NOTES DU COURS DE TOPOLOGIE EN M1 ESR UPS 2020

FRANCESCO COSTANTINO

Contents

1. Introduction 1
2. Rappels de topologie générale 3
3. Le groupe fondamental et les revetements 15
4. Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$ 28
5. Variétés différentiables et variétés à bord 36
6. Variétés orientées et degré des applications 47
7. Formes différentielles sur une variété différentiable 50
8. Homologie cellulaire et simpliciale 56
9. Homologie singulière 65

References 74

1. Introduction

La topologie est la branche des mathématiques qui s'intéresse à la "forme des espaces". On définit un espace topologique d'une manière très abstraite, et on définit une relation d'équivalence sur ces espaces ("être homéomorphes") qui est à la fois faible et restrictive. On plaisante parfois que pour un topologue une sphère et un cube sont la même chose : plus formellement ils sont homéomorphes. Cette relation est donc faible car elle oublie toute propriété géométrique des espaces. Mais en même temps elle est fine car elle donne lieu à des distinctions entre les espaces ayant différentes formes (pour un topologue une sphère n'est pas la même chose qu'un tore).

L'intêret d'étudier une relation si faible est la force de la topologie qui désormais est appliquée et utilisée en plusieurs domaines même hors des mathématiques pures. Par exemple en la théorie de la computation quantique l'on utilise la théorie des tresses (des particuliers objects topologiques) comme un des modèles pour l'ordinateur quantique exactement parce-qu'en déformant une tresse on ne la change pas ("stabilité topologique"). En statistiques l'on étudie la "forme" des nuages des points par leur "homologie persistente", parce que les informations qu'on en tire ne dépendent pas des métriques qu'on a choisi sur les données (unités, échelles). En physique de la matière récemment un prix Nobel a été attribué à des chercheurs ayant obtenu des nouveaux résultats sur les “états topologiques de la matière”. En relativité générale la forme de l’espace temps est objet d’étude aussi par le biais des relations entre géométrie et topologie en petite dimension. En physique théorique plusieurs modèles pour la gravité quantique sont basés sur des “théories topologiques des champs” exactement car elles ne dépendent pas de la géométrie.

En mathématique la topologie est à la base des études d’analyse fonctionnelle, de topologie algébrique, de géométrie algébrique, théorie des catégories, de topologie différentielle et de géométrie riemannienne et symplectique.

Dans ce cours nous allons d’abord rappeler les notions de base d’espace topologiques (et ses différents axiomes de séparabilité, dénombrabilité, compacité et connexité) et de fonctions continues. La plus part de ces notions aura été déjà vue en le cours de topologie en L3 mais surtout dans le contexte des espaces vectoriels topolgiques qui ne représentent qu’un échantillon très restreint de ce que peut être un espace topologique : iç̧i nous nous intéresserons donc à des nouveaux exemples.

Dans la deuxième partie nous montrerons comment la topologie interagit avec l’algèbre : l’exemple principal de cela est le groupe fondamental. Nous définirons la notion d’homotopie d’applications continues, de lacet, et de composition de lacets. Puis nous étudierons le groupe fondamental et comment le calculer. Enfin nous définirons la notion de revêtement, qui est strictement liée à celle de groupe fondamental, et nous définirons le revêtement universel d’un espace topologique.

Dans la dernière partie, après avoir rappelé des résultats de base sur les fonctions en plusieurs variables réelles, nous allons définir la notion de variété différentiable, de fonctions entre variétés, de différentiel d’une fonction et d’espace tangent. Nous allons définir la notion de variété à bord et prouver le théorème du point fixe de Brouwer; puis nous définirons le dégré d’une fonction entre variétés et prouverons son invariance par homotopie.

Si le temps nous le permettra nous nous intéresserons à la théorie de l’homologie simpliciale et/ou singulière, qui est à la base de la topologie algébrique.

2. Rappels de topologie générale

2.1. **Définitions de base.** Dans cette section nous allons d'abord définir les "objets de base" : les espaces topologiques. Puis nous définirons leurs "morphismes" : les fonctions continues. Puis leurs "sous-objets", leurs "objets quotients" et le produit d'espaces topologiques. Nous donnerons des premiers exemples d'espaces topologiques particulièrement "joli" : ceux venant d'espaces métriques.

Définition 2.1 (Espace topologique)**.** Soit X un ensemble; on note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X, c'est à dire l'ensemble des sous-ensembles de X. Une *topologie* sur X est un un sous ensemble $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ dont les éléments sont dits les "ouverts" de X qui satisfait les conditions suivantes :

(1) $X, \emptyset \in \mathcal{T}$;
(2) Si $U_i, i \in I \in \mathcal{T}$ alors $\cup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}$;
(3) Si $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T}$ alors $U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \mathcal{T}$.

Un espace topologique est une couple $(X, \mathcal{T})$ où $\mathcal{T}$ est une topologie sur X, (mais en général on parle d'un espace topologique X, sans expliciter un nom pour $\mathcal{T}$.) Si $U \in \mathcal{T}$ alors U^c est dit un *fermé*.

Exemple 2.2. La *topologie triviale* sur X est $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\} \subset \mathcal{P}(X)$. La *topologie discrete* sur X est $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$.

Exercice 2.3. Faire la liste de toutes les topologies possibles sur l'ensemble $X_2 = \{1, 2\}$ et puis sur l'ensemble $X_3 = \{1, 2, 3\}$.

Définition 2.4 (Métrique)**.** Une métrique sur un ensemble X est une application $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que : $d(x, y) = 0 \iff x = y$, $d(x, y) = d(y, x)$ $\forall x, y \in X$ et $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$, $\forall x, y, z \in X$. Pour tout $x \in X$ et $r \in R$ on appelle boule ouverte de centre x et rayon r l'ensemble $B(x; r) = \{y \in X | d(x, y) < r\}$. Un espace métrique est une couple (X, d) où d est une métrique sur X.

Lemme 2.5. *Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'un sous-ensemble U de X est "ouvert" si $\forall x \in U$ il existe $r > 0$ tel que $B(x; r) \subset U$. Alors, l'ensemble des ouverts forme une topologie sur X, dite la topologie induite par la métrique.*

Exercice 2.6. Prouver le lemme.

Exemple 2.7. Si on prend $X = \mathbb{R}^n$ et d la métrique associée à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ alors on trouve la topologie"standard". Mais si on prend une autre norme sur $\mathbb{R}^n$ et d la métrique qui lui est associé, grâce au fait que deux normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes, on a que les topologies induites sont les mêmes : la topologie de $\mathbb{R}^n$ donc est "plus fondamentale" que la métrique qui l'induit.

On a la suivante :

Définition 2.8 (Espaces topologiques métrisables)**.** On dit qu'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est métrisable s'il existe une metrique d dont la topologie induite est $\mathcal{T}$.

Remarque 2.9. En général les espaces topologiques ne sont métrisables que s'ils satisfont certaines conditions que nous détaillerons par la suite. Les espaces topologiques métrisables sont donc particulièrement plaisants.

Définition 2.10 (Fonctions continues)**.** Soit X, Y deux espaces topologiques. Une fonction continue $f : X \to Y$ est une application telle que $\forall U \in \mathcal{T}(Y)$ son image inverse $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X.

Exercice 2.11. Montrer que l'identité $id : X \to X$ est une application continue et que si $f : X \to Y$ est continue et $g : Y \to Z$ est continue alors $g \circ f : X \to Z$ est continue.

Si les fonctions continues sont les "morphismes" de "la catégorie des espaces topologiques", les homéomorphismes en sont les "isomorphismes" :

Définition 2.12 (Homéomorphismes)**.** Un homéomorphisme $f : X \to Y$ est une bijection continue avec inverse continue.

2.2. **Operations avec les espaces topologiques.**

Définition 2.13 (Topologie induite)**.** Soit $Y \subset X$ un sous-ensemble. La topologie induite sur Y est celle dont les ouverts sont $U \cap Y, \forall U \in \mathcal{T}$.

Exemple 2.14 (Des exemples importants d'espaces topologiques)**.** Les suivants, munis de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^n$ sont des espaces topologiques remarquables qui seront souvent utilisés dans la suite :

(1) $S^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1\}$ (la sphère de dimension n).
(2) $B^{n+1} = D^{n+1} = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum_{i=0}^n x_i^2 \leq 1\}$ (la boule ou disque de dimension $n+1$).
(3) $I^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | |x_i| \leq 1 \ \forall i\}$ (le cube de dimension n).

Exercice 2.15. Montrer que la topologie induite sur Y est bien une topologie sur Y et que l'inclusion $i : Y \to X$ est continue si l'on munit Y de cette topologie.

Exercice 2.16. Montrer que B^{n+1} et D^{n+1} sont homéomorphes. (Aide : on pourra utiliser le fait qu'ils sont les boules unité de deux normes sur $\mathbb{R}^{n+1}$.)

Définition 2.17 (Topologie quotient)**.** Soit $x \sim y$ une relation d'équivalence sur un espace topologique X et soit $Y = X/\sim$. Notons $[x] \in Y$ la classe d'équivalence d'un point $x \in X$ et $\pi : X \to Y$ la projection au quotient. La *topologie quotient* sur Y est celle dont les ouverts sont les $U \subset Y$ tels que

$\pi^{-1}(U) \subset X$ est un ouvert. De façon équivalente, ce sont les projections dans Y des ouverts saturés par la relation d'équivalence.

Exercice 2.18. Montrer que la topologie quotient est bien une topologie et que l'application π est continue si l'on munit Y de cette topologie.

Exemple 2.19. Sur $\mathbb{R}$ soit $x \sim y \iff xy > 0$ ou $x = y = 0$. Le quotient a 3 points $\{[-1], [0], [1]\}$ où $\{[0]\}$ est un fermé et $\{[1]\}$ et $\{[-1]\}$ sont des ouverts. Cette topologie n'es pas $T1$ (voir après) car $\{[1]\}$ n'est pas un fermé.

Exemple 2.20. Sur $\mathbb{R}^n$ soit $x \sim y$ ssi $x - y \in \mathbb{Z}^n$. Alors $\mathbb{R}^n/\sim$ est le tore de dimension n noté T^n.

Définition 2.21 (Produit d'espaces topologiques)**.** Soit I un ensemble et pour tout $i \in I$ soit X_i un espace topologique; la *topologie produit* sur $X = \prod_{i\in I} X_i$ (le produit cartésien des ensembles sous-jacents X_i) est celle dont les ouverts sont les unions de sous-ensembles de la forme $\prod_i U_i$ où $U_i \subset X_i$ est un ouvert pour tout i et $U_i \neq X_i$ seulement pour un nombre fini de i.

Exercice 2.22. Montrer que la topologie produit est la topologie moins fine parmi toutes les topologies qui rendent les projections $p_i : X \to X_i$ continues.

2.3. **Prebases et bases.**

Exercice 2.23. Montrer que si $\mathcal{T}_i, i \in I$ sont des topologies sur X alors aussi $\bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ l'est.

Définition 2.24 (Prebase)**.** Soit $A \subset \mathcal{P}(X)$ un ensemble. On défini la "topologie engendrée par A" comme l'intersection de toutes les topologies qui contiennent A (pourquoi existe-t-il de telles topologies?). On appelle A une prebase de cette topologie.

Exercice 2.25. Avec la notation ci-dessus, soit $B \subset \mathcal{P}(X)$ l'ensemble formé par les intersections finies d'éléments de A et soit $\mathcal{T}$ celui formé par des unions (quelconques) d'éléments de B. Montrer que la topologie engendrée par A coincide avec $\mathcal{T}$.

Exercice 2.26. Soit (X, d) et $A \subset \mathcal{P}(X)$ l'ensemble des boules ouvertes dans X. Montrer que la topologie engendrée par A est celle induite par la métrique d.

Exemple 2.27. La topologie standard de $\mathbb{R}^n$ (celle induite par la métrique euclidienne) est engendrée par les boules ouvertes.

Définition 2.28 (Bases et voisinages)**.** Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dit qu'un sous-ensemble $V \subset X$ est un *voisinage* d'un autre ensemble $E \subset X$ s'il existe un ouvert U tel que $E \subset U \subset V$. En particulier, $\forall x \in X$ on note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.

Une base de X est un ensemble $\mathcal{B}$ d'ouverts de X tel que tout ouvert est une union d'éléments de $\mathcal{B}$. Une base locale autour de $x \in X$ est un sous ensemble $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{V}(x)$ tel que $\forall V \in \mathcal{V}(x)$ $\exists b \in \mathcal{B}(x)$ tel que $b \subset V$.

Définition 2.29 (Adhérence, partie intérieure, et frontière)**.** L'adhérence d'un ensemble $E \subset X$, notée $\overline{E}$, est l'intersection des fermés qui contiennent E. Sa partie intérieure, notée $\mathring{E}$ est l'union des ouverts contenus dans E. La frontière de E est $\partial E := \overline{E} \setminus \mathring{E}$. Un point x est d'accumulation pour E si tout ouvert U qui contient x contient aussi un point $y \in E \setminus \{x\}$.

Exercice 2.30. Montrer que tout point de ∂E est d'accumulation et que $\overline{E}$ est l'ensemble des points d'accumulation de E.

2.4. **Axiomes de separabilité et de dénombrabilité.** Comme on l'a remarqué avant, pas tous les espaces topologique sont "joli". Notamment en opérant des quotients topologiques on peut obtenir des espaces plus compliqués. Afin de définir proprement ce qu'on entend par "joli" nous allons par la suite donner une liste de propriété que l'on souhaite d'un espace topologique.

Définition 2.31. Soit X un espace topologique. On dit que X est :

(1) $T1$ $\forall x \neq y \in X$, $\exists U \in \mathcal{T}$ qui contient x mais pas y.
(2) $T2$ ou "Haussdorf" si : $\forall x \neq y \in X$ il existe ouverts disjoints U, V tels que $x \in U, y \in V$.
(3) $T3$ s'il est $T1$ et de plus $\forall x \in X$ et pour tout fermé $C \subset X$ t.q. $x \notin C$, il existe des ouverts disjoints U et V tels que $x \in U$ et $C \subset V$.
(4) $T4$ s'il est $T1$ et de plus $\forall C_1, C_2 \subset X$ fermés disjoints, il existe ouverts U, V disjoints et contenant respectivement C_1 et C_2.

Exercice 2.32. Prouver que X est $T1$ ssi tous ses points sont des fermés.

Exercice 2.33. Prouver que si X est $T2$ alors il est aussi $T1$, s'il est $T3$ il est aussi $T2$ et que s'il est $T4$ il est aussi $T3$.

Exercice 2.34. Montrer qu'un sous-espace d'un espace Haussdorf est Haussdorf.

Lemme 2.35 (Lemme de Urysohn)**.** *Soit X un espace $T4$, et $C_0, C_1 \subset X$ deux fermés. Alors il existe une fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$ telle que $f|_{C_0} = 0$ et $f|_{C_1} = 1$.*

Proof. Idée : on va construire des ouverts $U_p, p \in \mathbb{Q}$ tels que $C_0 \subset U_0$, $U_1 = X \setminus C_1$ et $\forall p < q$ on a $\overline{U_p} \subset U_q$, puis on définit $f : X \to [0, 1]$ comme $f(x) = inf\{q_i | x \in U_{q_i}\}$. On vérifie ensuite que f est continue et a la propriété souhaitée.

