UPS TOULOUSE III **Le 18/04/2018**
M1 MAPI3 2018

Examen
Simulations aléatoires

Durée 2 heures

Note de cours autorisées

1 Chico

On considère X une variable aléatoire de loi de Cauchy. On rappelle que X a pour densité

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad (x \in \mathbb{R}).$$

1. Calculer les fonctions de répartition et de quantile de X.
2. Montrer que X et $\frac{1}{X}$ ont la même loi.
3. Pour $n \in \mathbb{N}_*$, on considère les variables i.i.d. $X_1, \cdots, X_n$ de même loi que X. On pose, $X_{(n)} := \max_{i=1,\ldots,n} X_i$. Calculer la fonction de répartition et la densité de $X_{(n)}$.
4. Monter que $\frac{X_{(n)}}{n}$ converge en loi vers une loi limite portée par $\mathbb{R}^+$ dont on précisera la densité.
5. On pose maintenant $Y_i := |X_i|$, $(i = 1, \cdots, n)$ et $Y_{(1)} := \min_{i=1,\ldots,n} Y_i$. En utilisant les questions précédentes montrer qu'il existe une suite décroissante de nombres réels strictement positive (a_n) telle que $a_n Y_{(1)}$ converge en loi vers une loi dont on précisera la densité.
6. Écrire un petit programme qui illustre la convergence en loi de $Y_{(1)}$.

2 Branché en cellule

Pour $\theta \in]0, 1[$, soit X une variable aléatoire dont la loi est concentrée sur $\{0, 2\}$ avec $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \theta$. Une population de cellules a la dynamique suivante :

- l'instant 0 il y a seulement une cellule.
- À l'instant $t \in \mathbb{N}$, chacune des cellules vivantes donne naissance à 0 cellule avec probabilité θ ou à 2 cellules avec probabilité $1 - \theta$ puis meurt.
- Les nombres de descendants de toutes les cellules sont indépendants.

1. Pour quelles valeurs de θ la population s'éteint presque sûrement ?
2. On suppose que la population ne s'éteint pas presque sûrement. Quelle est alors la probabilité d'extinction ?
3. On appelle Z_t le nombre de cellules vivantes à l'instant $t \in \mathbb{N}$. Montrer que $(\frac{Z_t}{2^t \theta^t}$ est une martingale. Cette martingale converge-t-elle dans L^2 ?
4. Écrire un programme pour illustrer le point 2) à l'aide d'une courbe et de la droite $y = x$.

3 Intégrale de Itô-Wiener

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ le mouvement brownien standard. Pour $n \in \mathbb{N}_*$ et $j = 0, \dots, n$, on pose $t_j^{(n)} := j/n$. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. On pose

$$I_n(f) := \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j^{(n)})(B_{t_{j+1}^{(n)}} - B_{t_j^{(n)}}).$$

1. Soit Z_n un vecteur aléatoire gaussien centré de matrice de variance covariance C_n. Montrer que si la suite de matrices $(C_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$ converge vers C où C est symétrique définie positive, alors la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_*}$ converge en loi vers une gaussienne bidimensionnelle centrée de matrice de variance covariance C.

   (*Dans la suite de l'exercice, on pourra utiliser ce résultat si nécessaire*).
2. Soit g_1, g_2 deux fonctions continues sur $[0,1]$. Quelle est la limite en loi de la suite de vecteurs aléatoires $\begin{pmatrix} I_n(g_1) \\ I_n(g_2) \end{pmatrix}$? En fait on peut montrer que la convergence a même lieu dans L^2 et l'on pose

$$\int_0^1 g(t)dB_t \overset{L^2}{:=} \lim_{n\to\infty} I_n(g).$$

3. Calculer

$$\mathbb{E}\left(\int_0^1 t^2 dB_t \,\middle|\, \int_0^1 \cos(2\pi t)dB_t\right).$$