

## Equations de transport

- Objectifs :
- \* présenter à l'aide d'outils élémentaires le problème de transport sur  $\mathbb{R}$  à l'aide d'un modèle simple de propagation de fumée.
  - \* implémentation numérique et étude des schémas associés

### I] Modélisation

On considère la situation suivante : une usine rejette à l'instant initial une fumée toxique qui sous l'effet du vent va se propager aux habitations voisines. On souhaite connaître la densité de fumée lorsque celle-ci atteint une maison.

Hypothèses :

- phénomène mono-dimensionnel
- vitesse du vent suivant l'axe horizontal

Notations :

- $\rho(x, t)$  : densité de la fumée au point  $x \in \mathbb{R}$  et au temps  $t$
- $v(x, t)$  : vitesse du vent qui est supposée donnée
- $\rho_0(x)$  : densité initiale, connue



Hypothèse de régularité :

- $\rho \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$
- $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$

Dérivation des Équations :

• on prend un volume de contrôle  $D = (x, x+dx)$

on pose  $V(t) = \int_D \rho(x, t) dx$  la quantité de fumée dans  $D$

• dans un intervalle de temps  $(t, t+dt)$ , la variation de quantité de fumée dans le volume  $D$  est due :

\* effet du vent qui "ajoute" de la fumée en  $x$  et en "enlève" en  $x+dx$  : contribution  $[v(x, t) \rho(x, t) - v(x+dx, t) \rho(x+dx, t)] dt$

\* phénomène de diffusion qui tend à étaler le nuage de fumée (même sans vent) contribution

$$[j(x, t) - j(x+dx, t)] dt$$

le flux  $j(x, t)$  est donné par une loi empirique : la loi de Fick :

$$j(x, t) = -\kappa \frac{\partial \rho}{\partial x}(x, t) \quad \kappa: \text{coeff. de diffusion}$$

(la fumée a tendance à aller vers les endroits de faible concentration)

• le bilan s'écrit donc

$$V(t+dt) - V(t) = \left[ v(x, t) \rho(x, t) - v(x+dx, t) \rho(x+dx, t) + \kappa \left( \frac{\partial \rho}{\partial x}(x+dx, t) - \frac{\partial \rho}{\partial x}(x, t) \right) \right] dt$$



- Comme  $V(t)$  est régulière on peut faire  $dt \rightarrow 0$  de telle que l'on obtient :

$$\frac{dV}{dt}(t) = - \int_D \frac{\partial(p^0)}{\partial x}(\xi, t) d\xi + \kappa \int_D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(\xi, t) d\xi$$

et en dérivant sous le signe  $\int$  dans  $V$  on a :

$$\forall t > 0 \int_D \left[ \frac{\partial p}{\partial t}(\xi, t) + \frac{\partial(p^0)}{\partial x}(\xi, t) - \kappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(\xi, t) \right] d\xi = 0$$

et donc lorsque  $dx \rightarrow 0$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0 \quad \frac{\partial p}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial(p^0)}{\partial x}(x, t) - \kappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x, t) = 0$$

avec condition initiale  $p(x, 0) = p_0(x)$

On trouve l'équation d'advection - diffusion ou de transport - diffusion.

Remarque: dans toute la suite on va supposer  $\kappa = 0$  et on reviendra au cas  $\kappa > 0$  dans la prochaine séance.

## II] Analyse de l'équation de transport

### 1) Cas de la vitesse constante

On suppose que  $v(x, t) = v \quad \forall x \in \mathbb{R}, t > 0$ .

L'équation étudiée est donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t}(x, t) + v \frac{\partial p}{\partial x}(x, t) = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ p(x, 0) = p_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Résolution par méthode des caractéristiques: on cherche une fonction  $\varphi(t)$  telle que  $p$  soit constante le long des courbes  $(\varphi(t), t)$ .