D'abord on numérote les rationnels dans $[0, 1]$ de sorte que $q_0 = 0, q_1 = 1$. On définit U_0 comme un ouvert qui sépare C_0 de C_1 et $U_1 = X \setminus C_1$. Puis

U_{q_n} comme un ouvert qui sépare $\overline{U_{max\{q_i|q_i<q_n,i<n\}}}$ de $X \setminus U_{min\{q_i|q_i>q_n,i<n\}}$. On remarque que U_{q_n} contient tout $U_{q_i}, q_i < q_n$ et est contenu dans tout $U_{q_i}, q_i > q_n$. Maintenant $f(x)$ est continue car $\forall c < f(x) < d$ on peut trouver $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ tels que $c < q_1 < f(x) < q_2 < d$ et un ouvert contenu dans $f^{-1}(]c,d[)$ est $U_{q_2} \setminus \overline{U_{q_1}}$. □

Définition 2.36 (Axiomes de dénombrabilité et séparabilité)**.** On dit qu'un espace est $C1$ si $\forall x \in X$ il existe une base locale dénombrable autour de x. Il est $C2$ s'il existe une base dénombrable de X. Il est *séparable* s'il existe un sous-ensemble dénombrable de X qui est *dense*, c'est à dire qui intersecte tout ouvert non-vide de $\mathcal{T}$.

Exercice 2.37. Montrer que $\mathbb{R}^n$ avec sa topologie standard est $C2$ et séparable.

Exercice 2.38. Montrer qu'un sous-espace fermé d'un espace à base dénombrable est à base dénombrable.

2.5. **Existence de métriques.**

Exercice 2.39. Montrer qu'un espace métrique est $T1, T2, T3$. Puis, montrer qu'il est aussi $T4$. Montrer qu'il est aussi C_1.

Exercice 2.40. Montrer que tout espace $C2$ et $T3$ est aussi $T4$. (Idée: Puisque $T_3 \implies T_2$ donné deux points $x \in C_1$ et $y \in C_2$ on peut les séparer par des ouverts U_n et V_n de la base dénombrable. En prenant l'union de ces ouverts lorsque x et y varient on trouve des unions dénombrables d'ouverts de la base qui couvrent respectivement C_1 et C_2. Mais qui ne sont pas forcement disjoints il faut donc modifier cette construction...)

Théorème 2.41 (Urysohn)**.** *Soit X espace topologique $T3$ et $C2$. Alors il est metrizable.*

Proof. Nous en donnons un esquisse. D'abord on remarque que tout espace $C2$ et $T3$ est aussi $T4$. Puis on utilise le Lemme 2.42, et on obtient une collection dénombrable $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ de fonctions continues $f_n : X \to [0,1]$. L'application $f : X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ ainsi obtenue est injective. De plus $[0,1]^{\mathbb{N}}$ avec la métrique $d_0((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) := \sup(\{|x_i - y_i|\})$ est un espace métrique. On montre que f est continue (exercice) et que pour tout ouvert $U \subset X$ $f(U) \subset [0,1]^{\mathbb{N}}$ est ouvert. En effet si $z_0 = f(x_0) \in f(U)$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f_n(x_0) \neq 0$ et $f_n|_{X\setminus U} = 0$. Mais alors l'ouvert $W_n := f(X) \cap \pi_n^{-1}(0,\infty)$ (où $\pi_n : [0,1]^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ est la projection sur la n^{eme}coordonnée) est contenu dans U et contient z_0, ce qui prouve que $f(U)$ est ouvert. L'application f est alors un plongement: on définit alors une métrique sur X par $d(x,y) := d_0(f(x), f(y))$. □

Lemme 2.42. *Soit X un espace $C2$ et $T4$. Alors il existe une famille dénombrable de fonctions continues $f_n : X \to [0,1]$ telle que pour tout $x_0 \in X$ et tout voisinage U de x_0 il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $f_n(x_0) \neq 0$ et $f_n|_{X\setminus U} = 0$.*

Proof. Puisque X est $C4$ on peut trouver deux ouverts B_n et B_m dans la base dénombrable tels que $x \in \overline{B}_m \subset B_n \subset U$. Alors par le Lemme d'Urysohn il existe une fonction continue $f_{m,n}$ qui vaut 1 sur B_m et 0 à l'extérieur de B_n. $\square$

Remarque 2.43. Le lemme d'Urysohn done une condition suffisante mais pas nécéssaire. En effet si on prend par exemple $\mathbb{R}$ avec la topologie discrète il est métrisable mais pas $C2$.

2.6. **Compacité et connexité.**

Définition 2.44. Un recouvrement d'un espace topologique X est un ensemble d'ouverts $U_i, i \in I$ tel que $\cup_{i\in I} U_i = X$. Il est *localement fini* si $\forall x \in X$ $\#\{i | x \in U_i\}$ est fini. Il est fini si I est fini. Un sous-recouvrement de $\{U_i\}$ est un ensemble $\{U_j\}, j \in J \subset I$.

Définition 2.45 (Compacité)**.** Un espace topologique est *quasi compact* si tout recouvrement contient un sous-recouvrement fini et *compact* s'il est quasi compact et Haussdorf. Il est *paracompacte* si tout recouvrement contient un sous-recouvrement localement fini. Il est *localement compact* si tout $x \in X$ admet une base de voisinages relativement compactes (c'est à dire dont la clotûre est compacte).

Exercice 2.46. Si $C \subset X$ est un sous-ensemble compact et X est Haussdorf, alors C est fermé.

Exercice 2.47. Montrer que si $f : X \to Y$ est une application continue et X est quasi-compact alors $f(X)$ est compact. De plus si X, Y sont Haussdorf alors $f(X)$ est compact. Trouver un exemple où Y n'est pas Haussdorf et $f(X)$ n'est pas compact.

Exercice 2.48. Montrer que si X est un espace métrique alors un compact $C \subset X$ est fermé et borné (i.e. contenu dans une boule de rayon fini). Montrer que la réciproque est vraie dans $\mathbb{R}$. En déduire qu'une application continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ admet un maximum et un minimum.

Exercice 2.49. Montrer que si X est un espace métrique localement compact alors un fermé borné compact $C \subset X$ est compact.

Exercice 2.50. Montrer que si X est un espace métrique compact, alors toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a au moins un point d'accumulation.

Exercice 2.51. Soit $X = L^2([0, 1])$ montrer que la boule unité de X n'est pas compacte.

Lemme 2.52 (Lemme de Baire)**.** *Soit X un espace topologique Haussdorf localement compact. Alors l'intersection d'une quantité dénombrable d'ouverts denses est dense.*

Proof. Soit $x \in X$ et C_0 un voisinage compact de x. Alors il existe $x_1 \in \mathring{C}_0 \cap U_1$ et un voisinage compacte C_1 de x_1 contenu dans $\mathring{C} \cap U_1$. Par récurrence, on définit $x_n \in \mathring{C}_{n-1} \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n$ et son voisinage compact $C_n \subset \mathring{C}_{n-1} \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n$. On a donc une suite emboitée de compacts. Leur intersection est non-vide car autrement $\{C \setminus C_i, i \in \mathbb{N}\}$ serait un recouvrement de C par ouverts n'admettant pas un sous-recouvrement fini. Un point dans leur intersection est donc dans l'intersection de C et de tous les U_i. □

Remarque 2.53. L'énoncé est faux si on ne fait pas l'hypothèse de denombrabilité de l'ensemble des ouverts : prenez $X = \mathbb{R}$ et $U_x = \mathbb{R} \setminus \{x\}$: les ouverts $\{U_x, x \in \mathbb{R}\}$ sont denses mais leur intersection est vide.

On a le suivant :

Théorème 2.54 (Théorème de Tychonoff)**.** *Le produit de n'importe quelle quantité d'espaces topologiques compacts, est compact.*

2.7. **Connexité.**

Définition 2.55 (Connexité)**.** Un espace topologique X est connexe s'il n'est pas l'union de deux ouverts disjoints.

Exercice 2.56.
- Si $x \in X$ et $C_i, i \in I$ sont sous-ensembles connexes de X qui le contiennent, alors $\bigcup_{i\in I} C_i$ est connexe.
- Si $C \subset X$ est connexe alors $\overline{C}$ est connexe.

Solution 2.57. 1). Si $\bigcup C_i = U \cup V$ alors pour tout $i \in I$ on a $U \cap C_i$ et $V \cap C_i$ sont deux ouverts disjoints qui couvrent C_i donc l'un des deux doit être vide, disons $V \cap C_i$. Donc $C_i \subset U$ et donc $x \in U$. Mais alors U contient tout C_i et donc leur union et alors $V = \emptyset$. 2). Si $\overline{C} = U \cup V, U \cap V = \emptyset$ alors $U \cap C$ et $V \cap C$ sont ouverts disjoints qui couvrent C et donc $C \subset U$ (par exemple). Mais alors si $V \neq \emptyset$ on a $V \subset \overline{C} \setminus C$ et donc $\overline{C} \setminus V$ serait un fermé strictement plus petit que $\overline{C}$ et qui contient C. Absurde.

Définition 2.58 (Composante connexe)**.** Grâce à l'exercice 2.56 tout point de X est contenu dans un connexe maximal qui le contient et ce connexe est un fermé : c'est ce qu'on appelle une *composante connexe* de X.

Exercice 2.59. Deux composantes connexes distinctes de X sont disjointes.

Remarque 2.60. Grâce à cet exercice, on a que les composantes connexes de X forment une partition de X en fermés. S'il y a un nombre fini de composantes connexes pour X alors chaque composante connexe est aussi ouverte. On observe enfin qu'un espace topologique X est connexe si sa seule composante connexe est X.

Définition 2.61. Un espace topologique est *localement connexe* si tout point admet une base de voisinages connexes.

Un espace topologique est *connexe par arcs* si $\forall x, y \in X$ il existe une application continue $\alpha : [0,1] \to X$ telle que $\alpha(0) = x, \alpha(1) = y$.

Il est *localement connexe par arc* si tout point admet une base de voisinages connexes par arcs.

Exercice 2.62. Exhiber un exemple d'espace qui soit localement connexe mais pas connexe.

Exercice 2.63. Montrer que l'espace

$$[0,1] \times \{0\} \cup_{n\in\mathbb{N}} \{\frac{1}{n}\} \times [0,1] \cup \{0\} \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$$

est connexe et connexe par arcs mais pas localement connexe ni localement connexe par arcs.

Exercice 2.64. Exhiber un exemple d'espace qui soit connexe mais pas connexe par arcs.

Exercice 2.65. Montrer que dans un espace localement connexe les composantes sont des ouverts.

Exercice 2.66. Montrer que si X est un espace connexe et $f : X \to Y$ est continue alors $f(X)$ est contenu dans une seule composante connexe de Y.

Exercice 2.67. Montrer qu'un espace connexe par arcs est aussi connexe. En conclure qu'un espace localement connexe par arcs est aussi localement connexe.

Exercice 2.68. Montrer qu'un espace qui soit connexe et localement connexe par arcs est aussi connexe par arcs.

2.8. **Espaces métriques complets.** Soit (X, d) un espace métrique.

Définition 2.69. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N \; t.q. \; d(x_n, x_m) < \epsilon \; \forall n, m > N.$$

Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in X$ si $\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0$. Un espace métrique (X, d) est *complet* si toute suite de Cauchy converge vers un point limite dans X.

Proposition 2.70 (Completion métrique)**.** *Soit (X, d) un espace métrique. Il existe un espace métrique (X', d') complet et une application $i : X \to X'$ qui est isométrique (i.e. $d'(i(x), i(y)) = d(x, y)$ $\forall x, y \in X$). De plus parmi tous les triplets (X', d', i) comme ci dessus, il y en a un "universel" au sens que si (X'', d'', i'') est un autre triplet alors il existe une application isométrique $f : X' \to X''$ telle que $f \circ i = i''$.*

Proof. Idée de preuve. Soit

$$X' = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X \text{ de Cauchy}\}/\sim$$

où deux suites de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes si $\forall\epsilon\ \exists N$ s.t. $d(x_n, y_m) < \epsilon\ \forall n, m > N$. On définit une métrique sur X' par

$$d'((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

(exercice: c'est bien défini et c'est une métrique).

On plonge X dans X' par les suites constantes (qui sont bien de Cauchy !) : on vérifie immédiatement qu'on a un plongement isométrique $i : X \to X'$. De plus $i(X)$ est dense dans X' en effet si $p \in X'$ es représenté par une suite de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors on montre que la suite $i(u_n)$ de points de X' converge vers p (exercice: attention à ne pas confondre les points de X' qui sont des classes d'équivalence de suites et les suites de points de X', qui donc sont des suites de classes d'équivalence de suites...).

Enfin on montre que X' est complet : si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de X' (une suite de classes d'équivalence de suites de Cauchy dans X) alors, puisque $i(X)$ est dense, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il y a un point de la forme $i(u_n)$ tel que $d(p_n, i(u_n)) < 2^{-n}$. Mais alors la suite $(u_n)_{n\in N}$ est de Cauchy car $d(u_n, u_m) < d(u_n, p_n) + d(p_n, p_m) + d(p_m, u_m) < 2^{-n} + d(p_n, p_m) + 2^{-m}$ et par hypothèse p_m est de Cauchy. On vérifie alors que le point q de X' représenté par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la limite de (p_m). □

Remarque 2.71. La construction ci dessus est la généralisation de celle qui définit $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$!

Lemme 2.72 (Lemme de Baire)**.** *Soit (X, d) un espace métrique complet. Alors l'intersection d'une quantité d'ouverts denses est dense.*

Proof. Il s'agit d'imiter la preuve de la version donnée pour les espaces localement compactes : au lieu des C_i prenez des boules de rayons décroissant vers 0 et emboitées. La suite de leurs centres est de Cauchy donc elle converge à un point qui est dans tous les U_i. □

2.9. **Exemples clés.**

2.9.1. *Espaces de Banach.* Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On rappelle qu'une norme est par définition une application telle que :

$$||x|| = 0 \iff x = 0, ||\lambda x|| = |\lambda|||x||, ||x+y|| \leq ||x||+||y||, \forall x, y \in V, \forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

La métrique induite par la norme est $d(v, w) := ||v - w||$; la topologie induite par cette métrique est aussi dite "topologie forte". Un espace de Banach est un espace vectoriel normé, qui est complet par rapport à la métrique de la norme.

Exercice 2.73. Deux normes sur V sont équivalentes s'il existe des constantes positives telles que $c_1||v||_1 \leq ||v||_2 \leq c_2||v||_1 \ \forall v \in V$. Montrer que les topologies induites par deux normes équivalentes sont les mêmes.

Exercice 2.74. Montrer que deux normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Exercice 2.75. Soit $V = C^0([0,1];\mathbb{R})$. Montrer que les norme $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_2$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 2.76. Montrer que si (X,d) est un espace métrique et $C \subset X$ est un compact, alors toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de C admet une sous-suite convergente dans C.

Exercice 2.77. Montrer que la boule unité de $L^2(\mathbb{R})$ n'est pas compacte.

Définition 2.78 (Topologie faible)**.** La topologie faible sur $L^2(\mathbb{R})$ est celle engendrée par les ouverts $f^{-1}(]a,b[)$ où $f : L^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est $f(y) = \langle x, y\rangle$ pour quelque $x \in L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 2.79. Montrer que tout ouvert de la topologie faible est aussi un ouvert de la topologie forte.

Exercice 2.80. Montrer que la boule unité est fermée dans $L^2([0,1])$ avec la topologie forte et aussi avec la topologie faible.

Exercice 2.81 (Théorème de Banach-Alaouglu)**.** Pour tout $f \in L^2([0,1])$ soit $\langle f,\cdot\rangle : L^2([0,1]) \to \mathbb{R}$ l'application linéaire de produit scalaire avec f. Soit aussi B la boule unité de $L^2([0,1])$. Montrer que $x \to \times_{f\in B}\langle f,x\rangle$ est un homéomorphisme de $L^2([0,1])$ muni de la topologie faible avec son image dans $\mathbb{R}^{L^2([0,1])}$ et que l'image de B est contenue dans $[-1,1]^{L^2([0,1])}$. En appliquant le théorème de Tychonoff en conclure que la boule unité est compacte par rapport à la topologie faible de $L^2([0,1])$.

Remarque 2.82. Nous avons formulé le théorème de Banach-Alaouglu seulement pour un space de Hilbert mais en général il dit que la boulé unité du dual d'un espace de Banach est compacte pour la topologie faible $*$.

Exercice 2.83. Montrer que la topologie faible est strictement plus faible que la topologie forte sur $L^2([0,1])$.

