EDO - Théorie et méthodes numériques

Objectifs :

* rappeler/présenter les outils théoriques de base (existence, unicité, etc...) des équations différentielles ordinaires
* introduire et étudier des méthodes numériques, puis les implémenter en T.P.
* applications à des E.D.Os autonomes présentant une "énergie" (Lotka-Volterra, pendule) et construction d'un portrait de phase

I] Exemples : modélisation en dynamique des populations

- modèle de Malthus

$u(t)$: population totale des individus à l'instant t

évolution de $u(t)$ est donnée par

$$\underbrace{u'(t)}_{\text{évolution}} = \underbrace{b\,u(t)}_{\text{naissances}} - \underbrace{d\,u(t)}_{\text{morts}}$$

où $b > 0$: taux de naissances par unité de temps

$d > 0$: taux de morts par unité de temps et donc on obtient $u'(t) = (b-d)\,u(t)$

avec à l'instant $t=0$, $u(0) = u_0$ la taille initiale de la population (donc $u_0 \geq 0$)

On résout facilement :

$$u(t) = u_0\, e^{(b-d)t} \text{, bien défini } \forall\, t \geq 0$$

On remarque plusieurs choses :

- si $u_0 = 0$ alors $u(t) = 0 \quad \forall\, t \geq 0$
- si $u_0 > 0$ alors $u(t) > 0 \quad \forall\, t \geq 0$

$\Rightarrow$ on préserve donc la positivité des solutions

de plus ; pour $u_0 > 0$, on a

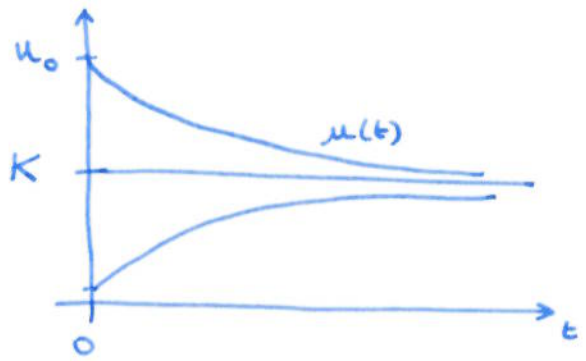
- si $b-d > 0$: $u(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$, exp^t vite (croissance)
- si $b-d = 0$: $u(t) = u_0$ équilibre
- si $b-d < 0$: $u(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$, exp^t vite (décroissance)

Limite du modèle : aucune limitation dans la capacité d'extension de la population

- <u>modèle logistique</u>

$$u'(t) = (b-d)\,u(t)\left(1 - \frac{u(t)}{K}\right)$$

où $K > 0$ modélise la capacité d'accueil, i.e la taille critique que le milieu peut supporter cette fois-ci on observe les comportements suivis



$u(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} K$

(t.q. $b-d>0$)

- <u>modèle proies/prédateurs</u>

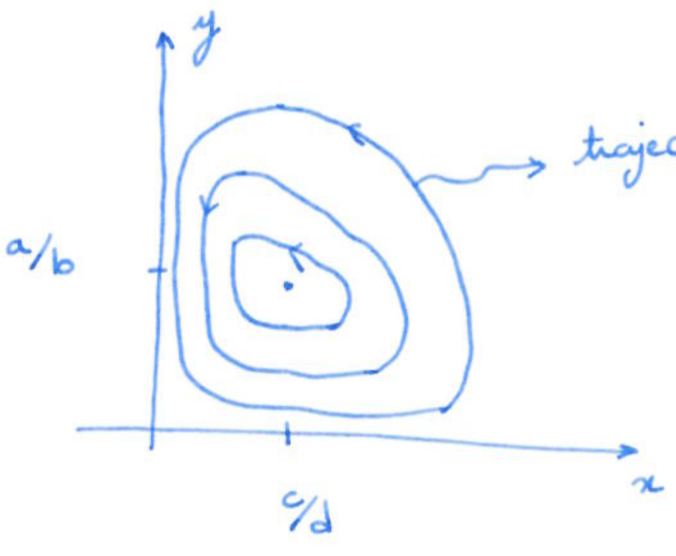
  $x(t)$: population de proies

  $y(t)$: population de prédateurs

$$\begin{cases} x'(t) = a\,x(t) - b\,x(t)\,y(t) \\ y'(t) = -c\,y(t) + d\,x(t)\,y(t) \end{cases}$$

où $a, b, c, d > 0$

ici $x(t)\,y(t)$ modélise les "rencontres" entre proies et prédateurs avec effet négatif (positif) sur les proies (prédateurs).



