Agrégation
Modélisation - Option B
3 Décembre 2019

Grégory Faye
IMT, CNRS
gregory.faye@math.univ-toulouse.fr

TP

Problèmes aux limites

Objectif : ce TP porte sur la résolution et l'implémentation numérique des problèmes aux limites de la forme

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{1a}$$

$$+ \text{ conditions de bord en } x = 0 \text{ et } x = 1, \tag{1b}$$

pour une certaine fonction $f \in L^2(0,1)$ donnée.

1 Commmandes Scilab

On pourra s'aider des commandes suivantes :
— `spzeros(n,m)` : permet de créer une matrice *creuse* de taille $n \times m$;
— `sparse(A)` : crée une matrice creuse contenant les éléments non nuls de A ;
— `full(A)` : crée une matrice pleine contenant les éléments de la matrice creuse A ;
— `diag(u,k)` : permet de créer une matrice dont la k-ième diagonale est remplie par le vecteur u.
— `lufact(A)` : factorisation de A afin de résoudre des systèmes linéaires plus rapidement (A doit être creuse) ;
— `lusolve(A,b)` : résout le système linéaire $AU = b$.
— `backslash` : l'anti-slash représente la division matricielle à gauche telle que la solution de $AU = b$ est donnée par $U = A\backslash b$.

2 Conditions au bord de Dirichlet homogènes

Dans cette première partie, on prendra les conditions de bord de Dirichlet homogènes suivantes pour (1b) :

$$u(0) = u(1) = 0.$$

On travaillera également avec plusieurs choix du membre de droite $f(x)$:

$$f(x) = \sin(\pi x), \quad x \in [0,1], \tag{2a}$$

$$f(x) = 1 - |1 - 2x|, \quad x \in [0,1], \tag{2b}$$

$$f(x) = \chi_{[1/4,3/4]}(x), \quad x \in [0,1]. \tag{2c}$$

On note Δx le pas en espace et J le nombre de points du maillage en espace situés à l'intérieur du segment $[0,1]$, avec $x_j = j\Delta x$ pour $j = 0,\dots,J+1$. On remarque que $J + 1 = 1/\Delta x$. On va donc chercher à calculer u_j valeur approchée de $u(x_j)$ pour chaque $j = 1,\dots,J$. Les conditions aux limites ne posent donc pas de problème, du moment où l'on impose

$$u_0 = u_{J+1} = 0.$$

L'objectif est d'implémenter le schéma aux différences finies suivant

$$-\frac{u_{j+1}-2u_j+u_{j-1}}{\Delta x^2} = f_j, \quad j=1,\dots,J,$$

où les $f_j = f(x_j)$. En notant $U = (u_1,\dots,u_J)^T$, on peut réécrire le schéma sous forme matricielle :

$$AU = \lambda F,$$

où $A \in \mathscr{M}_J(\mathbb{R})$ est une matrice creuse tri-diagonale, donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = \Delta x^2$ et $F = (f_1,\dots,f_J)^T$.

1. Construire une fonction qui assemble la matrice A en utilisant la commande `diag(u,k)` et qui prend comme argument J la dimension de la matrice. La matrice construite devra être creuse.
2. On se donne F à partir de la fonction (2a). On notera $E = (e_1,\dots,e_J)^T$ le vecteur des erreurs commises défini par $e_j = u(x_j) - u_j$ où $u(x_j)$ est l'évaluation en x_j de la solution exacte du problème et u_j est la $j$ème composante de la solution obtenue par le schéma aux différences finies.
   (a) Vérifier que $u(x) = \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x)$, $x \in [0,1]$, est l'unique solution de (1) lorsque f est donnée par (2a).
   (b) On prend $J = 20$. Résoudre le système linéaire $AU = \lambda F$ en utilisant la commande `backslash`. Visualiser la solution obtenue ainsi que l'erreur commise.
   (c) On prend $J = 20$. Résoudre le système linéaire $AU = \lambda F$ en utilisant les commandes `lufact(A)` et `lusolve(A,b)`. Visualiser la solution obtenue ainsi que l'erreur commise.
   (d) Pour chaque $J \in \{20, 50, 100, 200, 300\}$ calculer $\|E\|_\infty$ en utilisant la méthode de résolution de votre choix. On affichera sur une même figure $\log\|E\|_\infty$ en fonction de $\log(\Delta x)$. Que remarque-t-on ? Que conclure sur la convergence du schéma dans ce cas là ?
   (e) Même question que précédemment mais avec la norme $\|\cdot\|_2$.
3. Reprendre les questions précédentes pour les deux autres fonctions sources f données en (2b)-(2c).

3 Conditions au bord de Neumann homogènes

Dans cette seconde partie, nous allons considérer le problème aux limites suivant avec conditions de bord de Neumann homogènes :

$$-u''(x) + u(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{3a}$$
$$u'(0) = u'(1) = 0. \tag{3b}$$

On note Δx le pas en espace et J le nombre de pas en espace entre 0 et 1, avec $x_j = (j-1)\Delta x$ pour $j = 1, \dots, J+1$. On remarque ainsi que $J = 1/\Delta x$. On va donc chercher à calculer u_j valeur approchée de $u(x_j)$ pour chaque $j = 1, \dots, J+1$. Les conditions aux limites posent ici problème dans le sens où le schéma aux différences finies

$$-\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2} + u_j = f_j, \quad j = 1, \dots, J+1,$$

demande la connaissance des valeurs u_0 et u_{J+2} associées à des points en dehors de la grille. L'idée va être d'utiliser une discrétisation de la condition de bord pour exprimer u_0 et u_{J+2} en fonctions des autres u_j. Pour cela, on utilise l'approximation suivante :

$$u'(0) \approx \frac{u(\Delta x) - u(-\Delta x)}{2\Delta x} \text{ et } u'(1) \approx \frac{u(1+\Delta x) - u(1-\Delta x)}{2\Delta x}, \quad \Delta x \to 0.$$