2.9.2. *Topologie de Zariski.* Soit k un corps (pensez à $\mathbb{C}$ pour faire simple) et $k[x_1,\dots x_n]$. On défini une topologie sur k^n par: les fermés sont les lieux de zero d'un idéal de polynômes dans $k[x_1,\dots x_n]$.

Exercice 2.84. Montrer que cela défini bien une topologie.

Exercice 2.85. Montrer que pour $k = \mathbb{C}$ cette topologie n'est pas Haussdorf, donc pas métrisable.

Exercice 2.86. Montrer que si $k = \mathbb{C}$ ou $k = \mathbb{R}$ la topologie de Zariski est moins fine que la topologie standard sur $\mathbb{C}^n$ (resp. $\mathbb{R}^n$), c'est à dire tout ouvert de Zariski est aussi un ouvert standard, mais pas la réciproque.

La topologie de Zariski est cruciale dans la géométrie algébrique, la branche de la géométrie qui étudie les "variétés algébriques" définies par des équations polynomiales. Remarquez que k peut être un corps quelconque, par exemple F_p. L'étude des courbes sur un corps fini a plusieurs applications, comme la cryptographie ou la théorie des codes à correction d'erreurs.

Un autre exemple important est la topologie qu'on peut donner au spectre d'un anneau commutatif R. On rappelle que

$$spec(R) = \{P \subset R, P \text{ ideal premier}\}$$

et on défini une topologie sur $spec(R)$ dont les fermés sont ceux de la forme $F(I)$ avec I idéal de R définis par $F(I) = \{P \in spec(R) | I \subset P\}$. On vérifie qu'il s'agit bien d'une topologie (non séparée). En général les points fermés sont les ideaux maximaux mais donc il peut y avoir aussi des points non fermés. Cette construction, qui est à la base de la géométrie algébrique moderne peut être comprise en lisant le 1er chapitre du livre de Atiyah-Mc Donalds "Introduction to commutative algebra" (cf. Exercice 15 dans le livre).

2.9.3. *Graphes.*

Définition 2.87 (Graphe non orienté)**.** Un graphe non orienté G est un couple (S, A) où S est un ensemble de "sommets" et A est une liste de sous ensembles de S de ou ou deux éléments, les arêtes. Les arêtes correspondantes à des sous-ensembles à un seul élément sont des "boucles". Si G est un graphe il est *simple* si il n'a pas de boucles et si deux arêtes distinctes correspondent à deux sous ensembles de S distincts.

Exercice 2.88. Montrer que si S et A sont finis, on peut décrire G par une matrice symétrique à coefficients entiers à $\#S$ colonnes. Comment ?

Définition 2.89 (Graphes orientés)**.** Un graphe orienté G est la donnée d'un triplet $(S, A, \partial_\pm)$ où S est un ensemble de "sommets", A est un ensemble d'"arêtes orientées", et $\partial_\pm : A \to S$. (On imagine une arête $a \in A$ comme un segment orienté qui va de $\partial_-(a)$ à $\partial_+(a)$ et donc $\partial_\pm a$ sont les "sommets de a"). Les arêtes telles que $\partial_- a = \partial_+ a$ sont dites des "boucles". A priori deux arêtes peuvent avoir les mêmes sommets.

Donné un graphe orienté on peut lui associer un ensemble $\mathbf{G}$ qui est le quotient de $S \sqcup A \times [-1, 1]$ par la relation d'équivalence qui identifie $a \times \{\pm 1\}$ avec $\partial_\pm a$. On munit cet ensemble de la topologie définie par $C \subset G$ est fermé ssi $C \cap \pi(a \times [-1, 1])$ est fermé pour tout $a \in A$ (où $\pi : S \sqcup A \times [-1, 1] \to G$ est la projection au quotient).

Exercice 2.90. Soit $G_1 = (S, A, \partial^1_\pm)$ et $G_2 = (S, A, \partial^2_\pm)$ deux graphes orientés tels qu'il existe $\epsilon : A \to \{\pm 1\}$ telle que $\partial^2_\pm(a) = \partial^1_{\epsilon(a)\pm} a, \forall a \in A$. Montrer qu'alors $\mathbf{G_1}$ et $\mathbf{G_2}$ sont homéomorphes par l'application $\phi : A \times [-1,1] \sqcup S \to A \times [-1,1] \sqcup S$ définie par $\phi(s) = s \ \forall s \in S = S$ et $\phi(a,t) = \epsilon(a)t$.

Si $G = (S, A)$ est un graphe non orienté, on peut lui associer un espace topologique $\mathbf{G}$ en choisissant de façon arbitraire une orientation des arêtes (i.e. pour tout $a \in A$ si $a = \{s_1, s_2\}$ on définit arbitrairement $\partial_+ a = s_2, \partial_- a = s_1$ et si $a = \{s\}$ alors $\partial_\pm a = s$) et en considérant $\mathbf{G}$ comme l'espace sous-jacent au graphe orienté ainsi obtenu. Par l'exercice précédent, cet espace ne dépend pas (à homéomorphisme près) de l'orientation choisie.

En particulier si on a un graphe simple fini, on peut considérer le sous espace de $\mathbb{R}^S$ obtenu en prenant l'union des segments liant deux vecteurs de la base canonique indexés par deux sommets d'une arête :

Exemple 2.91. Si $S = \{1, 2, 3\}$ et $A = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$ alors G est un graphe simple et la construction ci dessus donne le triangle affine dans $\mathbb{R}^3$ de sommets $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$.

2.10. **CW-complexes.**

Définition 2.92. Un CW-complexe est un espace topologique construit inductivement comme suit. Soit X^0 un ensemble de points (dit le 0-squelette de X), muni de la topologie discrete. Pour tout $n > 0$ on se donne une collection $\phi^n_i, i \in I_n$ d'applications continues $\phi^n_i : S^{n-1} \to X_{n-1}$ et on définit

$$X_n := X_{n-1} \sqcup_{\phi^n} I_n \times D^n$$

où le quotient identifie le point $(i, x) \in I_n \times S^n \subset I_n \times D^n$ (où on voit $S^{n-1} = \partial D^n$) avec $\phi^n_i(x) \in X_{n-1}$; soit π la projection au quotient. L'image dans le quotient de la i^{eme}-copie de $int(D^n)$ est dite la "cellule e^n_i". On définit une topologie sur X_n en stipulant qu'un ensemble $C \subset X_n$ est fermé si pour toute cellule (i.e. $\forall k \leq n, \forall i \in I_k$) on a $\pi^{-1}(C) \cap i \times D^k$ est fermé dans D^k (où on utilise la topologie standard de D^k).

De façon similaire, la topologie de X est définie par $C \subset X$ est fermé si $C \cap e^n_i$ est fermé pour tout e^n_i.

Remarque 2.93. Attention : un espace peut admettre plusieurs structures de CW-complexe différentes.

Exemple 2.94. On peut réaliser S^1 comme CW-complexe en un nombre infini de manière différentes. Par exemple on peut prendre $X_0 = \{e^0_1, \ldots, e^0_k\}, k \geq 0$ et $X_1 = \{e^1_0, \ldots, e^1_k\}$ avec $\phi^1_i : \partial e^1_i = \{\pm 1\} \to X_0$ définie par $\phi^1_i(1) = e^0_{i+1 \ mod \ k}$, et $\phi^1_i(-1) = e^0_i$.

Exercice 2.95. Montrer que tout complexe simplicial est un CW complexe.

Remarque 2.96 (La structure de CW-complexe est plus flexible que celle de complexe simplicial). Montrer que le cube dans $\mathbb{R}^3$ a une structure de CW-complexe mais que sa cellularisation structure standard (i.e. celle avec 6-faces de dimension 2) n'est pas une structure de complexe simplicial.

Remarque 2.97. Pas tout espace topologique admet la structure d'un CW complexe. Par exemple tout CW complexe est Haussdorf. Mais même cela n'est qu'une condition nécéssaire : pensez par exemple à $S = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ avec sa topologie induite par $\mathbb{R}$. S'il était un CW complexe alors sa topologie serait la discrète mais ce n'est pas le cas. En effet : s'il était un CW complexe il n'aurait que des 0-cellules car il est dénombrable et l'union de celles différentes de 0 serait un fermé dans la topologie du CW-complexe, mais ce n'est pas un fermé dans S.

Définition 2.98. Soit X, Y deux CW-complexes. Une application cellulaire $f : X \to Y$ est une application continue telle que $f(X_q) \subset Y_q \forall q \in \mathbb{N}$ (en particulier elle envoie les 0-cellules de X en les 0-cellules de Y).

Théorème 2.99 (Cellular approximation)**.** *Soit X, Y deux CW-complexes. Si $f : X \to Y$ est continue alors elle est homotope à une application cellulaire.*

Les CW-complexes avec les applications cellulaires constituent une "catégorie" d'espaces topologiques particulièrement flexible et large et donc extremement utilisée en topologie.

3. Le groupe fondamental et les revetements

3.1. **Homotopie.**

Définition 3.1. Une couple d'espaces topologiques est une couple (X, A) où X est un espace topologique et $A \subset X$. Une application $f : (X, A) \to (Y, B)$ est une fonction continue $f : X \to Y$ telle que $f(A) \subset B$.

Exemple 3.2. Si $A = \emptyset$ alors on retrouve les espaces topologiques. Si $A = \{pt\}$ alors on a un *espace topologique pointé*, le point pt est dit le "point base de X".

Définition 3.3 (Homotopie)**.** Soient $(X, A), (Y, B)$ deux couples d'espaces topologiques et $f_0, f_1 : (X, A) \to (Y, B)$ des fonctions continues. Elles sont *homotopes* s'il existe une application $F : X \times [0, 1] \to Y$ continue telle que $F(x, 0) = f_0(x)$ et $F(x, 1) = f_1(x)$, $\forall x \in X$ et pour tout $t \in [0, 1]$ on ait $F(A, t) \subset B$. On notera $f_0 \simeq f_1$.

Exercice 3.4. Prouver que "être homotopes" est une relation d'équivalence sur les fonctions continues entre (X, A) et (Y, B). Ses classes d'équivalence sont notés $[f]$ et appelés "classes d'homotopies".

Définition 3.5 (Equivalence homotopique)**.** Deux paires (X, A) et (Y, B) sont "homotopiquement équivalents" s'il existe $f : (X, A) \to (Y, B)$ et $g : (Y, B) \to (X, A)$ telles que $f \circ g \simeq Id_Y$ et $g \circ f \simeq Id_X$.(On dira que g est l'inverse homotopique de f). Un espace X qui est homotopiquement équivalent à un point est dit contractible.

Exercice 3.6. Prouver que la relation "equivalence homotopique" est une relation d'équivalence sur les paires d'espaces.

Solution 3.7. Montrons la transitivité (le reste est plus simple). Si $f_1 : (X, A) \to (Y, B)$ et $f_2 : (Y, B) \to (Z, C)$ sont équivalences homotopiques avec $g_1 : (Y, B) \to (X, A)$ et $g_2 : (Z, C) \to (Y, B)$ les "inverses homotopiques" respectives, alors nous allons montrer qu'on a que $f_2 \circ f_1$ a comme inverse homotopique $g_1 \circ g_2$. En effet $f_2 \circ f_1 \circ g_1 \circ g_2 : (Z, C) \to (Z, C)$ est égale à $f_2 \circ (f_1 \circ g_1) \circ g_2$ et $(f_1 \circ g_1)$ est homotope à Id_Y. Si $F : Y \times [0, 1] \to Y$ est l'homotopie entre $(f_1 \circ g_1)$ et Id_Y alors on a que

$$G_1 := (f_2 \circ F \circ (g_2 \times Id_{[0,1]})) : Z \times [0, 1] \to Z$$

est une homotopie de $f_2 \circ f_1 \circ g_1 \circ g_2$ avec $f_2 \circ g_2$. Si $G_2 : Z \times [0, 1] \to Z$ est une homotopie de $f_2 \circ g_2$ avec Id_Z alors l'homotopie cherchée est $H : Z \times [0, 1] \to Z$ definie par $H(z, t) = G_1(z, 2t)$ si $t \leq \frac{1}{2}$ et $G_2(z, 2t - 1)$ autrement.

Exercice 3.8. Prouver que $(\mathbb{R}^n, \vec{0})$ est homotopiquement équivalent à $(\{pt\}, \{pt\})$.

3.2. **Le groupe fondamental.** Rappelons que S^1 est la sphère de dimension 1 que nous allons voir comme les nombres complexes de norme 1. En particulier elle contient $1 \in S^1$ que nous utiliserons comme son point base. Dorenavant nous analyserons plus en détail la catégorie des espaces pointés (i.e. paires où $A = \{x_0\}$, le "point base"). Puisque le quotient de $[0, 1]$ par la relation d'équivalence qui identifie $\{1\}$ et $\{0\}$ est homéomorphe à S^1 nous allons aussi utiliser l'intervalle $[0, 1]$ pour paramétrer S^1.

Définition 3.9. Soit X un espace topologique et α, β deux "chemins en X" (c'est à dire applications continues $[0, 1] \to X$) telles que $\beta(0) = \alpha(1)$. La concatenation de α et β, notée $\alpha \cdot \beta$ est l'application $\alpha \cdot \beta : [0, 1] \to X$ définie par

$$(\alpha \cdot \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(2t - 1) & \text{si } t \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Si X est muni d'un point base x_0, une boucle est un chemin $\alpha : (S^1, 1) \to (X, x_0)$.

Lemme 3.10. *Si $\alpha, \alpha' : (S^1, 1) \to (X, x_0)$ sont homotopes et $\beta : [0, 1] \to X$ est tel que $\beta(0) = x_0$ alors $\alpha \cdot \beta \simeq \alpha' \cdot \beta$ en tant qu'applications $([0, 1], \{0, 1\}) \to (X, \{x_0, \beta(1)\})$. De façon similaire, si $\beta(1) = x_0$ alors $\beta \cdot \alpha \simeq \beta \cdot \alpha'$ en tant qu'applications $([0, 1], 1) \to (X, \{x_0, \beta(0)\})$.*

Proof. Nous allons prouver le premier énoncé, le deuxième étant très similaire. Soit $F(s,t) : [0,1] \times [0,1] \to (X, x_0)$ l'homotopie entre α et α'. Alors l'homotopie cherchée est $G : [0,1] \times [0,1] \to (X, x_0)$ définie par

$$G(x,t) = \begin{cases} F(2x,t) & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2x-1) & \text{si } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

□

Lemme 3.11 (Associativité à homotopie près de la concatenation)**.** *Si $\alpha, \beta, \gamma : [0,1] \to X$ sont trois chemins tels que $\alpha(1) = \beta(0)$ et $\beta(1) = \gamma(0)$ alors on a $((\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma) \simeq \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.*

Proof. Les chemins $((\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma)$ et $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ différent seulement par leur paramétrisation. Nous allons alors prouver que si $g_1, g_2 : [0,1] \to [0,1]$ sont deux fonctions continues bijectives et croissantes alors pour tout lacet $\delta : (S^1, 1) \to (X, x_0)$ on a que $\delta \circ g_1 \simeq \delta \circ g_2$. En effet l'homotopie cherchée est :

$$F(x,t) = \delta(tg_1(x) + (1-t)g_2(x)).$$

□

Lemme 3.12 (Existence de l'inverse à homotopie près)**.** *Si α est une boucle dans (X, x_0) alors $\alpha^{-1} : (S^1, 1) \to (X, x_0)$ la boucle définie par $\alpha^{-1}(x) = \alpha(x^{-1})$. Alors $\alpha \cdot \alpha^{-1} \simeq \alpha^{-1} \cdot \alpha \simeq const$ où $const$ est la boucle constante $const : (S^1, 1) \to (X, x_0)$ définie par $const(x) = x_0$ $\forall x \in S^1$.*

Proof. L'homotopie cherchée est :

$$F(x,t) = \begin{cases} \alpha\left(\exp(4\pi i(1-t)x)\right), & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \alpha\left(\exp(4\pi i(1-t)(1-x))\right), & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

□

Définition 3.13 (Groupe fondamental d'un espace pointé)**.** Le groupe fondamental de (X, x_0), noté $\pi_1(X, x_0)$ est l'ensemble des classes d'homotopie de $(S^1, 1)$ dans (X, x_0). Il est muni de la structure de groupe induite par le produit de concatenation : ce produit est bien défini grâce au Lemme 3.10, associatif grâce au Lemme 3.11 et chaque élement a un inverse grâce au Lemme 3.12, l'élément neutre étant le lacet constant.

