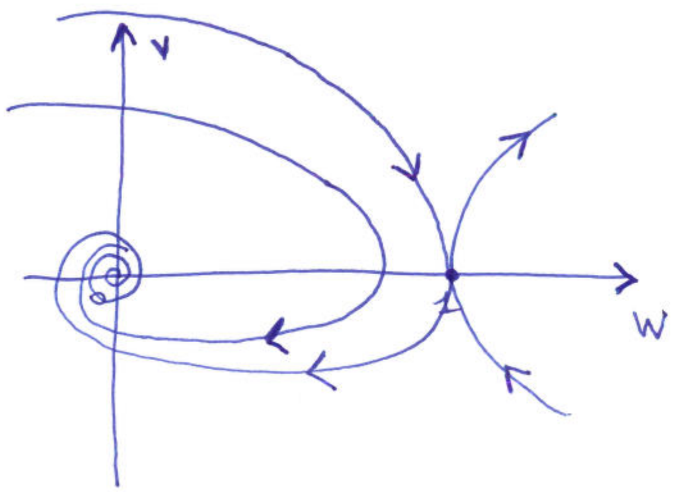
$$-\frac{c}{2} \pm \sqrt{r + \left(\frac{c}{2}\right)^2}$$

donc $(1,0)$ est un point selle

* linéarisation en $(0,0)$ donne des v.p.

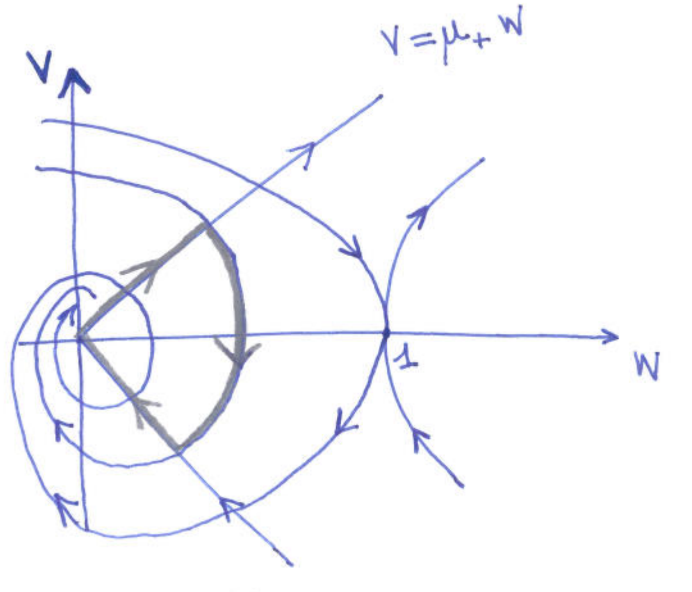
$$\alpha_\pm = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{-r + \left(c/2\right)^2}$$

si $\left(c/2\right)^2 < r$ alors $(0,0)$ est stable de type spirale ($\alpha_\pm$ complexes conjuguées)



portrait de phase

iii) Recollement de portraits de phase :



Propriété : • la longueur de l'intervalle de "temps" ξ d'une orbite qui connecte les deux droites $V = \mu_\pm W$ croît en même temps lorsque la distance de l'orbite à l'origine.

• la longueur tend vers $+\infty$ lorsque l'on s'approche de la variété stable et instable de $(1, 0)$.

Lemme (formule de monotonie)

Soient (v^1, w^1) et (v^2, w^2) 2 solutions de
$$\begin{cases} w_\xi = v \\ v_\xi = -r\,w(1-w) - cv \end{cases}$$
définies sur (a^1, b^1) et (a^2, b^2)

avec
$$\begin{cases} v^i(a^i) = \mu_+ \, w^i(a^i) & i = 1,2 \\ v^i(b^i) = \mu_- \, w^i(b^i) & i = 1,2 \end{cases}$$

et $\mu_- < \dfrac{v^i}{w^i} < \mu_+$ et $w^i > 0$ sur (a^i, b^i) $i = 1,2$

Si $v^2(a^2) > v^1(a^1)$ alors $b^2 - a^2 > b^1 - a^1$.

preuve : . en translatant, on peut supposer $a^1 = a^2 = 0$

. $-\left(e^{c\xi} w_\xi\right)_\xi = e^{c\xi}\, w\, g(w)$

et en intégrant par partie, on trouve pour $0 < \alpha < \min\{b^1, b^2\}$
$$\left[e^{c\xi}\left(-w^1_\xi\, w^2 + w^2_\xi\, w^1\right)\right]_0^\alpha = \int_0^\alpha e^{c\xi}\, w^1 w^2 \left(g(w^1) - g(w^2)\right) d\xi$$

