

Cours -TD -TP #1
EDO's & Portraits de Phase

Objectifs : L'objectif principal de ce premier cours est de mettre en pratique sur des exemples issus de la physique (pendule), de la dynamique des populations (systèmes proie-prédateurs) ou de l'épidémiologie (modèle SIR) les résultats théoriques obtenus sur l'étude des équations différentielles ordinaires autonomes tout en gardant à l'esprit les problèmes spécifiques associés aux modèles étudiés. On se restreindra notamment à l'étude de portraits de phase pour les systèmes en dimension 2.

1 Les points théoriques – Cours (Un petit résumé)

Dans toute cette section, on considérera des problèmes du type :

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad (1a)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (1b)$$

où $f : I \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ une application, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle donné, et $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^d$ est une condition initiale donnée. On appellera **solution** du problème de Cauchy de (1) associée à la donnée initiale (t_0, x_0) , tout couple (J, x) où $J \subset I$ est un sous-intervalle de \mathbb{R} et $x : J \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction dérivable sur J satisfaisant (1). Enfin, on dira que (J, x) est une solution **maximale** de (1) s'il n'existe pas de solution (\tilde{J}, \tilde{x}) vérifiant $J \subsetneq \tilde{J}$ et $\tilde{x}|_J = x$. Toute solution définie sur $J = I$ tout entier est dite **globale**. Dans le cas des systèmes autonomes, les solutions globales sont définies sur \mathbb{R} .

1.1 Le théorème d'existence et d'unicité des solutions (Cauchy-Lipschitz)

Le résultat principal d'existence et d'unicité est le suivant.

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz – Version faible). *Si la fonction $f : I \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est de classe \mathcal{C}^1 alors pour toute donnée initiale $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^d$, il existe un intervalle $J \subset I$ contenant t_0 tel qu'il existe une unique solution du problème de Cauchy associé. En particulier, pour toute telle donnée, il existe une unique solution maximale associée et toute autre solution vérifiant la condition de Cauchy est une restriction de cette solution maximale.*

En fait, le théorème ci-dessus est encore vrai pour des hypothèses plus faibles sur le champ de vecteur f . Il suffit en effet que ce dernier soit localement Lipschitzien par rapport à sa seconde variable. On rappelle que la définition de localement Lipschitzien par rapport à la seconde variable : pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^d$, il existe une constante $C_{t_0, x_0} > 0$ et un voisinage U de (t_0, x_0) dans $I \times \mathbb{R}^d$ tels que

$$\forall (t, x_1), (t, x_2) \in U, \quad \text{on a } \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq C_{t_0, x_0} \|x_1 - x_2\|.$$

Et bien sûr, il est facile de vérifier que toute fonction \mathcal{C}^1 est localement Lipschitzienne. Enfin, si f est seulement \mathcal{C}^0 , alors la propriété d'existence de solutions maximales persiste mais pas l'unicité.

Remarque 1. *On peut énoncer les remarques suivantes, conséquences du théorème de Cauchy-Lipschitz :*

- une solution maximale est forcément définie sur un intervalle ouvert ;
- deux trajectoires distinctes ne peuvent pas se couper ;
- sur \mathbb{R} les trajectoires sont ordonnées.

1.2 Maximalité des solutions

On a les résultats suivants.

Lemme 1. *Si le champ de vecteurs f est borné sur $I \times \mathbb{R}^d$, alors toutes les solutions maximales sont globales.*

Lemme 2. *Si le champ de vecteurs f est continue et globalement Lipschitzien par rapport à la seconde variable, alors toutes les solutions maximales sont globales.*

1.3 Méthodes numériques

On s'intéresse dans cette partie à l'étude de schémas numériques permettant d'obtenir des solutions approchées au problème de Cauchy

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x), & \text{sur } [0, T] & & (2a) \\ x(0) &= x_0, & & & (2b) \end{aligned}$$

et pour simplifier l'étude, on suppose que f est globalement Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable de constante de Lipschitz $L > 0$ et de classe \mathcal{C}^1 .

1.3.1 Méthode d'Euler explicite

On se donne un nombre entier $N \geq 1$ et on pose $\Delta t = T/N$ et $t^n = n\Delta t$ pour $0 \leq n \leq N$. La méthode d'Euler explicite revient à approcher la solution de (2) aux instants t^n par une récurrence donnée par

$$x^{n+1} = x^n + \Delta t f(t^n, x^n), \quad \forall 0 \leq n \leq N-1,$$

en partant de la condition initiale $x^0 = x_0$.