On dit qu'un espace est simplement connexe si $\pi_1(X, x_0) = Id$.

Lemme 3.14. *Soit $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ une application continue; alors il y a un morphisme de groupes induit par post-composition des lacets avec f, noté $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$. En particulier si (X, x_0) est homotopiquement équivalent à (Y, y_0) alors $\pi_1(X, x_0)$ est isomorphe à $\pi_1(Y, y_0)$.*

Proof. Définissons $f_*([\alpha]) := [f \circ \alpha]$ pour toute boucle α. Remarquons que si $\alpha \simeq \alpha'$ alors $f \circ \alpha \simeq f \circ \alpha'$ donc l'application est bien définie. En effet si H est une homotopie entre α et α' alors $f \circ H$ est une homotopie entre $f \circ \alpha$ et $f \circ \alpha'$.

De plus $f_*(\alpha \cdot \beta) = f_*(\alpha) \cdot f_*(\beta)$ donc elle induit bien un morphisme de groupes. Si enfin $g : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ est l'inverse homotopiques de f, alors $g_* : \pi_1(Y, y_0) \to (X, x_0)$ est un morphisme que nous allons prouver être l'inverse de f_*. En effet on a $Id_X \simeq g \circ f$ relativement à x_0. Donc pour toute boucle α on a $\alpha = Id_X \circ \alpha \simeq g \circ f \circ \alpha = g_* \circ f_* \circ \alpha$. Donc le morphisme f_* est injectif. De façon similaire, puisque $Id_Y \simeq f \circ g$ on a que f_* est surjectif. □

Remarque 3.15. Pour ceux qui connaissent les catégories, le lemme précédent peut être reformulé en disant que le groupe fondamental est un "foncteur de la catégorie des espaces topologiques pointés et leurs applications continues à homotopie près, dans la catégorie des groupes et leurs morphismes".

Corollaire 3.16. $\pi_1(\mathbb{R}^n, \vec{0}) = Id$.

Lemme 3.17. *Un lacet* $\alpha : (S^1, 1) \to (X, x_0)$ *est trivial dans* $\pi_1(X, x_0)$ *si et seulement si il existe une application continue* $f : (D^2, [0, 1]) \to (X, x_0)$ *qui l'étend.*

Proof. Si α est trivial alors il existe une homotopie $F : S^1 \times [0, 1]$ qui sur $S^1 \times \{1\}$ vaut x_0. Mais alors F descend à une application continue sur D^2 définie par $f(\rho e^{i\theta}) = F((1-t)e^{i\theta})$. Réciproquement donnée $f : (D^2, [0, 1]) \to (X, x_0)$ alors $f|_{S^1}$ est nulle homotope d'homotopie trivialisante : $F(\theta, t) = f((1-t)e^{i\theta})$. □

Lemme 3.18. *Soit* $x_0, x_0' \in X$ *deux points dans la même composante connexe par arcs et* $\gamma : [0, 1] \to X$ *un chemin continu t.q.* $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1$. *Alors* $\pi_1(X, x_0') \simeq \pi_1(X, x_0)$ *et un isomorphisme est induit par* $[\alpha'] \to [\gamma^{-1} \cdot \alpha' \cdot \gamma]$.

Proof. Par le Lemme 3.10 l'application est bien définie, et par le Lemme 3.12 son inverse est $[\alpha] \to [\gamma \cdot \alpha \cdot \gamma^{-1}]$. Il s'agit d'un morphisme de groupes car par le Lemme 3.12 on a $[\gamma^{-1} \cdot \alpha' \cdot \gamma \cdot \gamma^{-1} \cdot \alpha' \cdot \gamma] = [\gamma^{-1} \cdot \alpha' \cdot \alpha' \cdot \gamma]$. □

3.3. **Groupes et leurs presentations.** Soit S un ensemble et S^{-1} un autre ensemble en bijection avec S par l'application (formelle!) $s \to s^{-1}$. Un *mot* dans l'ensemble est une suite finie d'éléments de $S \cup S^{-1}$. Deux mots sont *équivalents* s'ils peuvent être obtenus l'un de l'autre par une suite fini d'insertions/éliminations de sous-mots de la forme ss^{-1} ou $s^{-1}s$ pour quelque $s \in S$.

Exemple 3.19. Si $S = \{a, b, c\}$ alors un mot est a, b, a, b^{-1}, b, a. Il est équivalent à a, b, a, a.

Lemme 3.20. *L'ensemble $F(S)$ des classes d'équivalences des mots (y inclut le mot vide) est le groupe libre engendré par S. Il est muni de la loi de composition induite par la concatenation des mots.*

Exemple 3.21. Si $S = \{a, b, c\}$ alors l'inverse de a, b, a, a est $a^{-1}, a^{-1}, b^{-1}, a^{-1}$. En effet en les concatenant on obtient un mot équivalent au mot vide.

Lemme 3.22. *Soit G un groupe est $S \subset G$ un sous-ensemble d'éléments. Alors il existe un morphisme de groupes $i : F(S) \to G$ qui envoie chaque $s \in S$ dans l'élément correspondant.*

Définition 3.23. Soit S un ensemble et $R \subset F(S)$ un sous-ensemble (dit des "relations"). Alors le groupe de générateurs S et relations R est :

$$< S|R >= F(S)/\langle\langle R\rangle\rangle$$

où $\langle\langle R\rangle\rangle$ est le plus petit sous-groupe normal contenant R.

Exercice 3.24. Prouver que tout groupe est isomorphe à un $< S|R >$ pour certains S et R.

Solution 3.25. Prenons comme $S = G$ et comme R toute la table de multiplication de G c'est à dire l'ensemble des mots de la forme $g, h, (gh)^{-1}$.

Définition 3.26. Un groupe G est finiment engendré s'il est de la forme $< S|R >$ pour S fini. Finiment présenté s'il est de la forme $< S|R >$ avec R et S finis.

Définition 3.27. Soit A, G_1, G_2 groupes et $i_j : A \to G_j, j = 1, 2$ homomorphismes. L'*amalgame* de G_1 et G_2 au dessus de A, noté $G_1 \star_A G_2$ est le groupe présenté par $S = G_1 \cup G_2$ et :

$$R = \begin{cases} (g, h, (gh)^{-1}) & \forall g, h \in G_1 \\ (g, h, (gh)^{-1}) & \forall g, h \in G_2 \\ 1_{G_j} & \textit{ou } 1_{G_j} \textit{ est l'identite de } G_j \\ (i_1(a), i_2(a)^{-1}) & \forall a \in A \end{cases}$$

Si $A = 1$ on appelle $G_1 \star G_2$ le produit libre.

Remarque 3.28. Pour $j = 1$ il y a un morphisme canonique $\rho_j : G_j \to G_1 \star_A G_2$ donné par $\rho(g) = g$. Il n'est pas forcement injectif : si $G_2 = 1$, $A = G_1$, et $i_1 = Id$ alors $G_1 \star_A G_2 = 1$.

Proposition 3.29. *[Propriété universelle de l'amalgame] Soient G_1, G_2, A, T groupes supposons $i_j : A \to G_j$ et $p_j : G_j \to T$ morphismes tels que $p_1 \circ i_1 = p_2 \circ i_2$. Alors il existe un morphisme $p : G_1 \star_A G_2 \to T$ t.q. $p_j = p \circ \rho_j, j = 1, 2$.*

Proof. Le groupe $G_1 \star_A G_2$ est par définition engendré par les éléments de $G_1 \cup G_2$. Définissons alors $p : F(G_1 \cup G_2) \to T$ par $p(g) = p_j(g)$ si $g \in G_j$. Pour montrer qu'il est bien défini il faut contrôler que son noyau contienne les relations R de la Definition 3.27. Cela est évident car p_j sont des morphismes (donc les premières trois types de relations sont dans le noyau de p) et $p_2 \circ i_2 = p_1 \circ i_1$ ce qui implique qu'aussi le dernier type de relations est dans le noyau. $\square$

3.4. **Le théorème de Seifert-van Kampen.**

Théorème 3.30. *Soit $X_1 \cup X_2$ un espace topologique décomposé en l'union de deux ouverts connexes par arcs X_1, X_2 t.q. $X_1 \cap X_2$ soit connexe par arcs et soit $x_0 \in X_1 \cap X_2$ un point base. Alors il y a un diagramme commutatif de groupes $i_j : \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0) \to \pi_1(X_j, x_0), j = 1, 2$ et $p_j : \pi_1(X_j, x_0) \to \pi_1(X_1 \cup X_2, x_0)$ où i_j et p_j sont induits par les inclusions. On a alors, avec la notation de la Proposition 3.29 :*

$$p : \pi_1(X_1, x_0) \star_{\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)} \pi_1(X_2, x_0) \to \pi_1(X_1 \cup X_2, x_0)$$

est un isomorphisme.

Proof. **Surjectivité.** Soit $\gamma : ([0,1], 0, 1) \to (X_1 \cup X_2, x_0)$ un chemin. Les préimages par γ de X_1 et de X_2 forment un recouvrement ouvert de $[0,1]$: par compacité de $[0,1]$ nous pouvons en extraire un sous-recouvrement fini. Choisissons alors un nombre fini de points $t_1, \dots t_k \in [0,1]$ tels que $\gamma[t_i, t_{i+1}] \subset X_1$ ou X_2 et pour chaque t_i soit $\beta_i : [0,1] \to X$ un chemin reliant $\gamma(t_i)$ à x_0 en restant dans chaque des ouvert X_i contenant $\gamma(t_i)$ (il existe car X_1, X_2 et $X_1 \cap X_2$ sont connexes par arcs). Alors $[\gamma]$ est l'image du produit $\prod_i [\delta_i]$ où $\delta_i := \beta_{i+1} \cdot \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} \cdot \beta_i^{-1} \in \pi_1(X_i, x_0), i = 1$ *ou* 2.

Injectivité. Soit $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ une homotopie d'un lacet γ. On a $F(0,s) = F(1,s) = x_0\ \forall s$, et $F(t,1) = x_0\ \forall t$ et $F^{-1}(X_i)$ est un recouvrement ouvert de $[0,1] \times [0,1]$. On peut trouver n assez grand tel que tout carré $C_{i,j} := [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}] \times [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}], i, j \in \{0, \dots n-1\}$ est contenu dans l'un des $F^{-1}(X_i)$. (Exercice : sinon utiliser le Lemme 3.39.)

Nous allons montrer qu'on peut modifier F pour obtenir une homotopie F' telle que $F'(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}) = x_0, \forall i, j \in \{0, \dots n\}$.

En effet, à moins de reparametriser F on peut supposer que dans un disque de rayon ϵ ($\epsilon << \frac{1}{n}$) autour de chaque point $(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$ F est constante. Soit alors $\beta_{i,j} : [0,1] \to X$ un chemin reliant $F(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$ à x_0 en restant dans chaque ouvert X_i qui contient $F(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$ (il existe car X_1, X_2 et $X_1 \cap X_2$ sont connexes par arcs) et tel que si $F(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}) = x_0$ alors $\beta_{i,j}$ est constant. On peut alors remplacer F par l'homotopie F' qui est identique à F hors de $\bigsqcup_{i,j} B_\epsilon(\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$

et qui sur $B_\epsilon(\frac{i}{n},\frac{j}{n})$ est (en coordonnées polaires centrées en $(\frac{i}{n},\frac{j}{n})$):

$$F'(r,\theta)=\beta_{i,j}(\frac{\epsilon-r}{\epsilon}).$$

Maintenant on a que la restriction de F' à chaque segment horizontal $\{\frac{i}{n}\}\times[0,1]$ est un chemin écrit comme produit de chemins soit dans X_1 soit dans X_2. De plus $F'(C_{i,j})\subset X_1$ ou X_2. Soit alors $\gamma_{i,j}:=F'|_{[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}]\times\{\frac{j}{n}\}}$ et $\beta_{i,j}:=F'|_{\{\frac{i}{n}\}\times[\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}]}$: on a que $\gamma_{i,j}\in\pi_1(X_1,x_0)$ ou $\pi_1(X_2,x_0)$ et, si $F'(C_{i-1,j})$ et $F'(C_{i,j})$ sont dans un X_k différent alors $\beta_{i,j}\in\pi_1(X_1\cap X_2,x_0)$.

Donc pour chaque $C_{i,j}$ on voit que l'homotopie F' réalise la relation $\gamma_{i,j}\simeq\beta_{i+1,j}^{-1}\cdot\gamma_{i,j+1}\cdot\beta_{i,j}$ (qui est dans la presentation de l'amalgame car c'est une relation parmi les mots d'un des X_i) et si $F'(C_{i,j})$ et $F'(C_{i-1,j})$ sont contenus dans deux X_i différents, alors on peut utiliser la relation $(i_1)_*(\beta_{i,j})\cdot(i_2)_*(\beta_{i,j})^{-1}$ qui est aussi dans les relations de l'amalgame pour exprimer $F'([0,1]\times\{\frac{j+1}{n}\})$ en fonction de $F'([0,1]\times\{\frac{j}{n}\})$.

□

3.5. **Revêtements.** Dorénavant tous les espaces que nous considérerons seront connexes et localement connexes par arcs.

Définition 3.31. Un revêtement d'un espace topologique connexe X est une application continue surjective $p:Y\to X$ (Y esp. topologique) telle que $\forall x\in X$ il existe un "voisinage de trivialisation" $U_x\subset X$ connexe par arcs tel que $p^{-1}(U_x)=\sqcup_\alpha U_x^\alpha$ est l'union disjointe d'ouverts $U_x^\alpha\subset Y$ tels que $p:U_x^\alpha\to U_x$ est un homéomorphisme pour chaque α. L'espace Y est dit l'espace total du revêtement, et pour tout $x\in X$ l'ensemble $p^{-1}(x)$ est la *fibre* sur x.

Remarque 3.32. Souvent dans la literature on assume Y connexe.

Lemme 3.33. *Soit $p:Y\to X$ un revêtement et $U\subset X$ un ouvert trivialisant connexe. Alors chaque composante connexe de $p^{-1}(U)$ est homéomorphe à U par p.*

Proof. Puisque U est trivialisant alors $p^{-1}(U)=\sqcup_\alpha U^\alpha$ et chaque U^α est homéomorphe à U par p donc connexe par arcs donc connexe. Puisque ces ouverts sont disjoints et connexes ils sont exactement les composantes connexes de $p^{-1}(U)$. □

Corollaire 3.34. *La cardinalité de $p^{-1}(x)$ est localement constante donc constante sur X. On l'appelle le* nombre de feuillets du revêtement.

Exemple 3.35. (1) $z\to z^n$ est un revêtement de S^1 par S^1 à n feuillets.
(2) $exp:\mathbb{R}\to S^1$ est un revêtement.
(3) $\vec{x}\to\pm\vec{x}$ est un revêtement à deux feuillets de S^n à $\mathbb{RP}^n$.

Définition 3.36. Soit $p_1 : Y_1 \to X$ et $p_2 : Y_2 \to X$ deux revêtements. Un *morphisme* $f : (Y_1, p_1) \to (Y_2, p_2)$ est une application continue $f : Y_1 \to Y_2$ telle que $p_2 \circ f = p_1$.

3.6. **Relevés des applications.** Donné un revêtement $p : Y \to X$ et une fonction continue $f : Z \to X$, il est important de décider s'il existe un *relevé* g de f, c'est à dire une application continue $g : Z \to Y$ telle que $p \circ g = f$:

(1)
$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[ur, dashed, "\exists g?"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

D'abord observons que s'il existe alors il est unique sur chaque composante connexe.

