Elliptique - Problèmes aux limites

I] Un peu de contexte

On va chercher à résoudre des problèmes de la forme

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ + \text{ conditions de bord sur } \Omega \end{cases}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine, borné, régulier, ouvert.

Ces problèmes apparaissent naturellement en :

* électrostatique : $-\Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (à partir des équations de Maxwell)

V : potentiel électrique

ρ : charge totale intérieure

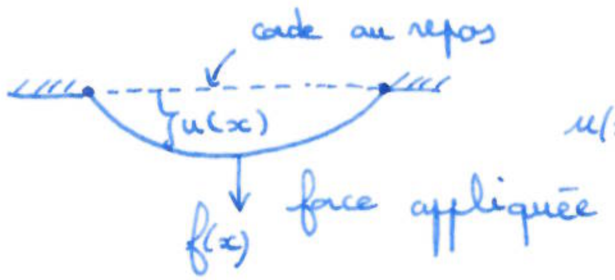
ε_0 : permitivité du vide

* chaleur stationnaire : $-\Delta u = f(x)$

u : température

$f(x)$: source de chaleur

* corde élastique



$u(x)$: déformation

bilan d'énergie :

$$E(u) = -\int_\Omega f(x)\, u(x)\, dx + k \underbrace{\int_\Omega \left(\sqrt{1+|\nabla u|^2} - 1\right) dx}_{\text{aire déformée - aire au repos}}$$

pour $k = 1$ et hypothèse des petits déplacements

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \int_\Omega f(x)\, u(x)\, dx$$

principal fondamental de la mécanique Lagrangienne

$$\mathcal{E}(u) = \inf_{v \in X} \mathcal{E}(v)$$

u doit minimiser l'énergie totale du système

le choix de l'espace fonctionnel X est <u>crucial</u>.

A partir de maintenant, on va s'intéresser au problème de Poisson en 1d : $\Omega =]0;1[$:

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -u'' = f & \text{sur }]0;1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

$\leftarrow$ condition aux limites de Dirichlet homogène

<u>Remarque 1</u> : il ne s'agit pas d'un problème d'EDO classique : les conditions de bord font que l'on ne peut pas utiliser la théorie de Cauchy-Lipschitz

II Résolution explicite dans le cas continu

<u>Hypothèse</u> : $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$

- on intègre une première fois l'équation

$$-u'(x) = C + \int_0^x f(t)\,dt$$

puis une seconde fois en utilisant $u(0)=0$

$$-u(x) = Cx + \int_0^x F(y)\,dy$$

où $F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$

en $x=1$ on obtient

$$C = -\int_0^1 F(y)\,dy$$

d'où $u(x) = x\int_0^1 F(y)\,dy - \int_0^x F(y)\,dy$

- on peut un peu ré-arranger les termes en remarquant que $\begin{cases} x = \int_0^x 1\,dy \\ 1 = \int_0^1 1\,dy \end{cases}$

ainsi que quelques lignes de calcul on peut obtenir $u(x)$ sous la forme

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y) f(y)\, dy$$

où $$G(x,y) = \begin{cases} y(1-x) & \text{si } 0 \leq y \leq x \\ x(1-y) & \text{si } x \leq y \leq 1 \end{cases}$$

- G est symétrique
- G est positive
- G est continue sur $[0;1]^2$, dérivable en dehors de la diagonale $\{x=y\}$

la fonction G s'appelle la fonction de Green associée au pbm de Poisson avec condition aux limites de Dirichlet homogènes.

<u>Thm</u> : $\forall f \in \mathcal{C}^0([0;1])$, le problème (P) a une <u>unique</u> solution $u \in \mathcal{C}^2([0;1])$ donnée par

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y) f(y)\, dy$$

où G est définie ci-dessus.

De plus, si $f \geq 0$ alors $u \geqslant 0$ (principe du maximum)

et si de plus u s'annule en un point intérieur de $]0;1[$ alors $u \equiv 0$.

Exercice : résoudre explicitement

$$\begin{cases} -\partial_x \left(k(x)\, \partial_x u(x) \right) = f(x)\,, & x \in]0;1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où $f, k \in \mathcal{C}^0([0;1])$ et $\inf\limits_{[0,1]} k > 0$.

III] Cadre variationnel, espaces de Sobolev, Lax-Milgram

Repartons de notre problème de la corde élastique

et supposons qu'il existe $u \in X$ (toujours à déterminer)

solution de $\mathcal{E}(u) = \inf\limits_{v \in X} \mathcal{E}(v)$

alors $\forall v \in X$ et $t \in \mathbb{R}$ $\quad u + tv \in X$ (dès que X est un e.v.)

et $\quad \mathcal{E}(u + tv) \geq \mathcal{E}(u)$

$$\mathcal{E}(u+tv) = \mathcal{E}(u) + t\left[\int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx - \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx\right] + \frac{t^2}{2}\int_0^1 |v'(x)|^2\, dx$$

en notant $\varphi_v(t) = \mathcal{E}(u + tv)$ qui est dérivable

et admet un minimum en $t = 0$

alors $\varphi_v'(0) = 0$ et donc

$$(V) \qquad \forall v \in X, \quad \int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, v(x)\, dx$$

formulation variationnelle du problème

- Il n'est pas difficile de se convaincre que toute solution régulière de (P) est aussi solution de (V). En fait, la réciproque est aussi vraie.