On note  $c(t) = p(\varphi(t), t)$  en dérivant on obtient:

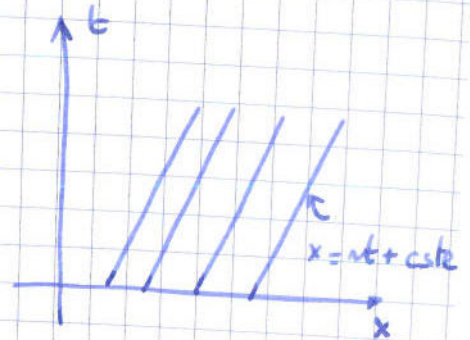
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} c(t) &= \frac{d\varphi(t)}{dt} \frac{\partial p}{\partial x}(\varphi(t), t) + \frac{\partial p}{\partial t}(\varphi(t), t) \\ &= \left[ \frac{d}{dt} \varphi(t) - v \right] \frac{\partial p}{\partial x}(\varphi(t), t) \end{aligned}$$

s'annule si  $\varphi'(t) = v$  et l'on en déduit les courbes caractéristiques:

$$\varphi(t) = vt + \text{cste}$$

on suppose qu'en  $(x, t)$  on a  $x = \varphi(t)$

$$\begin{aligned} p(x, t) &= p(\varphi(t), t) = p(\varphi(0), 0) \\ &= p_0(\varphi(0)) \\ &= p_0(x - vt) \end{aligned}$$



Thm: Si  $p_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ , alors il existe une unique solution  $p$  de classe  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ , donnée par  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0, p(x, t) = p_0(x - vt)$

→ la donnée initiale est donc "transportée" le long des caractéristiques.



## 2) Cas où la vitesse est variable

On réécrit sous la forme

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x, t) + v(x, t) \frac{\partial p}{\partial x}(x, t) = - \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) p(x, t)$$

on applique la méthode des caractéristiques et on obtient  $\psi'(t) \stackrel{(*)}{=} v(\psi(t), t)$

pour garantir des solutions globales on suppose

$$\exists L > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}, \forall t > 0 \quad |v(x, t) - v(y, t)| \leq L|x - y|$$

on peut donc définir le flot associé

$\psi(t; x_0)$  solution de  $(*)$  telle que

$$\psi(0; x_0) = x_0$$

Si l'on pose  $c(t) = p(\psi(t; x_0), t)$  alors on a

$$\frac{d}{dt} c(t) = - \frac{\partial v}{\partial x}(\psi(t; x_0), t) c(t)$$

$$\Rightarrow c(t) = c(0) \exp \left[ - \int_0^t \frac{\partial v}{\partial x}(\psi(s; x_0), s) ds \right]$$

c'est à dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t > 0, \quad p(\psi(t, x_0), t) = p_0(x_0) e^{- \int_0^t \frac{\partial v}{\partial x}(\psi(s; x_0), s) ds}$$



Thm: Soient  $\rho_0 \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R})$  et  $v \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$   
vérifiant la condition de Lipschitz  
 $\exists L > 0 \forall x, y \in \mathbb{R} \forall t > 0 |v(x, t) - v(y, t)| \leq L|x - y|$   
alors l'équation de transport admet une  
unique solution  $\rho \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$

preuve: On sait que (\*) admet des solutions globales,  
pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_x^+$  on note

$\varphi(s; t, x)$  la valeur au temps  $s \in \mathbb{R}$   
de la solution satisfaisant  $\varphi(t; t, x) = x$   
en posant  $x_0 = \varphi(0; t, x)$

et on a donc

$$c(x, t) = c_0(\varphi(0; t, x)) \exp\left[-\int_0^t \frac{\partial v}{\partial x}(\varphi(s; t, x), s) ds\right]$$

il faut montrer que  $(s, t, x) \mapsto \varphi(s; t, x)$   
est de classe  $\mathcal{C}^1$ . C'est une conséquence  
de la régularité des solutions p/r aux conditions  
initiales.