Lemme 3.37. *Soit $p : Y \to X$ un revêtement et Z un espace connexe. Si $g_0, g_1 : Z \to Y$ sont applications continues telles que $p \circ g_0 = p \circ g_1$, alors l'ensemble*

$$A := \{z \in Z : g_0(z) = g_1(z)\},$$

est soit vide soit Z.

Proof. Puisque Z est connexe, il suffit de montrer que A est ouvert et fermé dans Z.

Soit $a \in A$ et $y = g_0(a) = g_1(a)$. Choisissons un ouvert trivialisant $U \ni p(y)$ et soit V l'unique composante connexe par arcs de $p^{-1}(U)$ qui contient y. Alors, $g_0^{-1}(V) \cap g_1^{-1}(V)$ est un voisinage ouvert de a qui est contenu dans A (parce-que sur ce voisinage on a $g_0 = p|_V^{-1} \circ (p \circ g_0) = p|_V^{-1} \circ (p \circ g_1) = g_1$). Donc, A est ouvert.

Soit $z \in Z$ tel que $g_0(z) \neq g_1(z)$. Soit U un voisinage ouvert trivialisant de $p(g_0(z)) = p(g_1(z))$. Pour $i = 0, 1$, soit V_i la composante connexe par arcs de $p^{-1}(U)$ contenant $g_i(z)$. Alors, $g_0^{-1}(V_0) \cap g_1^{-1}(V_1)$ est un ouvert de Z contenant z et disjoint de A. Donc, $Z \setminus A$ est ouvert. □

Les revêtements ont la propriété de "relèvement des chemins."

Proposition 3.38 (Relèvement des chemins)**.** *Soit $p : Y \to X$ un revêtement et $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$ tels que $p(y_0) = x_0$. Alors, pour tout chemin $\alpha : I \to X$ qui commence à x_0, il existe un unique relévé $\beta : I \to Y$ de α qui commence à y_0.*

Proof. L'unicité de β suit du Lemma 3.37. Pour tout $t \in [0, 1]$, soit U_t un ouvert trivialisant connexe de $\alpha(t)$. Alors, $(\alpha^{-1}(U_t))_t$ est un recouvrement ouvert de $[0, 1]$ et par compacité de $[0, 1]$ nous pouvons trouver un nombre fini d'intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ tels que $\alpha([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$ où U_i est un ouvert trivialisant connexe de p. Sur $[0, t_1]$, soit V_0 la composante connexe de $p^{-1}(U_0)$ contenant

y_0; on peut relever α sur $[0, t_1]$ par $\tilde{\alpha} := (p|_{V_0})^{-1} \circ \alpha$. Supposons avoir relevé jusqu'à t_k et soit V_{k+1} la composante connexe de $p^{-1}(U_{k+1})$ contenant $\tilde{\alpha}(t_k)$. On peut étendre $\tilde{\alpha}$ sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ par $\tilde{\alpha} := (p|_{V_k})^{-1} \circ \alpha$. □

Puis nous allons prouver que les revêtements on la propriété de "relèvement des homotopies." Pour cela nous aurons besoin du suivant :

Lemme 3.39 (Le lemme de Lebesgue)**.** *Soit X un espace métrique compact et $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X. Alors il existe $\eta > 0$ (dit le* nombre de Lebesgue *pour $\mathcal{U}$) tel que tout $S \subset X$ de diametre $< \eta$ doit être contenu dans un $U \in \mathcal{U}$.*

Proof. Pour tout $x \in X$, il existe $\eta(x) > 0$ t.q. la boule $\mathcal{B}(x, 2\eta(x))$ centrée en x de rayon $2\eta(x)$ est contenue en un $U(x) \in \mathcal{U}$. Puisque X est compact, on peut trouve $x_1, \ldots, x_n \in X$ t.q.

$$X = \mathcal{B}(x_1, \eta(x_1)) \cup \cdots \cup \mathcal{B}(x_n, \eta(x_n)).$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on voit que

$$\eta := \min\{\eta(x_1), \ldots, \eta(x_n)\}$$

satisfait la thèse. □

Proposition 3.40 (Relèvement des homotopies)**.** *Soit $p : Y \to X$ un revêtement et Z un espace connexe et localement connexe par arcs. Soit $F : Z \times I \to X$ une homotopie et $g_0 : Z \to Y$ un relevé de $F(-, 0)$. Alors il existe un unique rélévé $G : Z \times I \to Y$ de F tel que $G(-, 0) = g_0$.*

Proof. L'unicité de G suit du Lemma 3.37. Pour tout $z \in Z$, Proposition 3.38 montre que le chemin $F(z, -) : I \to X$ a un unique rélévé commencant en $g_0(z)$. Cela définit une application $G : Z \times I \to Y$ telle que $p \circ G = F$ et $G(-, 0) = g_0$, mais nous devons encore en prouver la continuité. Nous pouvons déduire du Lemma 3.39 l'énoncé suivant.

Claim 3.41. Soit $\mathcal{A}$ un recouvrement ouvert de $Z \times I$ et $z_0 \in Z$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage ouvert N de z_0 tel que

$$\forall J \subset [0, 1], \mathsf{diam}(J) < \varepsilon \Longrightarrow \exists A \in \mathcal{A},\ N \times J \subset A.$$

Soit $z_0 \in Z$ et prouvons que G est continue sur un voisinage de $z_0 \times I$. Pour tout $(z, t) \in Z \times I$, soit $U_{(z,t)}$ un voisinage trivialisant ouvert de $F(z, t)$. En appliquant Claim 3.41 au recouvrement ouvert $\mathcal{A} := \big(F^{-1}(U_{(z,t)})\big)_{(z,t) \in Z \times I}$, nous trouvons un voisinage ouvert connexe par arcs N de z_0 et un entier $n \geq 1$ tels que $F(N \times [i/n, (i+1)/n])$ est contenu dans un ouvert trivialisant U_i pour tout $i = 0, \ldots, n-1$. Pour prouver que G est continue sur $N \times I$, procédons par induction. Supposons G continue sur $N \times [0, i/n]$ et prouvons la continuité de G sur $N \times [i/n, (i+1)/n]$. Soit V_i l'unique composante connexe par arcs de

$p^{-1}(U_i)$ qui contient $G(N \times \{i/n\})$ (qui doit être connexe par arcs parce-que G est continue sur l'espace connexe par arcs $N \times \{i/n\}$). On voit facilement que G doit coincider sur $N \times [i/n, (i+1)/n]$ avec $(p|_{V_i})^{-1} \circ F$. Donc, G est continue sur $N \times [i/n, (i+1)/n]$. $\square$

On a l'application suivante de Proposition 3.38 et Proposition 3.40.

Corollaire 3.42. *Soit $p : Y \to X$ un revêtement qui envoie y_0 sur x_0. Soient α_0, α_1 des chemins dans X qui commencent en x_0 et soit β_0, β_1 leurs uniques rélévés commençant en y_0. Si les chemins α_0 et α_1 sont homotopes, alors β_0 et β_1 le sont. De plus si $\alpha_0(1) = \alpha_1(1)$ et l'homotopie ne bouge pas ce point, on peut supposer cela aussi de sa relevé.*

Par conséquent le morphisme $p_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0)$ est injectif.

Proof. Soit $A : I \times I \to X$ une homotopie entre $\alpha_0 : I \to X$ et $\alpha_1 : I \to X$ relative à $\{0, 1\}$ et $B : I \times I \to Y$ le seul relevé de A t.q. $B(-, 0) = \beta_0$ (Proposition 3.40). L'unicité prouvée en Proposition 3.38 a trois conséquences. D'abord, $B(0, -) = y_0$ puisque le chemin $B(0, -)$ satisfait $p \circ B(0, -) = x_0$ et commence en y_0. Puis, $B(1, -) = y_1$ où $y_1 := \beta_0(1)$ puisque le chemin $B(1, -)$ satisfait $p \circ B(1, -) = x_1$ et commence en y_1. Enfin, $B(-, 1) = \beta_1$ puisque le chemin $B(-, 1)$ satisfait $p \circ B(-, 1) = \alpha_1$ et commence en y_0. Donc, $\beta_0(1) = B(1, 1) = \beta_1(1)$ et B est une homotopie entre $\beta_0 : I \to Y$ et $\beta_1 : I \to Y$ relative à $\{0, 1\}$. Le dernier énoncé s'en suit. $\square$

Nous pouvons enfin prouver que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Pour cela considérons le revêtement $p : \mathbb{R} \to S^1$ défini par $p(t) = \exp(2i\pi t)$. Soit $\alpha : [0, 1] \to S^1$ un chemin fermé dont le seul rélévé en $\mathbb{R}$ commençant en 0 est noté β. Alors, $\beta(1) \in \mathbb{Z} = p^{-1}(1)$ et d'après Corollaire 3.6, dépend seulmement de la classe d'homotopie de $[\alpha]$. Nous le noterons $\deg(\alpha)$.

Théorème 3.43. *L'application "degré"*

$$\deg : \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}, \ [\alpha] \longmapsto \deg(\alpha)$$

est un isomorphisme de groupes.

Remarque 3.44. Pour le lacet $\alpha(z) = z^n$ on a $\deg(\alpha) = n :$ voilà pourquoi on l'appelle degré.

Proof. D'abord prouvons qu'il est un homomorphisme. Soit α et α' chemins fermés $1 \rightsquigarrow 1$, dont les relévés commençant en 0 sont respectivement β et β'. Alor $\beta * (\beta' + \beta(1))$ (où + denote une translation dans $\mathbb{R}$) est un rélévé de $\alpha * \alpha'$ et commence en 0. Nous en déduisons que $\deg(\alpha * \alpha') = \beta'(1) + \beta(1) = \deg(\alpha) + \deg(\alpha')$.

Prouvons maintenant que deg est bijective. Pour tout $n \geq 1$, soit $\alpha_n : S^1 \to S^1$ defini par $\alpha_n(z) = z^n$. Alors on a $\deg(\alpha_n) = n$ d'où on voit que deg est surjective. Pour prouver l'injectivité, soit α un chemin fermé t.q. $\deg(\alpha) = 0$. Alors, son unique relevé β commençant en 0 est fermé et nous pouvons écrire $p_\sharp([\beta]) = [\alpha]$, où $p_\sharp : \pi_1(\mathbb{R}, 0) \to \pi_1(S^1, 1)$ est induit par p. Puisque $\mathbb{R}$ est contractible, on en déduit que $[\alpha] = 1$. $\square$

Nous pouvons maintenant donner une réponse complète à notre problème initial (1).

Théorème 3.45 (Critère de relèvement des applications)**.** *Soit $p : Y \to X$ un revêtement avec $p(y_0) = x_0$, et $f : Z \to X$ une application continue t.q. $f(z_0) = x_0$, où Z est connexe et localement connexe par arcs. Alors il existe un relévé $g : Z \to Y$ de f t.q. $g(z_0) = y_0$ ssi $f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_*(\pi_1(Y, y_0))$. De plus, si g existe il est unique.*

Proof. L'unicité de g est donnée par le Lemme 3.37 et l'implication"$\Rightarrow$" suit de la fonctorialité du groupe fondamental. Prouvons l'implication "$\Leftarrow$".

Pour tout $z \in Z$, nous *choisissons* un chemin $\alpha : z_0 \rightsquigarrow z$. Alors, $f \circ \alpha$ est un chemin $x_0 \rightsquigarrow f(z)$, dont le seul rélévé qui commence en y_0 est noté β. Posons $g(z) := \beta(1)$. Pour montrer que $g(z)$ est bien-définie, considérons un autre chemin $\alpha' : z_0 \rightsquigarrow z$, et notons β' le seul relevé de $f \circ \alpha'$ commençant en y_0. Par hypothèse, la classe d'homotopie de $\gamma := (f \circ \alpha) * (f \circ \overline{\alpha'}) : x_0 \rightsquigarrow x_0$ est dans $p_*\pi_1(Y, y_0)$, donc son seul relévé υ qui commence en y_0 est fermé. Remarquons que $\upsilon * \beta'$ est un relevé de $(f \circ \alpha) * (f \circ \overline{\alpha'}) * (f \circ \alpha') \simeq (f \circ \alpha)$ et il commence en y_0. Donc, nous avons $\beta \simeq \upsilon * \beta'$ qui implique $\beta(1) = \beta'(1)$. Donc nous avons une application

$$g : Z \longrightarrow Y$$

qui satisfait $p \circ g = f$ et $g(z_0) = y_0$: nous devons encore prouver qu'elle est continue.

Soit $z \in Z$ un point où on veut prouver que g est continue. Choisissons un chemin $\alpha : z_0 \rightsquigarrow z$ et soit β le seul rélévé de $f \circ \alpha$ qui commence en y_0. Soit U un voisinage trivialisant de $f(z)$, W un voisinage connexe par arcs de z t.q. $f(W) \subset U$ et soit V la composante connexe par arcs de $p^{-1}(U)$ qui contient $g(z)$. Pour tout $w \in W$, soit $\gamma : z \rightsquigarrow w$ un chemin contenu W. Alors, $\beta * (p|_V^{-1} \circ f \circ \gamma)$ est un rélévé de $f \circ (\alpha * \gamma)$ qui commence en y_0, donc $g(w) = \big(\beta * (p|_V^{-1} \circ f \circ \gamma)\big)(1) = (p|_V^{-1} \circ f)(w)$. Nous concluons que $g|_W$ coincide avec $p|_V^{-1} \circ f|_W$, ce qui implique qu'elle est continue. $\square$

3.7. **Le revêtement universel.** Soit X un espace connexe, localement connexe par arcs et *localement relativement simplement connexe* c'est à dire t.q. $\forall x \in X$ il existe un voisinage U_x connexe par arcs de x t.q. $i_* : \pi_1(U_x, x) \to \pi_1(X, x)$ est triviale.

Nous allons prouver qu'il existe un et un seul (à isomorphisme près) revêtement $\pi : \tilde{X} \to X$ tel que $\tilde{X}$ est simplement connexe. Il s'appellera le *revêtement universel* de X car si $p : Y \to X$ est un revêtement alors, grâce au Théorème 3.45 on peut relever $\pi : \tilde{X} \to X$ à $\pi_Y : \tilde{X} \to Y$ de façon à que $\pi = p \circ \pi_Y$. En particulier il est unique à homéomorphisme près car si $\tilde{X}'$ est un autre revêtement universel, on aurait des morphismes de revêtements applications $\pi_{X'} : \tilde{X} \to \tilde{X}'$ et $\pi_X : \tilde{X}' \to \tilde{X}$ telles que $\pi_{X'} \circ \pi_X$ et $\pi_X \circ \pi_{X'}$ sont des automorphismes des revêtements.

Théorème 3.46. *Si X est connexe, localement connexe par arcs et localement simplement connexe alors il existe un (et un seul à isomorphisme près) revêtement universel de (X, x_0). Plus en général, si $G \subset \pi_1(X, x_0)$ est un sous-groupe, il existe un revêtement $p : (\tilde{X}_G, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ tel que $p_*(\pi_1(\tilde{X}_G, \tilde{x}_0)) = G$.*

Proof. Soit $\tilde{X}_G := \{(x, \gamma) | x \in X, \gamma : x_0 \rightsquigarrow x\}/ \sim$ où $(x', \gamma') \sim (x, \gamma) \iff x = x'$ et $\gamma \cdot (\gamma')^{-1} \in G$ et $p : \tilde{X}_G \to X$ définie par $p([(x, \gamma)]) = x$. Pour tout voisinage connexe par arcs U_x de x tel que l'image de $i_* : \pi_1(U_x, x) \to \pi_1(X, x)$ est triviale, posons $\tilde{U}_{[x,\gamma]} := \{[y, \gamma \cdot \gamma_y] | y \in U_x, \gamma_y : x \rightsquigarrow y \subset U_y\}$ et soit $\mathcal{T}$ la topologie sur $\tilde{X}$ engendrée par les $\tilde{U}_{[x,\gamma]}$. Remarquons que $\forall g \in G$ on a $\tilde{U}_{[x,\gamma]} = \tilde{U}_{[x,g\cdot\gamma]}$ (par définition de $\tilde{X}_G$), donc la fibre sur x est $\{[x, G\gamma]\}$ i.e. elle a la même cardinalité que l'ensemble des classes latérales de G dans X.