- Il s'agit maintenant de trouver un bon cadre fonctionnel qui permette de résoudre (V).

1) Rappels sur les espaces de Sobolev

déf : (Ici $I =]a,b[$ intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$)

On appelle espace de Sobolev $H^1(I)$ l'ensemble des fonctions $u \in L^2(I)$ qui admettent une dérivée faible dans $L^2(I)$ (notée ∇u, u' ou $\partial_x u$)

$$H^1(I) = \{ u \in L^2(I) \ / \ \exists \ \nabla u \in L^2(I) \}$$

muni de la norme

$$\| u \|_{H_1} = \sqrt{\|u\|^2_{L^2} + \| \nabla u \|^2_{L^2}}$$

Rappel : pour $u \in L^2(I)$ et $g \in L^2(I)$, on dit que g est la dérivée faible de u dans $L^2(I)$ si $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(I)$

$$\int_a^b u \varphi' dx = - \int_a^b g \varphi \, dx$$

prop : 1) Si une dérivée faible existe, alors elle est unique au sens presque partout.

2) Si $u \in \mathcal{C}^1(\bar{I})$ alors la dérivée au sens classique de u est aussi l'unique dérivée faible de u et donc $u \in H^1(I)$, ie $\mathcal{C}^1(\bar{I}) \subset H^1(I)$, qui est continue puisque $\exists C > 0$,

$$\forall u \in \mathcal{C}^1(\bar{I}), \quad \|u\|_{H^1(I)} \leq C \|u\|_{\mathcal{C}^1(\bar{I})}$$

3) $H^1(I)$ est un espace de Hilbert.

4) Si $u \in H^1(I)$ a une dérivée faible nulle p.p. alors u est constante.

5) $\forall u \in H^1(I)$ admet un unique représentant continu sur $\bar{I}$ (toujours noté u)

$$\text{et} \quad u(y) - u(x) = \int_x^y (\partial_x u)\, dx \quad \forall x, y \in \bar{I}.$$

6) L'ensemble $\mathcal{C}^\infty(\bar{I})$ est dense dans $H^1(I)$.

Examples :
- fonction valeur absolue est dans $H^1(]-1;1[)$ et $\partial_x u$ est la fonction de Heaviside (qui n'est pas dans H^1 !)
- $x \mapsto |x|^\alpha$ est dans $H^1(]-1;1[)$ ssi $\alpha > \frac{1}{2}$

Corollaire : $H^1(I) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\bar{I})$ est continue.

déf : On appelle $H^1_0(I)$ le sous-espace fermé de $H^1(I)$ constitué des fonctions de $H^1(I)$ qui sont nulles sur le bord.

prop (Inégalité de Poincaré)

$\forall u \in H^1_0(I), \quad \|u\|_{L^2} \leq |b-a| \, \|\partial_x\|_{L^2}$

Csq : * $u \longmapsto \|\partial_x u\|_{L^2}$ est donc une norme sur $H^1_0(I)$ équivalente à la norme sur $H^1(I)$.

* la structure de Hilbert correspondante est équivalente à celle héritée de $H^1(I)$

Thm : $\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{C}^\infty_c(I) \text{ est dense dans } H^1_0(I).}$

On reformule le problème (V) comme :

soit $f \in L^2(I)$, trouver $u \in H^1_0(I)$ qui vérifie

$$\forall v \in H^1_0(I) \quad \int_I \partial_x u \, \partial_x v \, dx = \int_I f v \, dx.$$

- il y a unicité de la solution car si $u_1, u_2 \in H^1_0(I)$ sont solutions alors $u_1 - u_2 = \bar{u} \in H^1_0(I)$ on a

$$\forall v \in H^1_0(I), \int_I \partial_x \bar{u}\, \partial_x v \, dx = 0$$

et en prenant $v = \bar{u}$ on obtient

$$\int_I |\partial_x \bar{u}|^2 dx = 0$$

$\Rightarrow$ $\bar{u}$ est constante et donc nulle (conditions de bord nulles)

- la solution $u \in H^1_0(I)$ de (V) si elle existe vérifie (P) et $\partial_x u \in \mathcal{C}^0(\bar{I})$ donc $u \in \mathcal{C}^1(\bar{I})$

(si f est continue sur $\bar{I}$ alors u est solution classique de (P)).

2) Théorème de Lax-Milgram

Thm : Soit H un espace de Hilbert. On se donne une forme bilinéaire continue $a : H \times H \to \mathbb{R}$. On suppose de plus que a est coercive :

$$\exists \alpha > 0 \text{ tq } \forall u \in H \quad a(u,u) \geq \alpha \|u\|_H^2 .$$

Alors pour toute forme linéaire continue $L : H \to \mathbb{R}$ il existe un unique $u \in H$ tq

$$\forall v \in H \quad a(u,v) = L(v).$$

Si de plus a est une forme symétrique alors u est l'unique élément de H réalisant le minimum de la fonctionnelle $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E}(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - L(v) \quad , \quad v \in H$$

<u>preuve :</u> cas symétrique repose du théorème de représentation de Riesz.

