Master 1 ESR
UE Modélisation
26 Mars 2018

Grégory Faye & Fanny Delebecque
IMT, CNRS
gregory.faye@math.univ-toulouse.fr
fanny.delebecque@math.univ-toulouse.fr

TP #4

Equation de transport

Objectif : Ce TP portera sur la résolution et l'implémentation numérique des équations de transport traitées en cours qui sont de la forme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x}(x,t) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{1a}$$

$$\rho(x,0) = \rho_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{1b}$$

où $v(x,t)$ sera une fonction régulière donnée.

1 Notations

Pour tout le TP, on utilisera le jeu de conditions initiales suivant :

$$\begin{aligned} \rho_0(x) &= \exp(-x^2), \\ \rho_0(x) &= (1 - |1-x|)\chi_{[0,2]}(x), \\ \rho_0(x) &= \chi_{[-1,1]}(x), \end{aligned}$$

où χ est la fonction indicatrice. On se placera aussi sur l'intervalle d'espace $[-L, L]$.

On donne aussi quelques commandes **scilab** utiles :

- `drawlater, drawnow` : permet de réaliser des animations ;
- `spzeros(n,m)` : permet de créer une matrice *creuse* de taille $n \times m$;
- `sparse(A)` : crée une matrice creuse contenant les éléments non nuls de A ;
- `full(A)` : crée une matrice pleine contenant les éléments de la matrice creuse A ;
- `diag(u,k)` : permet de créer une matrice dont la k-ième diagonale est remplie par le vecteur u.

2 Schéma décentré amont & up-wind

2.1 Vitesse constante

Dans toute cette partie, on considère $v(x,t) = v \in \mathbb{R}$ constante et on introduit le schéma numérique décentré amont :

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - v\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\rho_j^n - \rho_{j-1}^n\right),$$

avec $\rho_j^0 = \rho_0(x_j)$ et $x_j = -L + (j-1)\Delta x$.

1. Implémenter numériquement le schéma numérique pour $\Delta t = 0.01$ et $\Delta x = 0.02$ sur un intervalle de temps $t \in [0,5]$ avec $L = 10$ pour différentes valeurs de la vitesse $v \in \{-1, 0.5, 1, 2, 5\}$ et chaque condition initiale. On prendra des conditions au bord périodiques : c'est à dire si l'on note $M = \frac{2L}{\Delta x}$ alors on a $\rho_0^n = \rho_{M+1}^n$. (Indication : en notant $R^n = (\rho_1^n, \cdots, \rho_{M+1}^n)^T$, on pourra réécrire le schéma sous forme matricielle :

$$R^{n+1} = A_\lambda R^n,$$

où $A_\lambda \in \mathscr{M}_{M+1}(\mathbb{R})$ est une matrice creuse dépendant de $\lambda = v\frac{\Delta t}{\Delta x}$.)
2. Pour $v = 1$, quels phénomènes observez-vous pour les différentes conditions initiales ?
3. Pour $v = 1$, comparez l'erreur commise par le schéma numérique avec la solution exacte du problème donnée par la méthode des caractéristiques.

2.2 Vitesse variable

Dans toute cette partie, on considère $v(x,t) = 3(1-t)$ et on introduit le schéma numérique up-wind :

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\begin{cases} v_{j+1}^n \rho_{j+1}^n - v_j^n \rho_j^n & \text{si } v_j^n < 0, \\ v_j^n \rho_j^n - v_{j-1}^n \rho_{j-1}^n & \text{si } v_j^n > 0, \end{cases}$$

où $v_j^n = v(x_j, t_n)$ avec $\rho_j^0 = \rho_0(x_j)$ et $x_j = -L + (j-1)\Delta x$.

4. Implémenter numériquement le schéma numérique pour $\Delta t = 0.05$ et $\Delta x = 0.2$ sur un intervalle de temps $t \in [0,3]$ avec $L = 10$ pour chaque condition initiale. On prendra des conditions au bord périodiques.
5. Comparez l'erreur commise par le schéma numérique avec la solution exacte du problème donnée par la méthode des caractéristiques.

3 Schéma de Lax-Wendroff – Vitesse constante

Dans toute cette partie, on considère $v(x,t) = v \in \mathbb{R}$ constante et on introduit le schéma numérique décentré amont :

$$\frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\Delta t} - v^2 \Delta t \frac{\rho_{j+1}^n - 2\rho_j^n + \rho_{j-1}^n}{2\Delta x^2} + v\frac{\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0,$$

avec $\rho_j^0 = \rho_0(x_j)$ et $x_j = -L + (j-1)\Delta x$.

6. Implémenter numériquement le schéma numérique pour $\Delta t = 0.01$ et $\Delta x = 0.02$ sur un intervalle de temps $t \in [0,5]$ avec $L = 10$ pour différentes valeurs de la vitesse $v \in \{-1, 0.5, 1, 2, 5\}$ et chaque condition initiale. On prendra des conditions au bord périodiques : c'est à dire si l'on note $M = \frac{2L}{\Delta x}$ alors on a $\rho_0^n = \rho_{M+1}^n$. (Indication : en notant $R^n = (\rho_1^n, \cdots, \rho_{M+1}^n)^T$, on pourra réécrire le schéma sous forme matricielle :

$$R^{n+1} = B_\lambda R^n,$$

où $B_\lambda \in \mathscr{M}_{M+1}(\mathbb{R})$ est une matrice creuse dépendant de $\lambda = v\frac{\Delta t}{\Delta x}$.)
7. Pour $v = 1$, quels phénomènes observez-vous pour les différentes conditions initiales ?
8. Pour $v = 1$, comparez l'erreur commise par le schéma numérique avec la solution exacte du problème donnée par la méthode des caractéristiques.