Puisque U_x est connexe par arcs alors aussi chaque $\tilde{U}_{[x,\gamma]}$ l'est. De plus on a que $\tilde{U}_{[x,\gamma']} \cap \tilde{U}_{[x,\gamma]} = \emptyset$ si $\gamma \cdot \gamma'^{-1} \notin G$. En effet si $[y, \gamma \cdot \gamma_y] = [y, \gamma' \cdot \gamma'_y]$ alors par définition de $\tilde{X}_G$ on a

$$G \ni [\gamma \cdot \gamma_y \cdot (\gamma' \cdot \gamma'_y)^{-1}] = [\gamma \cdot \gamma_y \cdot (\gamma'_y)^{-1} \cdot \gamma'^{-1}] = [\gamma \cdot \gamma'^{-1}]$$

parce que $\gamma_y \cdot (\gamma'_y)^{-1} \in i_*(\pi_1(U, x)) = 1$.

Nous prétendons que p est continue : en effet les U_x forment une base de la topologie de X et il est donc suffisant de voir que $p^{-1}(U_x) = \sqcup_{[x,\gamma]} \tilde{U}_{[x,\gamma]}$ où les γ varient sur un représentant pour chaque classe latérale de G et chaque $U_{[x,\gamma]}$ est ouvert par définition. De plus il est évident que p est un revêtement et ses ouverts trivialisants sont par construction les U_x.

Prouvons que $\tilde{X}_G$ est connexe par arcs : si $[x, \gamma] \in \tilde{X}_G$ alors il est lié à $[x_0, triv]$ par le chemin $\tilde{\gamma} : [x_0, x_0] \rightsquigarrow [x, \gamma]$ donné par $\tilde{\gamma}(t) = [\gamma(t), \gamma|_{[0,t]}]$.

Enfin $p_*(\pi_1(\tilde{X}_G, \tilde{x}_0)) = G$: si $\alpha : [0, 1] \to \tilde{X}$ est un lacet basé en $\tilde{x}_0$ représentant une classe non triviale dans $\pi_1(\tilde{X}_G, \tilde{x}_0)$ tel que $p_*([\alpha]) \notin G$ alors le point $[x_0, p(\alpha)] \in \tilde{X}_G$ est un relevé de x_0 différent de $\tilde{x}_0$ par définition de $\tilde{X}_G$. Cela est absurde car α et $[p \circ \alpha(t), p \circ \alpha|_{[0,t]}]$ sont deux relevés de $p \circ \alpha$ qui commencent en $\tilde{x}_0$ mais on avait supposé que α était un un lacet tandis-que le bout final de $[p \circ \alpha(t), p \circ \alpha|_{[0,t]}]$ est $[x_0, p \circ \alpha] \neq [x_0, triv]$. Cela montre que $p_*(\pi_1(\tilde{X}_G, \tilde{x}_0)) \subset G$. De l'autre coté si α est un lacet dans (X, x_0) représentant une classe dans $G \setminus \{e\}$ alors son relevé $\tilde{\alpha} := [\alpha(t), \alpha|_{[0,t]}]$ est un lacet fermé dans $(\tilde{X}_G, \tilde{x}_0)$. Il y est donc non nul homotope car autrement $p(\tilde{\alpha}) = \alpha$ serait aussi nulhomotope dans X.

Pour l'unicité : si $(\tilde{X}', \tilde{x}_0')$ avec $p' : \tilde{X}_G' \to X$ est un autre revêtement de (X, x_0) tel que $p'_*(\pi_1(\tilde{X}_G', \tilde{x}_0')) = G$ alors on peut relever $p' : (\tilde{X}_G', \tilde{x}_0') \to (\tilde{X}_G, \tilde{x}_0)$ (grâce au Théorème 3.45). Et de même pour $p : (\tilde{X}_G, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}_G', \tilde{x}_0')$; mais à cause du Lemme 3.37 les conditions $p'(\tilde{x}_0') = \tilde{x}_0$ et $p(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0'$ impliquent que $p \circ p' = Id_{\tilde{X}'}$ et $p' \circ p = Id_{\tilde{X}}$.

$\square$

3.8. **L'action du groupe fondamental sur le revêtement universel.** Si $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ est le revêtement universel, alors pour tout $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, soit $\tilde{x}_0 \cdot \alpha$ le point final du chemin relevant α à partir de $\tilde{x}_0$. Par le Théorème 3.45 il existe un et un seul (par le Lemme 3.37) automorphisme de ρ_α de $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ tel que $\rho_\alpha(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot \alpha$. On peut vérifier que l'application $deck : \pi_1(X, x_0) \to Aut(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ associant à α l'automorphisme ρ_α est un isomorphisme de groupes. Cela munit $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ d'une action de $\pi_1(X, x_0)$ dite de “deck transformations”.

Plus en général, le même raisonnement montre que si $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ est un revetement quelconque,

$$G = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \subset \pi_1(X, x_0)$$

et $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ est telle que $[\alpha]G[\alpha^{-1}] = G$ (donc $[\alpha]$ est dans le normalisateur de G, noté $Norm(G)$) alors grâce au Théorème 3.45 il existe un automorphisme ρ_α de $\tilde{X}$ envoyant $\tilde{x}_0$ sur $\tilde{x}_0 \cdot \alpha$. Si on prend $\alpha' = g\alpha$ pour quelque $g \in G$ il est clair que l'on obtient le même automorphisme parce-que $\tilde{x}_0 \cdot g \cdot \alpha = \tilde{x}_0 \cdot \alpha$. Donc on a une application $Norm(G)/G \to Aut(\tilde{X}_G)$. Il s'avère qu'elle est un isomorphisme de groupes.

4. Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$

4.0.1. *Le théorème d'inversion locale.* Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction lisse et $p \in \mathbb{R}^n$ (donc $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x}))$. Le Jacobien de f en p est la matrice $m \times n$ dont l'entrée (i, j)-ème est $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p)$.

Définition 4.1 (Difféomorphismes)**.** Un difféomorphismes entre ouverts U et V dans $\mathbb{R}^n$ est une bijection $\phi : U \to V$ de classe C^∞ dont l'inverse est aussi de classe C^∞.

Exercice 4.2. La dernière condition dans la définition est bien nécéssaire : exhiber un homeomorphisme C^∞ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont l'inverse n'est pas lisse.

Théorème 4.3 (d'inversion locale)**.** *Soit $U \subset R^n$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application lisse et $p \in U$ tel que $Jac_p(f)$ est inversible. Alors il existe un voisinage ouvert V de p et un voisinage ouvert W de $f(p)$ tels que $f|_V : V \to W$ est un difféomorphisme.*

4.0.2. *Le théorème de la fonction implicite.*

Théorème 4.4 (Théorème de la fonction implicite)**.** *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction lisse et $p \in U$ un point où $Jac_p(f) \in M(m \times n)$ est une matrice de rang m (donc, forcement $n \geq m$). (Dans ces conditions, à moins de reordonner les coordonnées de $\mathbb{R}^n$ on peut supposer que le mineur $m \times m$ formé par les dernières m colonnes de $Jac_p(f)$ soit inversible.)*

Alors il existe un voisinage $W \subset U$ de $p \in \mathbb{R}^n$ de la forme $W = W_{n-m} \times W_m$ où W_m est un voisinage de $f(p) \in \mathbb{R}^m$ et W_{n-m} un voisinage de $\pi_{n-m}(p) \in \mathbb{R}^{n-m}$ (où $\pi_{n-m} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ est la projection sur les premères $n - m$ coordonnées) et une fonction lisse $\phi : W_{n-m} \to \mathbb{R}^m$ telle que

$$\{x \in W | f(x) = f(p)\} = \{(t, \phi(t)), \forall t \in W_{n-m}\}.$$

Définition 4.5. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction lisse. Un point critique est un point $p \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathsf{rang}(Jac_p(f)) < m$; l'ensemble des points critiques est noté $\mathsf{Crit}(f)$. Un point régulier est $p \in \mathbb{R}^n \setminus \mathsf{Crit}(f)$. Une valeure $v \in \mathbb{R}^m$ est *critique* si $v \in f(\mathsf{Crit}(f))$ et régulière autrement.

Remarque 4.6. Si $n < m$ tout point de $\mathbb{R}^n$ est critique. Aussi, si $f^{-1}(y) = \emptyset$ alors y est régulière.

Définition 4.7 (Domaine)**.** Nous allons dorenavant appeler "domaine" un compact $D \subset \mathbb{R}^n$ qui est la cloture d'un ouvert et tel que $\forall p \in \partial D$ il existe un voisinage U_p de p dans $\mathbb{R}^n$ et fonction lisse $f : U_p \to \mathbb{R}$ telle que $f^{-1}(\{x \leq 0, x \in \mathbb{R}\}) = D \cap U_p$ et $grad_p f \neq \vec{0}$.

Nous dirons qu'une fonction $a : D \to \mathbb{R}^k$ est lisse si sur D elle coincide avec une fonction $a : U \to \mathbb{R}^k$ où U est un ouvert contenant D.

4.0.3. *Le lemme de Sard.*

Lemme 4.8 (de Sard)**.** *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^p$ ($n \geq 0, p \geq 1$) lisse ; l'ensemble des valeurs critiques a mesure nulle.*

Remarque 4.9. Si $n < p$ toute valeur dans l'image de f est critique et donc le lemme dit que l'image de f a mesure de Lebesgue nulle.

Proof. On va suivre de près le chapître 3 de [4] et travailler par récurrence sur n. Remarquons que l'énoncé est clair si $n = 0$. Supposons-le vrai pour n et prouvons-le pour $n+1$. Notons $\mathbf{i} \in \mathbb{N}^{\mathbf{n}}$ un multiindex et $|\mathbf{i}| \in \mathbb{N}$ la somme de ses entrées et soit

$$C_i = \{x \in U | \frac{\partial^{\mathbf{i}} f}{\partial x_{\mathbf{i}}}(x) = 0 \ \forall \mathbf{i} \ s.t. |\mathbf{i}| \leq i\}.$$

On a clairement $\mathsf{Crit}(f) \supseteq C_1 \supseteq C_2 \cdots \supseteq C_k \supseteq \cdots$. On va prouver que :

(1) $f(\mathsf{Crit}(f) \setminus C_1)$ a mesure nulle ;
(2) $f(C_i \setminus C_{i+1})$ a mesure nulle ;
(3) $f(C_k)$ a mesure nulle pour k assez grand.

Cela sera suffisant car alors $f(\mathsf{Crit}(f)) = f(\mathsf{Crit}(f) \setminus C_1) \cup \bigcup_i f(C_i \setminus C_{i+1})$ et la mesure de Lebesgue est σ-additive.

$f(\mathsf{Crit}(f) \setminus C_1)$ **a mesure nulle.** On peut supposer $p \geq 2$ car autrement $\mathsf{Crit}(f) = C_1$. Par le théorème de Fubini, un ensemble $A \subset \mathbb{R}^p$ a mesure nulle s'il intersecte tous les plans $\{pt\} \times \mathbb{R}^{p-1}$ en un ensemble de mesure nulle. Pour tout $x \in \mathsf{Crit}(f) \setminus C_1$ on trouvera un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ tel que $f(V \cap \mathsf{Crit}(f))$ a mesure nulle. Puisque $\mathsf{Crit}(f) \setminus C_1$ est couvert par une quantité dénombrable de tels ouverts cela conclura le premier cas.

Puisque $x \notin C_1$ alors il existe une dérivée première de f qui n'est pas nulle en x. A moins de permuter les composantes de f et les coordonnées on peut supposer qu'il s'agit de $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) \neq 0$. Alors l'application $h(x) := (f_1(x), x_2, \ldots, x_n)$ a Jacobien inversible en x et donc est un difféomorphisme local d'un ouvert V autour de x avec un ouvert $W \subset \mathbb{R}^n$. On va alors prouver que $f \circ h^{-1}(W \cap h(\mathsf{Crit}(f) \setminus C_1)) = f(V \cap \mathsf{Crit}(f) \setminus C_1)$ a mesure nulle. Cela est plus simple car $f \circ h^{-1}(x_1, \ldots x_n) = (x_1, f_2 \circ h^{-1}(x), \ldots f_n \circ h^{-1}(x)) = (x_1, g(x))$ où la dernière égalité définit une fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{p-1}$.

Le Jacobien de $(x_1, g(x))$ est de la forme :

$$Jac((x_1, g(x))) = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

donc un point $x = (x_1, \ldots x_n)$ est critique pour $(x_1, g(x))$ ssi $(x_2, \ldots x_n)$ est critique pour la restriction de g à l'hyperplan π_{x_1} où la première coordonnée est x_1, qui a dimension $n-1$. Par récurrence $g(\pi_{x_1} \cap \mathsf{Crit}(g) \setminus C_1(g))$, qui est contenu dans l'hyperplan de $\mathbb{R}^p$ où la première coordonnée est x_1 a mesure 0. Par le théorème de Fubini alors $(x_1, g)(\mathsf{Crit}(g) \setminus C_1(g))$ a mesure nulle.

$f(C_i \setminus C_{i+1})$ **a mesure nulle.** Comme avant soit $x \in C_i \setminus C_{i+1}$ et soit $w(x)$ une dérivée partielle i^{eme} de f dont dérivée première n'est pas nulle en x. On peut supposer que $\frac{\partial w}{\partial x_1}(x) \neq 0$. Comme avant soit alors $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $h(x) = (w(x), x_2, \ldots, x_n)$. Alors h est un difféomorphisme local entre un voisinage ouvert U de x et un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ car son Jacobien en x est inversible. Soit alors $g = f \circ h^{-1}$ et $g_c(x_2, \ldots, x_n) := f \circ h^{-1}(c, x_2, \ldots x_n)$ la restriction de g à l'hyperplan $\pi_{x_1,c}$ où $x_1 = c$. Il est claire que g_c est une fonction lisse de $\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^p$ et donc, par récurrence, l'image de ses valeurs critique a mesure nulle. Mais les points de $\pi_{x_1,c} \cap C_i$ sont critiques pour g_c, donc leur image par g_c est de mesure nulle. Alors on conclut encore far Fubini que l'image de tout $h(C_i \setminus C_{i+1})$ par g a mesure nulle. Mais cette image coincide avec l'image par f de $C_i \setminus C_{i+1}$.

$f(C_k)$ **a mesure nulle pour** k **assez grand.** Soit $\delta < \sqrt{n}^{-1}$, $I \subset \mathbb{R}^n$ le cube $[-\delta, \delta]^n$ et $k > \frac{n}{p} - 1$. Si $x \in C_k$ on va prouver que $f(x + I \cap C_k)$ a mesure nulle. Par le théorème de Taylor on a que

$$f(x+h) = f(x) + R(x,h), \qquad ||R(x,h)|| \leq c||h||^{k+1}$$

pour une constante c. Divisons le cube I en r^n cubes d'arête $\frac{\delta}{r}$ et soit $x + I_n$ le cube contenant x. Alors tout point de $x + I_n$ diffère de x d'un vecteur ayant norme au plus $\sqrt{n}\frac{\delta}{n}$ et donc son image diffère de $f(x)$ d'au plus $c\sqrt{n}^{k+1}\frac{\delta^{k+1}}{r^{k+1}}$ et donc $f(x + I_n)$ est contenu dans le cube de $\mathbb{R}^p$ centré en $f(x)$ et d'arête $2c\frac{(\sqrt{n}\delta)^{k+1}}{r^{k+1}}$. Alors $f(C_k \cap x + I)$ est contenu dans l'union d'au plus r^n cubes dont le volume est $2c\frac{(\sqrt{n}\delta)^{k+1}}{r^{k+1}}^p$. Leur volume total est donc au plus :

$$(2c)^p r^n \frac{(\sqrt{n}\delta)^{p(k+1)}}{r^{p(k+1)}} < (2c)^p \frac{1}{r^{pk+p-n}} \leq (2c)^p \frac{1}{r^{1+p}}$$

qui tend vers 0 lorsque $r \to \infty$. □

4.1. **Formes différentielles sur** $\mathbb{R}^n$**.** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Rappelons que l'"algèbre Grassmanienne" est l'algèbre extérieure d'un espace vectoriel :

$$\Lambda^*(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}[dx_1, \ldots, dx_n]/\{dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i, \forall i, j\}$$

: le produit est associatif mais pas commutatif. L'unité est 1. Elle est graduée en stipulant que chaque dx_i ait degré 1. On note $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ le sous-espace des vecteurs de degré k, donc on a $\Lambda^*(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$.