- supposons que $w^1 < w^2$ (vrai pour α petit)

  alors on a $\dfrac{w_\xi^2(\alpha)}{w^2(\alpha)} > \dfrac{w_\xi^1(\alpha)}{w^1(\alpha)}$

- si $w^1 < w^2$ sur $(0, \alpha)$ et $w^1(\alpha) = w^2(\alpha)$

  alors $w_\xi^2(\alpha) > w_\xi^1(\alpha)$ impossible

  donc $w^1 < w^2$ sur $(0, \min\{b^1, b^2\})$

- par contradiction : si $b^2 \leq b^1$

  alors on obtient $\dfrac{w_\xi^1(b^2)}{w^1(b^2)} < \mu^-$ impossible

  et donc $b^2 > b^1$.

$\blacksquare$

iv) Plus petite valeur de L

"$L \to 0$" et donc on se rapproche de l'origine et on approche le système par son linéarisé :

$$\begin{cases} W_\xi = V \\ V_\xi = -rW - cV \end{cases}$$

$$\begin{cases} W(\xi) = k\, e^{\sigma_+ \xi} + \bar{k}\, e^{\sigma_- \xi} \\ V(\xi) = k\sigma_+ e^{\sigma_+ \xi} + \bar{k}\sigma_- e^{\sigma_- \xi} \end{cases} \quad k \in \mathbb{C}$$

conditions de compatibilité :

$$\begin{aligned} v(0) &= \mu_+ W(0) \\ v(l) &= \mu_- W(l) \end{aligned}$$ et on cherche k et l

→ on fixe $Re(k) = 1$ (invariance du temps)

→ on trouve $\tan \sqrt{r - (c/2)^2}\, l = \dfrac{2\sqrt{1+(c/2)^2}\sqrt{r-(c/2)^2}}{r - \frac{c^2}{2} - 1}$

existence de solutions si

$$\boxed{\begin{aligned} & c < 2\sqrt{r} \\ & L > L_{crit} := \frac{1}{\sqrt{r-(c/2)^2}} \arctan \frac{2\sqrt{1+(c/2)^2}\sqrt{r-(c/2)^2}}{r - c^2/2 - 1} \end{aligned}}$$

II Stabilité de l'état $u = 0$

→ linéarisation de l'équation en $u = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(0, x - ct)\, u$$

$$u(x,t) = e^{\lambda t} \phi(x - ct)$$

⇝ ϕ est une fonction propre de $\mathcal{L}$ où

$$\mathcal{L}\phi = D\phi'' + c\phi' + g(0,\xi)\phi$$

ie $\mathcal{L}\phi = \lambda \phi$, $\phi(0) = 1$

avec nos hypothèses on a :

$$g(0,\xi) = \begin{cases} -1 & \xi < 0 \text{ et } \xi > L \\ r & 0 \leq \xi \leq L \end{cases}$$

$$\tan \sqrt{r - \lambda - (c/2)^2}\, L = \frac{2\sqrt{1 + \lambda + (c/2)^2}\sqrt{r - \lambda - (c/2)^2}}{r - 2\lambda - c^2/2 - 1}$$

on retrouve $\lambda = 0 \iff L = L_{crit}$

$$\lambda(c) = \lambda(0) - \frac{c^2}{4D}$$

III] Towards more general results (voir Berestycki et al '15)

$$w_{\xi\xi} + c\,w_\xi + w\,g(w,\xi) = 0 \quad (1)$$

<u>Thm</u> : $\boxed{\text{Equation (1) a exactement une unique solution positive bornée lorsque } \lambda_\infty > 0 \text{ et pas de telle solution pour } \lambda_\infty \leq 0.}$

$$\lambda_\infty := \left\{ \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\{ \exists \phi \in W^{2,\infty}_{loc}(\mathbb{R}) \quad \phi > 0 \quad \phi'' + c\phi' + g(0,\cdot)\phi + t\phi \leq 0 \text{ sur } \mathbb{R} \right\} \right.$$

- notion de valeur propre généralisée.
- $\mathcal{L}_R\,\phi = \phi'' + c\,\phi' + g(0,\cdot)\,\phi$

  $\phi(-R) = 0 = \phi(R)$

  λ_R valeur propre principale

  et on peut voir que $\lambda_\infty = \lim\limits_{R \to +\infty} \lambda_R$

Comportement en temps long :

→ condition initiale $u(x,0) = u_0(x) \geq 0$

bornée ($\not\equiv 0$).

Thm : Soit u la solution du problème de Cauchy

i) si $\lambda_\infty \leq 0$ alors $u(x,t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ unif sur $\mathbb{R}$

ii) $\lambda_\infty > 0$ alors $u(x,t) - w(x-ct) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

unif sur $\mathbb{R}$

où w est l'unique solution bornée

positive