1.3.2 Méthode d'Euler implicite

On se donne un nombre entier $N \geq 1$ et on pose $\Delta t = T/N$ et $t^n = n\Delta t$ pour $0 \leq n \leq N$. La méthode d'Euler implicite revient à approcher la solution de (2) aux instants t^n par une récurrence donnée par

$$x^{n+1} = x^n + \Delta t f(t^{n+1}, x^{n+1}), \quad \forall 0 \leq n \leq N-1,$$

en partant de la condition initiale $x^0 = x_0$.

1.3.3 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

On se donne un nombre entier $N \geq 1$ et on pose $\Delta t = T/N$ et $t^n = n\Delta t$ pour $0 \leq n \leq N$. La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 revient à approcher la solution de (2) aux instants t^n par une récurrence donnée par

$$x^{n+1} = x^n + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad \forall 0 \leq n \leq N-1,$$

en partant de la condition initiale $x^0 = x_0$ et où les k_j sont définis à chaque itération par

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t^n, x^n), \\ k_2 &= f\left(t^n + \frac{\Delta t}{2}, x^n + \frac{\Delta t}{2}k_1\right), \\ k_3 &= f\left(t^n + \frac{\Delta t}{2}, x^n + \frac{\Delta t}{2}k_2\right), \\ k_4 &= f(t^{n+1}, x^n + \Delta tk_3). \end{aligned}$$

1.3.4 Erreur de consistance – Stabilité – Convergence

On considère une méthode numérique à un pas (constant $\Delta t > 0$) écrite sous la forme générale suivante

$$x^{n+1} = x^n + \Delta t \Phi(t^n, x^n, \Delta t), \quad (3)$$

où Φ est une fonction continue des arguments. Par exemple, on a déjà vu que :

- pour Euler explicite : $\Phi(t^n, x^n, \Delta t) = f(t^n, x^n)$;
- pour Euler implicite on trouve $\Phi(t^n, \cdot, \Delta t) = \frac{1}{\Delta t} ((\text{Id} - \Delta t f(t^n + \Delta t, \cdot))^{-1} - \text{Id})$ à condition bien sûr que cette fonction soit bien définie.

Définition 1. On appelle **erreur de consistance** d'un schéma numérique sous la forme (3) associée à une solution exacte x de l'équation différentielle étudiée, la quantité

$$\mathcal{R}^n = \frac{x(t^{n+1}) - x(t^n)}{\Delta t} - \Phi(t^n, x(t^n), \Delta t).$$

Définition 2. Un schéma numérique est dit **consistant à l'ordre p**, si pour toute solution suffisamment régulière de l'EDO $\dot{x} = f(t, x)$, on a

$$\sup_{0 \leq n \leq N} \|\mathcal{R}^n\| \leq C \Delta t^p,$$

et le schéma est simplement dit **consistant** si

$$\sup_{0 \leq n \leq N} \|\mathcal{R}^n\| \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0.$$

Définition 3. Le schéma (3) est dit **stable** si il existe $M > 0$, indépendante de Δt , telle que pour tout $\Delta t > 0$ et pour toutes suites $(x^n)_n$ et $(\tilde{x}^n)_n$, $(\epsilon^n)_n$ vérifiant

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= x^n + \Delta t \Phi(t^n, x^n, \Delta t), \\ \tilde{x}^{n+1} &= \tilde{x}^n + \Delta t \Phi(t^n, \tilde{x}^n, \Delta t) + \epsilon^n, \end{aligned}$$

on a

$$\sup_{0 \leq n \leq N} \|x^n - \tilde{x}^n\| \leq M \left(\|x^0 - \tilde{x}^0\| + \sum_{k=0}^N \|\epsilon^k\| \right).$$

On peut démontrer le résultat suivant.

Théorème 2. *Si Φ est Lipschitzienne par rapport à x (uniformément par rapport à $t \in [0, T]$ et $\Delta t \in [0, \Delta t_{max}]$) alors le schéma numérique associé est stable.*

On peut donc maintenant parler de convergence pour un schéma numérique.