Définition 4.10. Une k-forme différentielle sur U est un élément de

$$C^\infty(U; \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda^k(\mathbb{R}^n).$$

C'est à dire une expression de la forme :

$$\omega = \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} a_{i_1,\dots,i_k}(x)dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\cdots\wedge dx_{i_k}$$

où $a_{i_1,\dots,i_k}(x)\in C^\infty(U;\mathbb{R})$. On notera $\Omega^k(U)$ l'ensemble des k-formes différentielles et $\Omega^* = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(U)$. (En particulier remarquons que $\Omega^0(U) = C^\infty(U;\mathbb{R})$.) Le support de $\omega\in\Omega^*$ est l'ensemble des $x\in U$ tels que $\omega(x)\neq 0$.

Remarquons le produit de $\Lambda^*(\mathbb{R}^n)$ s'étend par $C^\infty(U;\mathbb{R})$-linéarité à un produit associatif non commutatif sur $\Omega^*(U)$ qui est donc une algèbre graduée (de dimension infinie !). Et il est facile de vérifier que

$$\omega\wedge\eta = (-1)^{ks}\eta\wedge\omega, \forall\omega\in\Omega^k(U), \forall\eta\in\Omega^s(U).$$

On définit un opérateur $d:\Omega^*(U)\to\Omega^*(U)$ $\mathbb{R}$-linéaire de degré 1 qui a les propriétés suivantes :

(1) $d(f) = df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i, \forall f\in\Omega^0(U)$
(2) $d(d\omega) = 0,\ \forall\omega\in\Omega^*(U)$.
(3) $d(\omega\wedge\eta) = d\omega\wedge\eta + (-1)^k\omega\wedge d\eta\ \forall\omega\in\Omega^k(U), \forall\eta\in\Omega^s(U)$.

Explicitement si $\omega = a(x)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_k$ alors $d\omega = \sum_i \frac{\partial a}{\partial x_i}dx_i\wedge dx_1\wedge\cdots\wedge dx_k$, et on l'étend par linéarité aux k formes générales. La vérification que $d^2=0$ est une conséquence directe du Lemme de Schwartz.

Exercice 4.11. Prouver que $d\circ d(\omega) = 0\ \forall\omega\in\Omega^*(U)$.

Définition 4.12 (Pull-back)**.** Soit $V\subset\mathbb{R}^n$ et $U\subset\mathbb{R}^m$ des ouverts et $f: V\to U$ une application lisse. Soit aussi $\omega\in\Omega^k(V)$ donnée par :

$$\omega(x) = \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} a_{i_1,\dots,i_k}(x)dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}, \qquad x\in V$$

pour des fonctions $a_{i_1,\dots,i_k}(x)\in C^\infty(V;\mathbb{R})$. Alors on définit le "pull-back" $f^*:\Omega^k(U)\to\Omega^k(V)$ par :

$$f^*(\omega) = \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} a_{i_1,\dots,i_k}(f(x))df_{i_1}\wedge df_{i_2}\cdots\wedge df_{i_k}.$$

On l'étend ensuite à $f^*:\Omega^*(U)\to\Omega^*(V)$ degré par degré.

Lemme 4.13. *On a :*

(1) $f^*(\omega\wedge\eta) = f^*(\omega)\wedge f^*(\eta)\quad \forall\omega\in\Omega^k(U), \forall\eta\in\Omega^s(U)$
(2) $f^*(d\omega) = d(f^*(\omega))\ \forall\omega\in\Omega^k(U)$
(3) et si $g: W\to V$ *est une autre application lisse alors* $(f\circ g)^*(\omega) = g^*(f^*(\omega))$.

Proof. Le premier énoncé est une vérification directe. Pour le deuxième, il est suffisant de le vérifier pour $\omega = a(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ (les autres cas sont similaires). On a :

$$f^*(d\omega) = f^*(\sum_i \frac{\partial a}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \cdots \wedge dx_k) = \sum_i \frac{\partial a}{\partial x_i}(f(x)) df_i \wedge df_1 \cdots \wedge df_k$$

$$d(f^*(\omega)) = d(a(f(x))df_1 \wedge \cdots \wedge df_k) = \sum_i \frac{\partial a(f(x))}{\partial x_i} dx_i \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge df_k =$$

$$\sum_{i,j} \frac{\partial a}{\partial x_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge df_k = \sum_j \frac{\partial a}{\partial x_j}(f(x)) df_j \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge df_k.$$

Enfin pour le troisième, encore une fois, grâce aux points précédents il est suffisant de le vérifier seulement pour les 0 formes (où c'est trivial) et les 1-formes. Là on a par exemple pour $\omega = a(x)dx_i$:

$$(f \circ g)^*(\omega) = a(f(g(x)))d(f_i \circ g(x)) = a(f(g(x)))df_i(g(x))dg(x) =$$

$$= g^*(a(f(x))df_i(x)) = g^*(f^*(\omega)).$$

□

Remarque 4.14. En particulier si $U' \subset U$ est un autre ouvert et $i : U' \hookrightarrow U$ est l'inclusion, on défini $\omega|_{U'} := i^*(\omega)\ \forall \omega \in \Omega^*(U)$.

Lemme 4.15. *Soit $V, U \subset \mathbb{R}^n$ des ouverts et $\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \in \Omega^n(U)$. Soit $f : V \to U$ une application lisse; alors*

$$f^*(\omega) = \det(Jac(f))(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Proof. Par définition on a $f^*(\omega) = df_1 \wedge \cdots \wedge df_n$ où f_i sont les composantes de f. Donc on a :

$$f^*(\omega) = \sum_{i_1, i_2, \cdots i_n} \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} dx_{i_1} \wedge \frac{\partial f_2}{\partial x_{i_2}} dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial f_n}{\partial x_{i_n}} dx_{i_n} =$$

$$= \sum_{i_1, i_2, \cdots i_n} \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_{i_n}} \epsilon(i_1, \cdots, i_n) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

où $\epsilon(i_1, \cdots, i_n) = 0$ si $\exists j \neq k, i_j = i_k$ et c'est le signe de la permutation $(i_1, \cdots, i_n)$ autrement. □

4.2. **Integration de n-formes et une première version du théorème de Stokes.**

Définition 4.16 (Intégrale d'une n-forme)**.** On définit l'intégrale d'une n-forme $\omega(x) = f(x)dx_1 \cdots dx_n$ sur un domaine compact $D \subset \mathbb{R}^n$ comme

$$\int_D \omega = \int_D f(x)dx_1 \cdots dx_n.$$

Le suivant lemme a été vu en License :

Lemme 4.17 (Formule de changement de variable dans les intégrales multiples)**.** *Soit $f : V \to U$ une application C^1 entre deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $g : U \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Lebesgue sur U. Alors $g \circ f$ est intégrable sur V et*

$$\int_U g(x)dx_1 \cdots dx_n = \int_V (g \circ f)(x)|\det Jacf|dx_1 \cdots dx_n.$$

Corollaire 4.18. *Soit $U, V \subset \mathbb{R}^n$ deux ouverts et $f : V \to U$ de classe C^1 et telle que $sign \det_p(Jac(f)) = \epsilon \; \forall p \in V$ (c'est à dire le signe est constamment $+$ ou constamment $-$). Alors, pour toute $\omega \in \Omega^n(U)$ on a:*

$$\int_V f^*(\omega) = \epsilon \int_U \omega.$$

Définition 4.19 (Cubes et leurs faces)**.** Soit $Q \subset \mathbb{R}^n$ un cube aux arêtes parallèles aux axes coordonnés et soit C_n en particulier celui dont les sommets sont $(\pm 1, \cdots, \pm 1)$. Puisqu'il existe une seule composition d'une homothétie de rapport positif et d'une translation qui transforme C_n en Q, nous allons paramétrer Q par cette transformation affine et donc noter ses sommets par $(\pm 1, \cdots, \pm 1)$. La face $F_k^\eta, \eta \in \{\pm\}, 1 \leq k \leq n$ de Q est le $n-1$-cube dont les sommets sont $(\pm 1, \cdots, \pm 1, \eta, \pm 1, \cdots, \pm 1)$ où η est en position k, soit alors $\phi_k^\eta : C_{n-1} \hookrightarrow F_k^\eta$ la paramétrisation affine de cette face qui envoie $(\pm 1, \ldots, \pm 1)$ en le sommet $(\pm 1, \ldots, \pm 1, \eta, \pm 1, \ldots, \pm 1)$ (où η est en position k). Nous avons donc que :

$$\partial Q := \bigcup_{\eta \in \{\pm 1\}, 1 \leq k \leq n} F_k^\eta.$$

Nous définissons le signe de F_k^η comme $(-1)^{k-1}\eta$.

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $\omega \in \Omega^n(U)$. Soit $Q \subset U$ un cube d'arêtes parallèles aux axes coordonnés. Posons :

$$\int_{\partial Q} \omega := \sum_{\eta \in \pm} \sum_{k=1}^n \int_{C_{n-1}} sign(F_k^\eta)(\phi_k^\eta)^*(\omega).$$

Alors on a :

Lemme 4.20 (Formule de Stokes dans un cube)**.**

$$\forall \omega \in \Omega^{n-1}(U) : \qquad \int_C d\omega = \int_{\partial Q} \omega$$

Proof. Par linéarité de l'intégrale, il suffit de le prouver pour une forme $\omega = a(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{k-1} \wedge dx_{k+1} \wedge \cdots dx_n$. Dans ce cas on a :

$$\int_{\partial Q} \omega = \int_{C_{n-1}} (-1)^{k-1}(\phi_k^+)^*(\omega) - \int_{C_{n-1}} (-1)^{k-1}(\phi_k^-)^*(\omega) =$$

$$= \int_{C_{n-1}} (-1)^{k-1}((\phi_k^+)^* - (\phi_k^-)^*)(\omega) = \int_{C_{n-1}} (-1)^{k-1} a(\phi_k^+(x)) - a(\phi_k^-(x)) dx_1 \cdots dx_{n-1}.$$

De l'autre coté

$$\int_Q d\omega = \int_Q \frac{\partial a(x)}{\partial x_k} (-1)^{k-1} dx_1 \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \wedge dx_{k+1} \wedge \cdots dx_n,$$

ce qui par Fubini Tonelli (en integrant le long de x_k) est égal à la formule précédente. □

Lemme 4.21. *Soit $\omega \in \Omega^{n-1}(U)$ à support compact (c'est à dire que $\omega = 0$ hors d'un compact contenu dans U). Alors pour tout domaine $D \subset U$ contenant le support de ω on a $\int_D d\omega = 0$.*

Proof. Par compacité on peut couvrir D par des petits cubes en obtenant un domaine à faces cubiques D' qui contient D. En particulier on aura $\partial D' \cap supp(\omega) = \emptyset$. On a que $\int_{D'} d\omega$ est égal à la somme des intégrales de $d\omega$ sur chaque cube composant D'. Mais par le Lemme 4.20 pour chaque cube $\int_{C_n} d\omega = \int_{\partial C_n} \omega$ et ce dernier est défini par une somme sur les faces du cube. En sommant cette égalité sur tous les cubes qui composent D', nous observons que lorsque une face d'un cube est contenue dans $int(D')$, alors elle est aussi face d'un autre cube "de l'autre coté" et alors son intégral est compté deux fois avec signes différents, donc il ne contribue pas à la somme totale. De l'autre coté si une face est dans $\partial D'$ alors elle est dans $U \setminus supp(\omega)$ donc l'intégrale de ω sur la face est nul. On a donc $\int_D d\omega = \int_{D'} d\omega = 0$. □

Lemme 4.22. *Soit $\mathbb{R}_n^- := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n \leq 0\}$ et soit $D \subset \mathbb{R}_n^-$ un domaine contenu dans un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. Soit $i : \mathbb{R}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ l'inclusion standard ($i(x_1, \ldots, x_{n-1}) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$) et $D_{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1} = i^{-1}(D \cap \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$. Soit enfin $\omega \in \Omega^{n-1}(U)$ telle que $supp(\omega) \cap R_n^- \subset D$. Alors on a*

$$\int_D d\omega = \int_{D_{n-1}} i^*(\omega).$$

Proof. La preuve est très similaire à celle du Lemme 4.21 : on couvre D par des petits cubes dans $\mathbb{R}_n^-$ et on appelle D' le domaine à faces cubiques ainsi obtenu. On note que $\int_D d\omega = \int_{D'} d\omega$ (car $supp(\omega) \cap \mathbb{R}_n^- \subset D$) et ce dernier est la somme des intégrales de $d\omega$ sur chaque cube composant D'; par le Lemme 4.20 on a alors que $\int_{D'} d\omega$ est la somme des intégrales de ω sur chaque face de chaque cube composant D'. Mais que seules les faces au bord de D' contribuent à cette somme car les autres comptent deux fois avec signes opposés. Mais alors puisque $supp(\omega) \cap \mathbb{R}_n^- \subset D \subset D'$ alors seules les faces dans $i(\mathbb{R}^{n-1}) = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ contribuent et l'intégrale sur ces faces est exactement $\int_{D_{n-1}} i^*(\omega)$. $\square$

5. Variétés différentiables et variétés à bord

5.1. Variétés différentiables.

Définition 5.1. Un espace topologique M est dit une "variété topologique de dimension $m \in \mathbb{N}$", s'il est Haussdorf, à base dénombrable et il est "localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$" c'est à dire $\forall x \in M$ il existe un voisinage U de x (dit une "carte" autour de x) et un homéomorphisme $\phi : U \to V$ où V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 5.2. Prouver qu'une boule ouverte $B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Remarque 5.3. Grâce à l'exercice précédent on peut remplacer V par $\mathbb{R}^n$ dans la Définition 5.1.

Remarque 5.4. Les deux premières hypothèses sont indépendantes de la troisième : comme contre-exemple on peut prendre l'ensemble

$$M = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \sqcup \{0'\} \cup \{0''\}$$

muni de la topologie engendrée par les ouverts de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et par les ensembles de la forme

$$]-a, 0[\sqcup\{0'\}\sqcup]0, b[\text{ et }]-a, 0[\sqcup\{0''\}\sqcup]0, b[$$

où $a, b > 0$. Alors tout ouvert de M est homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}$ par l'application $\phi : M \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\phi(0') = \phi(0'') = 0$. Si on prend une union disjointe d'une quantité non dénombrable de copies de M on obtient alors un espace topologique qui ne satisfait ni la première ni la deuxième condition mais qui est localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Remarque 5.5. Il existe un théorème non trivial dit "de l'invariance du domaine" qui prouve qu'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ n'est jamais homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^m, m \neq n$: cela montre que la notion de dimension d'une variété topologique est bien définie. Si le temps nous le permettra nous le prouverons après avoir parlé d'homologie singulière.

Exercice 5.6. Prouver qu'un ouvert de $\mathbb{R}$ n'est jamais homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n, n > 1$.

Exemple 5.7. Tout ouvert dans $\mathbb{R}^n$ est une variété de dimension n.