En se souvenant que $u'(0) = u'(1) = 0$ on obtient les relations suivantes :

$$0 = \frac{u_2 - u_0}{2\Delta x} \text{ et } 0 = \frac{u_{J+2} - u_J}{2\Delta x},$$

de telle sorte que l'on impose :

$$u_0 = u_2 \text{ et } u_{J+2} = u_J.$$

On travaillera avec le terme source suivant

$$f(x) = \cos(\pi x), \quad x \in [0,1].$$

1. Vérifier que la solution exacte du problème (3) avec conditions de bord de Neumann homogènes est donnée par $u(x) = \frac{1}{1+\pi^2}\cos(\pi x)$ pour $x \in [0,1]$.
2. On note $U = (u_1, \dots, u_{J+1})^T$ ainsi que $F = (f_1, \dots, f_{J+1})^T$. Ecrire le schéma aux différences finies sous une forme matricielle $BU = \lambda F$ où $B \in \mathscr{M}_{J+1}(\mathbb{R})$ est une matrice creuse tri-diagonale et $\lambda = \Delta x^2$.
3. Construire une fonction qui assemble la matrice B en utilisant la commande `diag(u,k)` et qui prend comme argument J. La matrice construite devra être creuse.
4. On prend $J = 20$. Résoudre le système linéaire $BU = \lambda F$ en utilisant la commande `backslash`. Visualiser la solution obtenue ainsi que l'erreur commise.
5. On prend $J = 20$. Résoudre le système linéaire $BU = \lambda F$ en utilisant les commandes `lufact(A)` et `lusolve(A,b)`. Visualiser la solution obtenue ainsi que l'erreur commise.
6. Pour chaque $J \in \{20, 50, 100, 200, 300\}$ calculer $\|E\|_\infty$ en utilisant la méthode de résolution de votre choix. On affichera sur une même figure $\log \|E\|_\infty$ en fonction de $\log(\Delta x)$. Que remarque-t-on ? Que conclure sur la convergence du schéma dans ce cas là ?
7. Même question que précédemment mais avec la norme $\|\cdot\|_2$.

4 Conditions au bord de Dirichlet inhomogènes

Soient a et b deux réels. On considère les conditions de bord de Dirichlet inhomogènes suivantes pour (1b) :

$$u(0) = a \text{ et } u(1) = b.$$

A nouveau, on note Δx le pas en espace et J le nombre de points du maillage en espace situés à l'intérieur du segment $[0,1]$, avec $x_j = j\Delta x$ pour $j = 0, \dots, J+1$. Les conditions aux limites ne posent donc pas de problème, du moment où l'on impose

$$u_0 = a \text{ et } u_{J+1} = b.$$

L'objectif est d'implémenter le schéma aux différences finies suivant

$$-\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2} = f_j, \quad j = 1, \dots, J,$$

où les $f_j = f(x_j)$. La différence avec ce que l'on a fait précédemment est que pour $j = 1$, on obtient

$$-\frac{u_2 - 2u_1 + a}{\Delta x^2} = f_1,$$

ce qui se réécrit comme

$$-\frac{u_2 - 2u_1}{\Delta x^2} = f_1 + \frac{a}{\Delta x^2}.$$

De manière similaire en $j = J$, on a

$$-\frac{-2u_J + u_{J-1}}{\Delta x^2} = f_J + \frac{b}{\Delta x^2}.$$

En notant $U = (u_1, \dots, u_J)^T$, on peut réécrire le schéma sous forme matricielle :

$$AU = \lambda \widetilde{F},$$

où la matrice A est la même matrice que précédemment et le vecteur $\widetilde{F}$ est donné par

$$\widetilde{F} = \left(f_1 + \frac{a}{\Delta x^2}, f_2, \dots, f_{J-1}, f_J + \frac{b}{\Delta x^2}\right)^T.$$

Reprendre les questions de la partie 2 en prenant par exemple $a = 1$ et $b = -2$.

5 Un problème aux limites nonlinéaire

Dans cette dernière partie, nous allons chercher la [1] solution non nulle positive du problème nonlinéaire aux limites suivant :

$$u''(x) + 10\sin(u(x)) = 0, \quad x \in (0, 1), \tag{4a}$$

$$u(0) = u(1) = 0, \tag{4b}$$

en utilisant le schéma aux différences finies

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2} + 10\sin(u_j) = 0, \quad j = 1, \dots, J,$$

sachant que $u_0 = u_{J+1} = 0$ et que u_j est une approximation de la solution de (4) en $x_j = j\Delta x$ avec $\Delta x = \frac{1}{J+1}$. De façon équivalente, le problème peut se réécrire sous la forme

$$AU + 10\lambda \sin(U) = 0, \quad \lambda = \Delta x^2,$$

avec $\sin(U) = (\sin(u_1), \dots, \sin(u_J))^T$ et A la matrice du Laplacien. Il s'agit donc de résoudre un problème nonlinéaire. Pour cela on va utiliser la méthode de Newton. L'étape délicate consiste à trouver une bonne initialisation pour la méthode de Newton, c'est à dire un *bon* vecteur $U_0 \in \mathbb{R}^J$. Une idée consiste à prendre l'évaluation de la solution exacte de l'équation (4) obtenue en remplaçant $\sin(u)$ par une constante que l'on prendra égale à 1/5. La solution correspondante est donc donnée par $u_0(x) = x(1 - x)$ pour $x \in [0, 1]$. Implémenter la méthode de Newton pour résoudre (4). On s'arrêtera lorsque l'erreur relative est inférieure à 10^{-7}.

1. Prouvez le !