trajectoire $t \mapsto (x(t), y(t))$

II) Vocabulaire

<u>définitions</u> : 1) Soient $I \subset \mathbb{R}$, intervalle ouvert, et

$f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) une application.

On appelle <u>solution</u> de l'équation différentielle

$$x' = f(t, x) \qquad (*)$$

tout couple (J, x) où $J \subset I$ et x une fonction dérivable définie sur J t.q

$\forall t \in J, \quad x'(t) = f(t, x(t))$.

2) On dit que (J, x) est une <u>solution maximale</u> de $(*)$ s'il n'existe pas de solution $(\tilde{J}, \tilde{x})$ vérifiant $J \subsetneq \tilde{J}$ et $\tilde{x}_{|J} = x$.

3) Toute solution (J, x) de $(*)$ définie sur $J = I$ tout entier est dite <u>globale</u>.

<u>Remarques</u> :
* il existe toujours au moins 1 solution maximale
* pour les systèmes autonomes (f indépendant de t) alors les solutions globales sont définies sur $\mathbb{R}$.

4) Soient $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$. On appelle <u>solution du problème de Cauchy</u> associée à la donnée initiale (t_0, x_0) toute solution (J, x) de $(*)$ vérifiant de plus $t_0 \in J$ et $x(t_0) = x_0$.

III) Existence & Unicité - Théorie de Cauchy-Lipschitz

- la question fondamentale qui se pose est de savoir sous quelles hypothèses sur f on peut garantir l'existence et l'unicité des solutions du problème de Cauchy

- une réponse est apportée par le "fameux" théorème dit de Cauchy-Lipschitz dont on donnera plus loin un énoncé, grosso-modo si f est continue sur $I \times \mathbb{R}^d$, localement Lipschitzienne par rapport à la variable d'état (x) alors il existe une unique solution maximale associée au problème de Cauchy

- presque toutes les preuves d'existence commencent par la réécriture du problème de Cauchy comme

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \ \forall \in J \quad (**)$$

où pour le moment on suppose seulement que

$$f : I \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d \text{ est continue}$$

Con a bien que (J, x) est une solution du pbm de Cauchy $(*)$ avec $x(t_0) = x_0$ <u>ssi</u> $t_0 \in J$ et x est une fonction continue sur J vérifiant $(**)$

- la preuve d'existence va faire un lien évident avec la partie suivante sur les méthodes d'approximations numériques

- <u>simplification</u> (uniquement pour la preuve) on suppose que

f est indépendante de t

* M borne de f sur $\overline{B}(x_0, 1)$

* $T = \min\left(1, \frac{1}{M}\right)$

* on fixe $N > 0$, $\Delta t = \frac{T}{N}$, $t^n = t_0 + n\,\Delta t$

* on construit

$$\begin{cases} x^0 = x_0 \\ x^{n+1} = x^n + \Delta t\, f(x^n), \quad n = 0, \dots, N-1 \end{cases}$$

<u>étape 1</u> : $\forall n$ on a $x^n \in \overline{B}(x_0, 1)$

<u>étape 2</u> : on construit :

- φ_N fonction continue affine par morceaux

t.q. $\varphi_N(t^n) = x^n$

- $\overline{\varphi}_N$ fonction constante par morceaux

$\overline{\varphi}_N(t) = x^n \quad \forall t \in [t^n, t^{n+1}[$

<u>étape 3</u> : φ_N est Lipschitzienne sur $[t_0, t_0 + T]$

et uniformément bornée sur $[t_0, t_0 + T]$.