### III] Résolution numérique : méthode de différences finies

#### 1) Cas de la vitesse constante

on prend un pas de temps  $\Delta t > 0$  et un pas en espace  $\Delta x > 0$

$x_j = j \Delta x$  et  $t_n = n \Delta t$  pour  $j \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}$

on cherche une approximation  $p_j^m$  de  $p(x_j, t_n)$

on va utiliser les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial t}(x_j, t_n) \approx \frac{p_j^{m+1} - p_j^m}{\Delta t} \\ \frac{\partial p}{\partial x}(x_j, t_n) \approx \frac{p_j^m - p_{j-1}^m}{\Delta x} \end{array} \right.$$

et l'on obtient le schéma décentré avant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{Z} \quad p_j^{m+1} = p_j^m + v \frac{\Delta t}{\Delta x} (p_j^m - p_{j-1}^m)$$

avec  $p_j^0 = p_0(x_j)$  comme initialisation

Remarque : • c'est un schéma explicite en temps  
car on peut calculer  $(p_j^{m+1})_{j \in \mathbb{Z}}$  à partir

de la donnée de  $(p_j^m)_{j \in \mathbb{Z}}$

• schéma préserve la positivité dès

que  $1 - v \frac{\Delta t}{\Delta x} \geq 0$  car

$$p_j^{m+1} = \left(1 - v \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) p_j^m + v \frac{\Delta t}{\Delta x} p_{j-1}^m$$

et si  $p_j^m \geq 0 \quad \forall j$  alors  $p_j^{m+1} \geq 0$  dès que  $1 - v \frac{\Delta t}{\Delta x} \geq 0$

• on notera  $\lambda := v \frac{\Delta t}{\Delta x}$



## Erreur de consistance

$$R_j(t^n, p, \Delta t, \Delta x) = \frac{p_i^{m+1} - p_i^m}{\Delta t} + \frac{\nu}{\Delta x} (p_i^m - p_{i-1}^m)$$

où  $p$  est la solution exacte et  $p_i^m = p(x_j, t_m)$   
dans la suite on va toujours considérer  
que  $p$  est de classe  $C^2$  avec ses dérivées partielles  
d'ordre 2 bornées.

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{p_i^{m+1} - p_i^m}{\Delta t} \right\} &= \frac{p(x_j, t_m + \Delta t) - p(x_j, t_m)}{\Delta t} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} p(x_j, t_m) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p(x_j, \tilde{t}_m) \\ &\text{pour un certain } \tilde{t}_m \in (t_m, t_{m+1}) \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned} \frac{p_i^m - p_{i-1}^m}{\Delta x} &= \frac{p(x_j, t_m) - p(x_j - \Delta x, t_m)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} p(x_j, t_m) - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(\xi_j, t_m) \\ &\text{où } \xi_j \in (x_{j-1}, x_j) \end{aligned}$$

$$\text{et donc } |R_j(t^n, p, \Delta t, \Delta x)| \leq C \left( \frac{\Delta t}{2} + \nu \frac{\Delta x}{2} \right)$$

$$\text{où } C = \max \left( \sup_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \left| \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right|, \sup_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \left| \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right| \right)$$



## Stabilité du schéma

On considère  $p_j^n$  qui vérifie le schéma  
et  $K_j^m$  qui satisfait

$$K_j^{m+1} = K_j^m - \lambda (K_j^m - K_{j-1}^m) + \mu_j^m$$

$$K_j^0 = p_j^0 = p_0(x_j)$$

La différence  $e_j^m = K_j^m - p_j^m$  vérifie:

$$e_j^{m+1} = (1-\lambda) e_j^m + \lambda e_{j-1}^m + \mu_j^m$$

si on note  $\varepsilon^m = \sup_{j \in \mathbb{Z}} (e_j^m)$ , avec  $\lambda \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \text{on obtient } \varepsilon^m &\leq \varepsilon^{m-1} + \sup_{j \in \mathbb{Z}} |\mu_j^{m-1}| \\ &\leq \sum_{0 \leq k < m} \sup_{j \in \mathbb{Z}} |\mu_j^k| \end{aligned}$$

pour  $m \leq N$ .