Définition 4. *Un schéma numérique est dit **convergent** si pour toute solution exacte x sur $[0, T]$ et toute suite $(x^n)_n$ construite à partir du schéma numérique avec $x(0) = x^0$ de pas de temps $\Delta t > 0$, on a la relation de convergence uniforme*

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sup_{0 \leq n \leq N} \|x^n - x(t^n)\| = 0.$$

Théorème 3. *Si le schéma (3) est stable et consistant à l'ordre p alors il est convergent à l'ordre p c'est à dire*

$$\sup_{0 \leq n \leq N} \|x^n - x(t^n)\| \leq C \Delta t^p,$$

où $(x^n)_n$ est la suite d'approximation obtenue par le schéma à partir de la donnée $x(0) = x^0$ et $t \mapsto x(t)$ est la solution exacte du problème de Cauchy sur $[0, T]$.

Remarque 2. *On a donc :*

$$\text{consistance} + \text{stabilité} \Rightarrow \text{convergence}$$

2 Le modèle de Lotka-Volterra – TD

On modélise l'interaction entre deux populations et on se place dans le cadre d'une interaction de type *proie-prédateur*. On va donc s'intéresser à l'évolution au cours du temps de ce système composé de deux espèces en interaction en faisant les hypothèses suivantes :

- en l'absence de prédateurs, la population de proies a un taux de croissance constant noté $a > 0$;
- en l'absence de nourriture, la population de prédateurs décroît exponentiellement vite avec un taux $c > 0$;
- le taux de prédation (taux de décroissance des proies dû à la présence de prédateurs) $b > 0$ est proportionnel au nombre de prédateurs ;
- le taux de croissance $d > 0$ des prédateurs est proportionnel à la quantité de proie.

Ainsi, si $x(t)$ et $y(t)$ représentent respectivement le nombre de proies et de prédateurs à l'instant t , alors dans la limite de grande population, le modèle de Lotka-Volterra s'écrit de la manière suivante :

$$x' = x(a - by), \tag{4a}$$

$$y' = y(-c + dx), \tag{4b}$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \tag{4c}$$

où x_0, y_0 sont les populations initiales.

L'objectif est de démontrer le résultat suivant.

Théorème 4. *Pour toute donnée initiale $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$, les solutions du système de Lotka-Volterra (4) sont périodiques en temps, et la moyenne sur une période $T > 0$ est donnée par*

$$\langle x \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T x(s) ds = \frac{c}{d}, \quad \langle y \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T y(s) ds = \frac{a}{b}.$$

Déroulement de la preuve.

1. Etudier l'existence et l'unicité des solutions ;
2. Déterminer les points d'équilibre du système et étudier leur stabilité linéaire ;
3. Montrer que si $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$ alors $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour tout temps où les solutions sont définies ;
4. Montrer que $H(x, y) = dx - c \ln(x) + by - a \ln(y)$ est une intégrale première ;
5. A l'aide de l'intégrale première montrer que les solutions maximales sont bornées, et en déduire qu'elles sont globales ;
6. Soit $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$ dans la zone I de la figure 1, montrer qu'il existe un temps t_1 tel que $M(t) = (x(t), y(t))$ rentre dans la zone II ;
7. Montrer qu'il existe une suite de temps $t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5$ tels que $M(t)$ passe de II à III, puis de III à IV, de IV à I et enfin de I à II ;
8. Montrer que $M(t_1)$ et $M(t_5)$ sont confondus ;
9. Conclure la preuve du théorème.

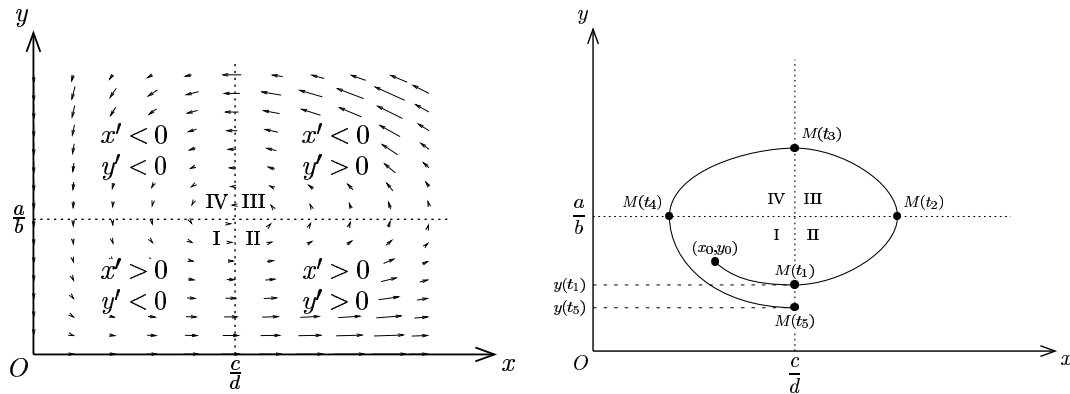


FIGURE 1 – Portrait de phase pour le système de Lotka-Volterra.