et donc la suite fonctions $(\varphi_N)_N$ est bornée dans $\mathcal{C}^0([t_0, t_0+T], \mathbb{R}^d)$ et équi-uniformément continue

par Ascoli : il existe une sous-suite $(\varphi_{N_k})_k$ qui converge uniformément vers une fonction $\varphi : [t_0, t_0+T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ continue

<u>étape 4</u> : passage à la limite, par construction on a

$$\| \varphi_N - \overline{\varphi_N} \|_\infty \leqslant M \Delta T = \frac{MT}{N} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$$

et donc $(\overline{\varphi_{N_k}})_k$ converge unif ver φ

or $\forall t \in [t_0, t_0+T]$

$$\varphi_{N_k}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\overline{\varphi_{N_k}}(s))\, ds$$

on note ω le module d'uniforme continuité de f sur $\overline{B}(x_0, 1)$ on a

$\forall s \in [t_0, t_0+T]$

$$\| f(\overline{\varphi}_{N_k}(s)) - f(\varphi(s)) \| \leqslant \omega(\| \overline{\varphi}_{N_k}(s) - \varphi(s) \|)$$

$$\leqslant \omega(\| \overline{\varphi}_{N_k} - \varphi \|_\infty)$$

$$\Rightarrow \quad \| f(\overline{\varphi}_{N_k}) - f(\varphi) \|_\infty \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

et donc $\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\varphi(s))\, ds$

■

Théorème : Soit $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continue. Alors pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^d$, il existe au moins une solution du problème de Cauchy associée.

A propos d'unicité

- on prend $\begin{cases} x' = 2\sqrt{|x|} \\ x(0) = 0 \end{cases}$

  qui admet une infinité de solutions de classe $\mathcal{C}^1$

  ($x(t) = 0$ et $x(t) = |t|t$ par exemple)

  $x \longmapsto 2\sqrt{|x|}$ est continue mais pas Lipschitzienne en $x = 0$

- on aura besoin d'un outil central

Lemme de Gronwall : z, φ continues sur $[a,b[$ à valeurs réelles et $\varphi \geq 0$

t.q. $\forall t \in [a,b[\quad z(t) \leq C + \int_a^t \varphi(s) z(s) ds$

alors $z(t) \leq C e^{\int_a^t \varphi(s) ds} \quad \forall t \in [a,b[$

P: on pose $\psi(t) = e^{-\int_a^t \varphi(s) ds} h(t)$

où $h(t) = C + \int_a^t \varphi(s) z(s) ds$

on remarque ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\psi'(t) = e^{-\int_a^t \varphi(s) ds} \left[\varphi(t) z(t) - \varphi(t) h(t) \right] \leq 0$$

donc $\psi(t) \leq C \quad \forall t \in [a,b[$

Soient (J_1, x_1) et (J_2, x_2) deux solutions d'un même problème de Cauchy en t_0 : $x_1(t_0) = x_2(t_0) = x_0$.

On veut montrer que x_1 et x_2 sont égales sur $J_0 = J_1 \cap J_2$ dès lors que f est localement Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable d'état.

Soit $S = \{ t \in J_0 \text{ t.q } x_1(s) = x_2(s), \forall s \in [t_0, t] \}$

qui est non vide car $t_0 \in S$.

Supposons que $S \cap [t_0, +\infty[\neq J_0 \cap [t_0 ; +\infty[$

alors on pose $t^* = \sup S$ on a donc

- $t^* \geq t_0$
- $t^* \in \mathring{J_0}$
- $x_1(t^*) = x_2(t^*) = \tilde{x}$

On se donne $L > 0$ comme constante de Lipschitz de f sur le compact $K = [t^*, t^*+1] \times \overline{B}(\tilde{x}, 1)$

par continuité de $x_i(t)$, on peut trouver $\delta > 0$ t.q $t^* + \delta \in J_0$ et $x_i(t) \in \overline{B}(\tilde{x}, 1)$

$\forall t \in [t^*, t^*+\delta]$ et $i = 1, 2$

$$|x_1(t) - x_2(t)| = \left| \int_{t^*}^{t} f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s)) \, ds \right|$$
$\forall t \in [t^*, t^*+\delta]$

et donc $|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant L \int_{t^*}^{t} |x_1(s) - x_2(s)|\, ds$

$\overset{\text{Lemme de}}{\underset{\text{GronWall}}{\Rightarrow}}$ $x_1(t) = x_2(t) \quad \forall\, t \in [t^*, t^*+\delta]$

donc $t^*+\delta \in S$ qui est en contradiction avec la définition de t^*.