Convergence: si on choisit  $K_j^m = p(x_j, t_m)$

$$\text{alors on a } \mu_j^m = \Delta t R_j(t^m, p, \Delta t, \Delta x)$$

et en utilisant les résultats de stabilité & consistance  
on obtient que

$$\forall m \leq N \quad \sup_{j \in \mathbb{Z}} |p(x_j, t_m) - p_j^m| \leq \frac{C}{2} T (\Delta t + \Delta x)$$

avec  $T = N \Delta t$



Thm: On suppose que  $\lambda = v \frac{\Delta t}{\Delta x} \in [0, 1]$  et que la solution  $p$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ , avec ses dérivées partielles bornées d'ordre 2 alors le schéma décentré amont

$$\forall j \in \mathbb{Z}, p_j^{n+1} = p_j^n - \lambda (p_j^n - p_{j-1}^n), p_j^0 = p_0(x_j)$$

est convergent au sens suivant:

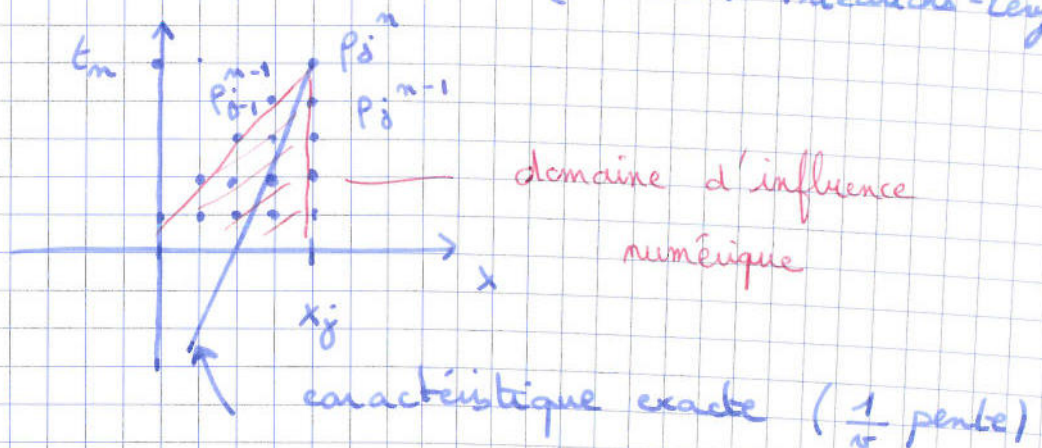
on fixe  $N \in \mathbb{N}$ ,  $T = N \Delta t$  alors  $\exists c > 0$

telle que:

$$\max_{0 \leq m \leq N} \sup_{j \in \mathbb{Z}} |p(x_j, t_m) - p_j^m| \leq c T (\Delta t + \Delta x)$$

De plus le schéma préserve la positivité.

Remarques: • la condition  $\lambda \in [0, 1]$  s'appelle une condition de CFL (Courant-Friedrichs-Lévy)



•  $\lambda \leq 1 \Rightarrow \Delta t < \Delta x$

•  $\lambda \geq 0 \Rightarrow$  adéquation entre vitesse  $v$  et décentrement du schéma



## 2) Cas d'une vitesse variable

On définit le schéma up-wind par

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \begin{cases} v_{j+1}^n \rho_{j+1}^n - \rho_j^n v_j^n & \text{si } v_j^n < 0 \\ v_j^n \rho_j^n - v_{j-1}^n \rho_{j-1}^n & \text{si } v_j^n > 0 \end{cases}$$

on peut faire la même étude et montrer que la

condition de CFL s'écrit  $\frac{\Delta t}{\Delta x} |v_j^n| \leq 1$

pour chaque  $j$  et  $n$  où  $v_j^n = v(x_j, t_n)$ .

## 3) Le schéma de Lax - Wendroff (vitesse constante)

$$\rho_j^{n+1} - \rho_j^n - \frac{v^2 \Delta t}{2} \frac{\rho_{j+1}^n - 2\rho_j^n + \rho_{j-1}^n}{\Delta x^2} + v \frac{\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

on utilise la remarque suivante

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( -v \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = -v \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = v^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

et donc ce schéma sera plus précis pour les solutions régulières  $\rho$ .



Source : G. Caloz et G. Vial, Un modèle de propagation  
d'un nuage de fumée, (2006).