3 Modèles SIR (laissé en exercice à la maison)

On considère une population composée de N individus répartis suivant qu'ils sont sains, infectés ou rétablis. On note :

- S : nombre d'individus *sains* dans la population, susceptibles d'être infectés ;
- I : nombre d'individus *infectés* qui sont susceptibles de contaminer les sains ;
- R : nombre d'individus *rétablis* (ou soignés) qui ont été infectés et se sont guéris.

Par définition, on a donc $S + I + R = N$.

On cherche à décrire l'évolution du processus de contamination des personnes saines par les personnes infectées. Pour cela, nous allons faire plusieurs hypothèses de modélisation. A chaque étape du processus on a :

- l'apparition des nouveaux cas infectés est proportionnelle au nombre de contacts entre individus infectés et sains avec taux de contact β ;
- toute personne infectée peut transmettre la maladie ;
- chaque personne qui guérit est immunisée ;

- chaque personne qui est infectée finit nécessairement par guérir selon un taux de guérison λ ;
- la maladie est brève : on néglige donc les phénomènes démographiques (naissance/mort).

La dernière hypothèse nous dit notamment que la taille de la population est fixe et l'on partira d'une configuration du type : $S_0 + I_0 + R_0 = N$, pour un nombre donné de personnes saines, infectées, et rétablies à l'instant initial du processus.

1. Décrire l'évolution de $(S_{n+1}, I_{n+1}, R_{n+1})$ en fonction de (S_n, I_n, R_n) . (*Int* : la population doit rester constante à chaque étape)
2. Quel critère peut-on donner pour caractériser le développement de l'épidémie ?
3. Quel critère peut-on donner pour être certain que la maladie ne se développe pas ?
4. Supposons qu'une proportion p de la population est vaccinée avant l'apparition d'agents infectés. D'après le modèle, est-il nécessaire de vacciner toute la population ?

Nous avons pour le moment utilisé une modélisation "discrète", dans le sens où la notion de temps ne rentrait pas du tout en compte. Comment utiliser l'approche précédente lorsque l'on décide que l'unité de temps n'est plus de 1 (jour), mais que l'on la fait diminuer ? Soit donc $\delta t > 0$, l'unité de temps (supposée petite). Maintenant S , I , et R dépendent du temps t

5. En utilisant la question 1), décrire l'évolution de la variation de S , I et R au cours d'un laps de temps $[t, t + \delta t]$.
6. On aimerait prendre la limite $\delta t \rightarrow 0$ pour obtenir un système d'équations différentielles. Est-ce que les fonctions S , I et R sont dérivables ? On introduit les fractions

$$s(t) = \frac{S(t)}{N}, \quad i(t) = \frac{I(t)}{N}, \quad r(t) = \frac{R(t)}{N}.$$

On va faire l'hypothèse de modélisation de grande population $N \gg 1$, de telle sorte que l'on suppose que $s(t)$, $i(t)$ et $r(t)$ sont des fonctions réelles à valeur dans $[0, 1]$. Montrer que si l'on suppose que $s(t)$, $i(t)$ et $r(t)$ sont assez régulières alors on obtient à la limite $\delta t \rightarrow 0$ que ces dernières vérifient le système

$$\begin{aligned} s' &= -\beta si, \\ i' &= \beta si - \lambda i, \\ r' &= \lambda i. \end{aligned}$$

7. Montrer l'existence et l'unicité des solutions. Ensuite, vérifier que $s(t) + i(t) + r(t)$ est conservée au cours du temps.
8. Que se passe-t-il si à l'instant initial $t = 0$, il n'y a pas de personne infectée ?
9. A partir de maintenant on se restreint à l'étude de

$$\begin{aligned} s' &= -\beta si, \\ i' &= \beta si - \lambda i. \end{aligned}$$

Montrer que pour tout $0 \leq s_0 \leq 1$, la solution $(s_0, 0)$ est un point d'équilibre du système.

10. Montrer que $\mathcal{T} = \{(s, i) \mid 0 \leq s + i \leq 1\}$ est positivement invariant. En déduire que les solutions sont globales.
11. Montrer que $L(s, i) = s + i - \frac{\lambda}{\beta} \ln(s)$ est constante le long des trajectoires. En déduire une relation permettant de donner la densité finale s_∞ en fonction de s_0, i_0, λ et β .
12. Démontrer que si $i_0 > 0$ et $s_0 < \lambda/\beta$, alors $i(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Et si $s_0 > \lambda/\beta$, alors $i(t)$ est croissante jusqu'à une valeur notée i_{\max} et ensuite décroît vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$. Qu'en déduit-on quant à l'apparition possible d'une épidémie ?
13. Dessiner un portrait de phase pour ce système.