▫

<u>Théorème de Cauchy-Lipschitz :</u>

Soit $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ <u>continue</u> et <u>localement Lipschitzienne par rapport à la variable d'état.</u>
Alors pour toute donnée $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^d$ il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy.

⇝ <u>Conséquences :</u>

* solutions maximales sont définies sur un intervalle ouvert
* 2 trajectoires distinctes ne peuvent pas se couper
* sur $\mathbb{R}$, les trajectoires sont ordonnées
* explosion en temps fini : si (J, x) est une solution maximale et $J =]\alpha, \beta[$ alors :
  - si $\alpha \in I$, alors $\limsup_{t \to \alpha^+} \|x(t)\| = +\infty$
  - si $\beta \in I$, alors $\limsup_{t \to \beta^-} \|x(t)\| = +\infty$

* si f est bornée sur $I \times \mathbb{R}^d$ alors toutes les solutions maximales sont globales

* toute la théorie s'étend au cas où f est seulement définie sur $I \times \Omega$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et le critère d'explosion en temps fini devient le théorème de sortie de tout compact suivant :

<u>Thm</u> : Soit $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ continue, loc. Lip. p/r à sa variable d'état et soit (J, x) une solution maximale alors

- si $\beta = \sup J \in I$, x sort de tout compact de Ω au voisinage de β, i.e $\forall K \subset \Omega$ compact il existe $\varepsilon > 0$ tq $x(t) \notin K$ $\forall t \in]\beta - \varepsilon ; \beta[$
- si $\alpha = \inf J \in I$, x sort de tout compact de Ω au voisinage de α, i.e. $\forall K \subset \Omega$ compact il existe $\varepsilon > 0$ tq $x(t) \notin K$ $\forall t]\alpha ; \alpha + \varepsilon[$.

IV - Méthodes numériques

Cadre de cette partie :

$$(1) \begin{cases} x' = f(t,x) & \text{sur } [0,T] \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

où f continue sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$, globalement Lip. p/r à la variable d'état (de constante $L > 0$) et de classe $\mathcal{C}^1$.

1) Retour sur la méthode d'Euler

on rappelle que l'on a noté

* pour N entier, $\Delta t = \dfrac{T}{N}$, $t^n = n\,\Delta t$

* $x^{n+1} = x^n + \Delta t\, f(t^n, x^n) \quad 0 \leq n \leq N-1$

  et $x^0 = x_0$

<u>définition</u> : Soit x la solution de (1). On appelle <u>erreur de consistance</u> du schéma d'Euler explicite, la quantité

$$R^n = \frac{x(t^{n+1}) - x(t^n)}{\Delta t} - f(t^n, x(t^n))$$

comme $x \in \mathcal{C}^2$, par Taylor, on obtient directement

$$\|R^n\| \leqslant \frac{\Delta t}{2} \sup_{[0,T]} \|x''(t)\|$$

On peut donc quantifier l'erreur

$$e^n = x(t^n) - x^n \quad : \quad \text{erreur entre solution exacte et solution approchée}$$