<u>application à (V) :</u>

- $a(u,v) = \int_I \partial_x u \, \partial_x v \, dx$
- $H = H^1_0(I)$
- $L(v) = \int_I f u \, dx$

on a que 1) $|a(u,v)| \leq \|\partial_x u\|_{L^2} \|\partial_x v\|_{L^2}$

2) $a(u,u) = \|\partial_x u\|^2_{L^2}$

3) $|L(v)| \leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \leq \underbrace{C_p}_{\text{constante de poincaré}} \|f\|_{L^2} \|\partial_x u\|_{L^2}$

IV) Résolution numérique

On s'intéresse aux schémas aux différences finis pour le problème (P).

On considère un maillage régulier de $[0,1]$

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1$$

où l'on prend $\Delta x = \frac{1}{n+1} = x_{i+1} - x_i$

et donc $x_i = i\,\Delta x$.

On cherche à calculer des valeurs approchées de la solution exacte $u(x)$ en les x_i.

Sachant que l'on a déjà $u(x_0) = u(x_{n+1}) = 0$.

Dans le cas de notre maillage uniforme, on utilise :

$$u(x_{i+1}) = u(x_i + \Delta x)$$

$$= u(x_i) + \Delta x\, u'(x_i) + \frac{(\Delta x)^2}{2} u''(x_i) + \cdots$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i - \Delta x)$$

$$= u(x_i) - \Delta x\, u'(x_i) + \frac{(\Delta x)^2}{2} u''(x_i) + \cdots$$

et donc $\dfrac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{(\Delta x)^2} \simeq u''(x_i) = -f(x_i)$

On cherche donc $(u_i)_{i=1,\dots,n}$ solutions de

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} = f_i, \quad \forall i \in \{1,\dots,n\}$$

où $f_i = f(x_i)$ est donné.

On peut réécrire le schéma sous forme vectorielle :

$$AU = F \quad \text{où} \quad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

et la matrice A est donnée par

$$A = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice A admet les propriétés suivantes

- A est symétrique
- A est définie positive
- les valeurs propres de A sont données par

$$\lambda_j = \frac{4}{(\Delta x)^2} \sin\left(\frac{\pi j \Delta x}{2}\right)^2 \qquad j = 1, \dots, m$$

et de vecteur propre $v_j = \begin{pmatrix} \sin(\pi j \Delta x) \\ \sin(2\pi j \Delta x) \\ \vdots \\ \sin(m\pi j \Delta x) \end{pmatrix}$

- A^{-1} est donc inversible et a tous ses coefficients positifs
- si $v, b \in \mathbb{R}^m$ tq $Av = b$ alors on a

$$b \geq 0 \Rightarrow v \geq 0$$

(principe du maximum discret)

déf : Soit u la solution du pbm de Poisson (P).
L'<u>erreur de consistance</u> $R = (R_i)_{1\leq i\leq n}$ est définie par

$$R_i = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{(\Delta x)^2} + f(x_i).$$

Consistance d'ordre p si

$$\| R \| \leq C \, \Delta x^p.$$

prop : Le schéma est consistant à l'ordre 2 :

$$\| R \|_\infty \leq C \, \Delta x^2 \, \| u^{(4)} \|_\infty$$

<u>Remarques</u> : * cela demande de la régularité sur la solution
* le schéma est exact si u est un polynôme de degré 3 (ie f affine)

déf : On dit que le schéma est <u>stable</u> pour une norme $\|\cdot\|$ si il existe $C>0$ tq

$$\forall b \in \mathbb{R}^n \quad \| A^{-1} b \| \leq \underbrace{C}_{\text{indépendante de } \Delta x} \| b \|$$

prop : 1) Le schéma aux différences finies est L^∞ stable :

$$\| A^{-1} b \|_\infty \leq \frac{1}{8} \| b \|_\infty \quad \forall b \in \mathbb{R}^n.$$

2) Le schéma aux différences finies est L^2 stable :

$$\| A^{-1} b \|_2 \leq \| b \|_2 \quad \forall b \in \mathbb{R}^n$$

On note $\overline{U} = \begin{pmatrix} u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_n) \end{pmatrix}$ le vecteur constitué des valeurs exactes

on a donc $AU = F$ et si $E = \overline{U} - U$ vecteur d'erreur

on a $A\overline{U} = F + R$

d'où $A E = R$

$$\Rightarrow \quad \|E\|_\infty = \|A^{-1}R\|_\infty \underset{\text{stabilité}}{\leqslant} \frac{1}{8}\|R\|_\infty$$

$$\underset{\text{consistance}}{\leqslant} \frac{C\Delta x^2}{8}\|u^{(4)}\|_\infty$$

donc on a démontré la convergence du schéma en norme L^∞.