4 Etude du pendule simple – TP

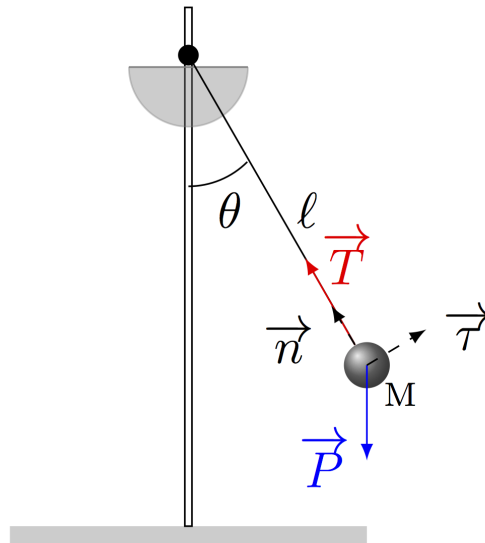


FIGURE 2 – Pendule simple.

Soit un pendule composé d'une tige de masse négligeable et de longueur $\ell > 0$ à l'extrémité de laquelle est placée une bille M de masse m . On note θ l'angle de la tige avec la verticale. Dans un premier temps, on néglige tout frottement. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse s'écrit :

$$m\vec{\gamma} = \vec{P} + \vec{T},$$

où $\vec{\gamma}$ est l'accélération de la bille, et les forces extérieures $\vec{P} = m\vec{g}$ et \vec{T} représentent le poids de la bille et la tension de la tige exercée sur la bille. Ici, le vecteur \vec{g} est colinéaire à la direction verticale et d'amplitude $g \simeq 9.81m.s^{-2}$, que l'on appelle la constante universelle de gravitation. On note $\vec{\tau}$ la direction tangentielle à la direction du mouvement de la bille. On obtient donc en projetant sur cette composante que

$$\vec{P} \cdot \vec{\tau} = -mg \sin(\theta) \quad \text{et} \quad \vec{T} \cdot \vec{\tau} = 0.$$

Enfin, la composante tangentielle de l'accélération a pour expression

$$\vec{\gamma} \cdot \vec{\tau} = \ell \ddot{\theta}.$$

Et donc, l'accélération angulaire du pendule vérifie

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{\ell} \sin(\theta(t)), \quad t \geq 0. \quad (5)$$

1. Montrer par un changement de variable temporel que l'on peut toujours se ramener au cas où $g/\ell = 1$, que l'on supposera par la suite.
2. Mettre l'équation (5) sous la forme

$$Y'(t) = f(Y(t)), \quad (6)$$

où $Y(t)$ est un vecteur colonne avec deux composantes. Créer une fonction **Scilab**, que l'on appellera **pendule** qui à tout vecteur colonne Y de \mathbb{R}^2 renvoie le vecteur colonne $f(Y)$. On pourra utiliser l'environnement **function** ou bien **deff**.

On vérifiera (à la maison) que les solutions de (5) existent, sont uniques, et définies pour tout temps $t > 0$ pour n'importe quelle condition initiale $Y_0 \in \mathbb{R}^2$.

3. A l'aide de la fonction `fchamp` de `Scilab`, représenter le champ de vecteurs $f(Y)$ dans la partie du plan $[-3\pi, 3\pi] \times [-5, 5]$.
4. Résoudre numériquement l'équation (6) pour $t \in [0, T_f]$ avec un pas de temps constant $\Delta t > 0$ en utilisant le schéma d'Euler explicite pour différentes conditions initiales. On rappelle que la méthode s'écrit :

$$Y^{n+1} = Y^n + \Delta t f(Y^n), \quad n = 0, \dots, N-1 \text{ avec } Y^0 = Y_0 \in \mathbb{R}^2$$

où N est lié à Δt et T_f via $N\Delta t = T_f$. On pourra prendre $T_f = 100$ et $\Delta t = 0.05$ (et faire varier : $\Delta t = 0.1$ et $\Delta t = 0.2$).