à l'aide de R^n puisque l'on a

$$e^{n+1} = e^n + \Delta t \left(f(t^n, x(t^n)) - f(t^n, x^n) \right) + \Delta t R^n$$

et donc $\| e^{n+1} \| \leqslant (1 + L\Delta t) \| e^n \| + \Delta t \| R^n \|$

Lemme de Gronwall discret $\Rightarrow$ $\sup\limits_{n\Delta t \leq T} \| e^n \| \leqslant \left(\sum\limits_{n=0}^{N} \Delta t \| R^n \| \right) e^{LT}$

$$\leqslant \Delta t^1 \left(\frac{T}{2} \| x'' \|_\infty e^{LT} \right) \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0$$

l'erreur est d'ordre 1

On dit alors que le schéma d'Euler explicite est convergent d'ordre 1

2) La méthode d'Euler implicite

il s'agit du schéma numérique suivant

$$\begin{cases} x^{n+1} = x^{n} + \Delta t \, f(t^{n+1}, x^{n+1}) & 0 \leq n \leq N-1 \\ x^{0} = x_0 \end{cases}$$

l'erreur de consistance est cette fois :

$$R^{n} = \frac{x(t^{n+1}) - x(t^{n})}{\Delta t} - f(t^{n+1}, x^{n+1})$$

telle que $e^{n} = x(t^{n}) - x^{n}$ satisfait :

$$e^{n+1} = e^{n} + \Delta t \left(f(t^{n+1}, x(t^{n+1})) - f(t^{n+1}, x^{n+1}) \right) + \Delta t R^{n}$$

ou encore

$$\theta_{t+1}(x(t^{n+1})) - \theta_{t+1}(x^{n+1}) = e^{n} + \Delta t R^{n}$$

où $\theta_t : x \longmapsto x - \Delta t f(t, x)$ est bijective

dès que $L\Delta t < 1$ et d'inverse Lip. de constante $(1 - L\Delta t)^{-1}$

donc $$\| e^{n+1} \| \leqslant \frac{1}{1 - L\Delta t} \left(\|e^{n}\| + \Delta t \|R^{n}\| \right)$$

$$\Rightarrow \sup_{n \leq T/\Delta t} \|e^{n}\| \leq \Delta t^{1} \left(\frac{T}{1 - L\Delta t} \cdot \|x''\|_{\infty} \, e^{\frac{LT}{1-L\Delta t}} \right)$$

on a donc convergence du schéma d'Euler implicite

(d'ordre 1)

3) Méthode à 1 pas

on considère le schéma numérique à 1 pas (constant)

$$(2) \qquad x^{n+1} = x^n + \Delta t\, \Phi(t^n, x^n, \Delta t) \;,\; x^0 = x_0$$

où Φ est continue p/r à ses arguments

- <u>erreur de consistance</u>

$$R^n = \frac{x(t^{n+1}) - x(t^n)}{\Delta t} - \Phi(t^n, x^n, \Delta t)$$

le schéma (2) est consistant à l'ordre p si

pour toute solution assez régulière de (1) on a

$$\sup_{0 \leq n \leq N} \| R^n \| \leq C\, \Delta t^p$$

- <u>stabilité</u>

le schéma (2) est dit stable si il existe $M > 0$ (indpdt Δt)

t.q $\forall \Delta t > 0$ et toutes suites (x^n), $(\tilde{x}^n)$, (ε^n)

$$x^{n+1} = x^n + \Delta t\, \Phi(t^n, x^n, \Delta t)$$

$$\tilde{x}^{n+1} = \tilde{x}^n + \Delta t\, \Phi(t^n, \tilde{x}^n, \Delta t) + \varepsilon^n$$

on a $\displaystyle \sup_{0 \leq n \leq N} \| x^n - \tilde{x}^n \| \leq M \left(\| x^0 - \tilde{x}^0 \| + \sum_{k=0}^{N} \| \varepsilon^k \| \right)$

• <u>convergence</u> :

un schéma numérique est convergent si

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sup_{0 \leq n \leq N} \| \underbrace{x^n}_{\substack{\text{suite} \\ (2)}} - \underbrace{x(t^n)}_{\text{solution de (1)}} \| = 0$$

<u>Thm</u> : si le schéma (2) est stable et consistant à l'ordre p alors il est convergent à l'ordre p :

$$\sup_{0 \leq n \leq N} \| x^n - x(t^n) \| \leq C \, \Delta t^p$$

consistance + stabilité $\Rightarrow$ convergence