- On créera une fonction `Scilab` que l'on appellera `eulerexplicite` qui prendra en entrée T_f , Δt et Y_0 et renverra en sortie la matrice de taille $2 \times N + 1$ dont les colonnes sont composées des itérations successives de la méthode d'Euler : $[Y^0 Y^1 \dots Y^N]$.
- On représentera sur une figure, pour chaque solution, les fonctions $t \mapsto y_1(t)$ et $t \mapsto y_2(t)$ où $Y(t) = (y_1(t), y_2(t))^t$.
- On représentera sur une figure, plusieurs trajectoires $t \mapsto Y(t)$ pour plusieurs conditions initiales, le but étant de reproduire le portrait de phase donné en figure 3.
- (Bonus) Implémenter un code permettant de suivre la trajectoire du pendule (masse M ainsi que le fil). On supposera que le pendule est accrochée à la tige fixe à une hauteur $H = \ell + 0.5$.

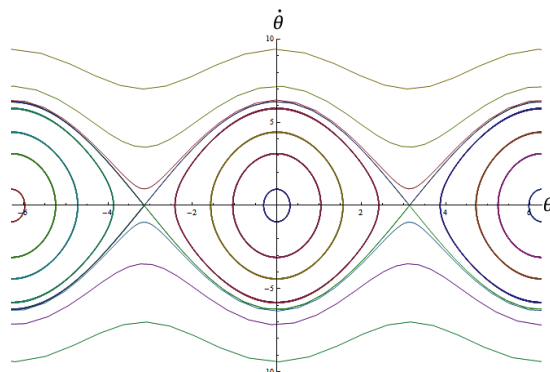


FIGURE 3 – Portrait de phase du pendule simple.

5. Implémenter la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 (voir les rappels du cours). Comparer avec les résultats précédemment obtenus. (Si le temps le permet.) Comparer les résultats avec la commande `ode` de `Scilab`.
6. On définit l'énergie cinétique $E_c(t)$ et l'énergie potentielle $E_p(t)$ par

$$E_c(t) = \frac{1}{2} \dot{\theta}(t)^2 \quad \text{et} \quad E_p(t) = 1 - \cos(\theta(t)),$$

ainsi que l'énergie totale $E_{\text{tot}}(t) = E_c(t) + E_p(t)$. Montrer que l'énergie totale du pendule reste constante au cours du temps.

7. En reprenant les approximations obtenues par le schéma d'Euler explicite utilisé ci-dessus, tracez l'évolution de $E_{\text{tot}}(t)$ au cours du temps. Que remarque-t-on ? Que peut-on en déduire ?

8. Etudier les lignes de niveau de l'énergie totale E_{tot} . C'est à dire, on note

$$E_c^{-1} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid E(x, y) = 1 - \cos(x) + \frac{1}{2}y^2 = c \right\}$$

pour un c donné.

- Montrer que $E_c^{-1} = \emptyset$ pour $c < 0$.
- Montrer que $E_0^{-1} = \{(2k\pi, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- Montrer qu'il est suffisant d'étudier $E(x, y) = 1 - \cos(x) + \frac{1}{2}y^2 = c$ pour $x \in [-\pi, \pi]$ et $y \geq 0$ pour retrouver tout E_c^{-1} .
- Montrer que pour tout $0 < c < 2$, $E_c^{-1} \cap [-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$ est une courbe fermée. En déduire l'existence de solutions périodiques pour (6).
- Montrer que pour tout $c > 2$, $E_c^{-1} \cap [-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$ est l'union de deux courbes, l'une avec $y > 0$ et l'autre avec $y < 0$.
- Montrer que $E_2^{-1} \cap [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} = \left\{ \left(x, \pm \sqrt{2(\cos(x) + 1)} \right) \mid -\pi \leq x \leq \pi \right\}$.
- Retrouver le portrait de phase de la figure 3. On écrira un programme qui permet d'afficher les lignes de niveau de E_c^{-1} pour plusieurs valeurs significatives de c .

9. (Pour aller plus loin.) On ajoute un terme de friction dans l'équation (5) sous la forme

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{\ell} \sin(\theta(t)) - \lambda \dot{\theta}(t),$$

où $\lambda > 0$ est le coefficient d'amortissement. Que se passe-t-il dans ce cas là? Comparer les résultats obtenus aux questions précédentes dans le cas sans amortissement.

Evaluation du TP :

- portrait de phase à partir du schéma d'Euler explicite
- portrait de phase à partir du schéma de Runge Kutta d'ordre 4
- portrait de phase à partir des courbes de niveau de l'énergie