Exemple 5.8. Soit $S^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^{n+1} | ||\vec{x}|| = 1\}$ où $|| \cdot ||$ dénote la norme euclidienne. Alors S^n est dit la sphère de dimension n. Pour prouver qu'il s'agit bien d'une variété de dimension n observons qu'il s'agit d'un espace Haussdorf et à base dénombrable (car c'est un sous-espace fermé de $\mathbb{R}^n$). De plus, $\forall \vec{x} \in S^n$ notons $U_x = \{\vec{y} \in S^n | \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle > 0\}$ et notons $\pi_x : U_x \to x^\perp$ la projection orthogonale sur l'hyperplan $x^\perp$ (qui est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$).

Alors π_x est clairement continue (car restriction d'une application continue de $\mathbb{R}^{n+1} \to x^\perp$) et est un homéomorphisme entre U_x et l'ouvert dans $x^\perp$ formé par les vecteurs ayant norme < 1. En fixant une base de $x^\perp$ on trouve un homéomorphisme entre U_x et la boule ouverte de rayon 1 dans $\mathbb{R}^n$.

Nous ne prouverons pas la suivante:

Proposition 5.9 (cf [4], Appendix)**.** *Une variété de dimension* 1 *connexe est homéomorphe à* $\mathbb{R}$ *ou à* S^1.

Remarque 5.10. L'inconvenient de l'exemple précédent est qu'on a trouvé un ensemble infini de carte lorsqu'un effet deux cartes suffisent pour décrire S^n. Soient $\vec{N} = (0, 0, \cdots, 1)$ et $\vec{S} = (0, 0, \cdots, -1)$ et soient $U_N = S^n \setminus S$ et $U_S = S^n \setminus N$. Soit $\pi_N : U_N \to \mathbb{R}^n$ l'application définie par

$$\pi_N(x_1, \dots x_{n+1}) = \frac{1}{(x_{n+1} + 1)}(x_1, \dots x_n)$$

et $\pi_S(x_1, \dots x_{n+1}) = \frac{1}{(x_{n+1}-1)}(x_1, \dots x_n)$. Alors π_N (resp. π_S) est un homéomorphisme entre U_N (resp. U_S) et $\mathbb{R}^n$. De plus $U_N \cup U_S = S^n$ et $\pi_N(U_N \cap U_S)$ et $\pi_S(U_N \cap U_S)$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$ (à l'occurrence ils coincident avec $\mathbb{R}^n \setminus \vec{0}$).

La remarque précédente motive la définition suivante :

Définition 5.11 (Atlas)**.** Soit M un espace topologique Haussdorf et à base dénombrable. Un *atlas* sur M est un ensemble $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i), i \in I\}$ où $\{U_i, i \in I\} \subset M$ est un recouvrement ouvert de M et chaque $\phi_i : U_i \to V_i \subset \mathbb{R}^n$ est un homéomorphisme avec un ouvert V_i.

Remarque 5.12.
1. Dans la définition précédente remarquons que si (U, ϕ) et (U, ϕ') sont deux cartes alors $\phi(U \cap U')$ (resp. $\phi'(U \cap U')$) est un ouvert dans V (dans V'). De plus $\phi' \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap U') \to \phi'(U \cap U')$ est un homéomorphisme.
2. Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont deux atlas sur M alors $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ l'est aussi. Un atlas est maximal s'il n'est pas contenu strictement dans un autre atlas : grâce à la remarque qu'on vient de faire, un tel atlas existe toujours.

Rappelons que pour tout ouvert V de $\mathbb{R}^n$ on dénote $C^\omega(V)$ les fonctions analytiques réelles.

Définition 5.13 (Atlas C^k)**.**
1. Un atlas sur M est de classe $C^k, k \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\} \sqcup \{\omega\}$ si pour tout $(U, \phi), (U', \phi') \in \mathcal{A}$ on a
$$\phi' \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap U') \to \phi'(U \cap U')$$
est de classe C^k. Un atlas ext maximal s'il n'est pas contenu strictement dans un autre atlas.

(2) on dit que des atlas $A_i, i \in I$ sont compatibles si $\forall (U,\phi) \in A_i, (U',\phi') \in A_j$ alors $\phi \circ (\phi')^{-1}|_{\phi'(U\cap U')} : \phi'(U \cap U') \to \phi(U \cap U')$ est de classe C^k. Remarquons qu'alors $\cup_{i\in I} A_i$ est un atlas C^k.
(3) Une variété M de classe C^k est une variété topologique munie d'un atlas maximal de classe C^k.

Remarque 5.14. A est un atlas sur M et $A_i, i \in I$ sont tous les atlas compatibles avec A alors $A \cup_{i\in I} A_i$ est un atlas maximal. Donc les atlas maximaux existent toujours.

Exemple 5.15. Toute ouvert $V \subset R^n$ a une structure de variété analytique : il suffit de prendre l'atlas $\mathcal{A} = \{(V, Id)\}$: il est clairement analytique (car il n'y a qu'une carte!) et peut donc être étendu à un atlas maximal qui le contient.

Exemple 5.16. L'atlas $\mathcal{A} = \{(U_N, \pi_N), (U_S, \pi_S)\}$ sur S^n est de classe C^∞. En effet l'application $\pi_N \circ \pi_S^{-1} : \mathbb{R}^n \setminus \vec{0} \to \mathbb{R}^n \setminus \vec{0}$ est lisse car elle est (exercice !) :

$$\pi_N \circ \pi_S^{-1}(\vec{x}) = \frac{1}{||\vec{x}||^2}\vec{x}.$$

Alors il existe un atlas maximal qui contient $\mathcal{A}$: cela munit S^n de la structure de variété lisse (C^∞).

Lemme 5.17. *Soit $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ une fonction lisse et $v \in \mathbb{R}$ une valeure régulière alors $f^{-1}(v)$ est une variété de dimension n.*

Proof. Commençons par remarquer que $f^{-1}(v)$ est un fermé et donc il a base dénombrable et est Haussdorf. Nous allons maintenant construire un atlas lisse $\mathcal{A}$ pour $f^{-1}(v)$ en construisant une carte autour de chaque point. Soit $p \in f^{-1}(v)$ alors $p \notin \mathsf{Crit}(f)$ et donc il existe une coordonnée x_i telle que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \neq 0$. A moins de re-ordonner les coordonnées de $\mathbb{R}^{n+1}$ on peut supposer que $i = n+1$. Par le Théorème de la fonction implicite il existe un voisinage W de $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ de la forme $W_n \times W_1$ où W_n est un voisinage de $\pi_n(p) \in \mathbb{R}^n$ et W_1 un voisinage de $f(p) \in \mathbb{R}$ et une fonction lisse $\psi : W_n \to \mathbb{R}$ telle que

$$\{x \in W | f(x) = f(p)\} = \{(t, \psi(t)), \forall t \in W_n\}.$$

Alors soit $(U,\phi) := (W \cap f^{-1}(v), \pi_n)$. Si (U',ϕ') est une autre carte ainsi construite, alors sur $\phi(U \cap U')$ on a que $\phi' \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap U') \to \phi'(U \cap U')$ est la composition de $(t, \psi(t))$ et de π'_n où π'_n est la projection sur les n-coordonnées correspondantes à la carte (U',ϕ') et donc le changement de carte est une fonction lisse. □

Exemple 5.18. Soit $f(\vec{x}) := ||\vec{x}||^2$; alors $d_p f = 2\langle \vec{p}, \vec{\cdot} \rangle$ et $S^n = f^{-1}(1)$ est une variété lisse car le seul point critique de f est $\vec{0}$ et donc la seule valeur critique est $f(\vec{0}) = 0$.

5.2. **Fonctions lisses entre variétés.** Soient M et N deux variétés lisses de dimensions respectives m et n.

Définition 5.19. Une fonction $f : N \to M$ est lisse si $\forall p \in N$ il existe une carte (U, ϕ) de l'atlas de N autour p et une carte de l'atlas de M (V, ψ) autour de $f(p)$ telle que

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(V)$$

est une fonction lisse.

Remarque 5.20. Le choix des cartes dans la définition n'impacte pas sur le fait que f soit lisse en p : en effet si l'on change (U, ϕ) par (U', ϕ') et (V, ψ) par (V', ψ') alors on a que

$$\psi' \circ f \circ \phi'^{-1} = (\psi' \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \phi'^{-1})$$

et puisque $(\psi' \circ \psi^{-1})$ et $(\phi \circ \phi'^{-1})$ sont lisses, la fonction de gauche est lisse ssi celle de droite l'est.

Remarque 5.21. De la même manière on peut définir la notion de fonction analytique réelle si M et N le sont.

Remarque 5.22. En particulier si $M = \mathbb{R}$ on peut prendre $(V, \psi) = (\mathbb{R}, Id)$. Dans ce cas, puisque $\mathbb{R}$ est une algèbre commutative (un espace vectoriel muni d'un produit associatif, commutatif et avec unité) alors aussi $C^\infty(M; \mathbb{R})$ l'est.

Définition 5.23 (Difféomorphismes)**.** Une fonction C^∞ $f : N \to M$ est un difféomorphisme si elle est un homéomorphisme et son inverse est C^∞.

5.3. **L'espace tangent à une variété.** Dans cette sous-section nous allons définit l'espace tangent à une variété et re-formuler de plusieurs façons cette définition. Puis nous donnerons la définition de différentiel d'une fonction lisse entre variétés.

Définition 5.24 (Première définition : "pratique")**.** Soit M une variété lisse de dimension n, $\{(U_i, \phi_i), i \in I\}$ un atlas. Alors pour tout $p \in M$, soit $J \subset I$ l'ensemble des chartes qui contiennent p; on définit $T_pM = \prod_{j \in J} \mathbb{R}^n / \sim$ où $v \in \mathbb{R}^n_j$ (où nous notons $\mathbb{R}^n_j$ la copie de $\mathbb{R}^n$ indexée par j) est équivalent à $w \in \mathbb{R}^n_k$ si $w = Jac_{\phi_j(p)}(\phi_k \circ \phi_j^{-1}) \cdot v$.

Lemme 5.25. *T_pM est un espace vectoriel isomorphe à $\mathbb{R}^n$.*

Proof. Nous prétendons que T_pM est en bijection avec $\mathbb{R}^n_j$ (cela pour n'importe quel $j \in J$) ce qui montre la thèse. Pour chaque j, k comme dans la definition on a une identification par un isomorphisme linéaire $\mathbb{R}^n_j \to \mathbb{R}^n_k$ donnée par $Jac_{\phi_j(p)}(\phi_k \circ \phi_j^{-1})$ (qui est une matrice inversible par définition de difféomorphisme en $\mathbb{R}^n$). Du coup T_pM est un quotient de $\mathbb{R}^n_j$. Maintenant nous pretendons que si $v \sim v'$ avec $v, v' \in \mathbb{R}^n_j$ alors $v = v'$. En effet s'ils sont équivalents alors par définition de la relation d'équivalence il devrait exister une suite de chartes $i = j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}, j_n = i$ et de vecteurs $w_k \in \mathbb{R}^n_{j_k}$ tels que $w_{k+1} = Jac_{\phi_{j_k}(p)}(\phi_{k+1} \circ \phi^{-1}_{j_k}) \cdot w_k, k = 1 \ldots n$ et $w_1 = v$ et $w_n = v'$. Mais alors la composition de tous les changements de chartes :

$$\psi = (\phi_n \circ \phi^{-1}_{n-1}) \circ \cdots (\phi_{k+1} \circ \phi^{-1}_k) \circ \cdots \circ (\phi_2 \circ \phi^{-1}_1) = \phi_n \circ \phi^{-1}_1 = Id$$

sur un petit ouvert autour de $\phi_1(p)$ parce que par hypothèse $j_1 = i = j_n$. Mais alors on a :

$$v' = w_n = Jac_{\phi_{n-1}(p)}(\phi_n \circ \phi^{-1}_{n-1}) \cdot w_{n-1} =$$

$$= Jac_{\phi_{n-1}(p)}(\phi_n \circ \phi^{-1}_{n-1}) \cdot Jac_{\phi_{n-2}(p)}(\phi_{n-1} \circ \phi^{-1}_{n-2}) w_{n-2} = \cdots =$$

$$= Jac_{\phi_{n-1}(p)}(\phi_n \circ \phi^{-1}_{n-1}) \cdot Jac_{\phi_{n-2}(p)}(\phi_{n-1} \circ \phi^{-1}_{n-2}) \cdots Jac_{\phi_1(p)}(\phi_2 \circ \phi^{-1}_1) w_1 =$$

$$= Jac_{\phi_1(p)}(\psi) \cdot v = Id \cdot v = v$$

où dans la dernière ligne nous avons utilisé la règle de la chaîne (différentielle de la fonction composée). □

La définition ci-dessous est un peu plus “savante”, mais elle est équivalente à la précédente.

Définition 5.26 (L'espace tangent à une variété en un point : définition sans chartes)**.** Soit M une variété lisse de dimension m et $p \in M$. Une dérivation en p est une application $D : C^\infty(M; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ linéaire, satisfaisant :

(1) la règle de Leibniz : $D(fg) = D(f)g(p) + f(p)D(g)\ \forall f, g \in C^\infty(M; \mathbb{R})$
(2) si $f = 0$ en un voisinage de p alors $D(f) = 0$.

L'ensemble des dérivations en p est noté T_pM et appelé l'espace tangent à M en p.

Lemme 5.27. *L'espace tangent à M en p est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension m.*

Proof. Il est clair que puisque toute combination linéaire de deux dérivations est une dérivation, alors T_pM est un espace vectoriel. Fixons une carte locale (U, ϕ) centrée en p i.e. $\phi : U \to \mathbb{R}^m$ un difféomorphisme tel que $\phi(p) = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$; soit aussi $B \subset \mathbb{R}^n$ la boule unité. Soit $C^\infty_0(U) = \{f \in C^\infty(M) | supp(f) \subset U\}$ et $C_{null}(M) = \{f \in C^\infty(M)\ t.q.\ f|_{\phi^{-1}(B)} = 0\}$. Remarquons que grâce à la condition 2) de la Définition 5.26, on a $D(f^{null}) = 0\ \forall D \in T_pM$ et $\forall f^{null} \in C^\infty_{null}(M)$. De plus si $c \in C^\infty(M)$ est une fonction constante alors $D(c) = 0\ \forall D \in T_pM$ car $D(c) = cD(1) = cD(1 \cdot 1) = 2cD(1) = 0$.

Soient $x_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n), i = 1, \ldots n$ les fonctions coordonnées et définissons des fonctions $\overline{x}_i \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n), i = 1, \ldots n$ à support compact telles que $\overline{x}_i|_B =$

x_i, $\forall i$. Soient alors $\tilde{x}_i \in C_0^\infty(U)$ définies par $\tilde{x}_i := \overline{x}_i \circ \phi$. Nous allons montrer que $\forall f \in C^\infty(M)$ il existe $\tilde{g}_i \in C_0^\infty(U)$ telles que

$$\left(f(x) - f(p) - \sum_i \tilde{x}_i \tilde{g}_i(x) \right) \in C^\infty_{null}(M).$$

En effet soit $\overline{f} := f \circ \phi^{-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Alors on peut écrire

$$\overline{f}(x) - \overline{f}(0) = \int_0^1 \left(\frac{d}{dt} \overline{f}(t\vec{x}) \right) dt = \int_0^1 \sum_i x_i \frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i}(t\vec{x}) dt = \sum_i x_i \int_0^1 \frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i}(t\vec{x}) dt.$$

Alors en choisissant des fonctions $g_i(x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui sur B coincident avec $\int_0^1 \frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i}(t\vec{x})$ on a que

$$\overline{f}(x) = \overline{f}(0) + \left(\sum_i \overline{x}_i g_i \right) + \overline{f}^{null}$$

où $\overline{f}^{null} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est nulle sur B et $\overline{f} = \overline{f}(p) + \overline{f}^{null}$ sur une boule de rayon suffisamment grand. Mais alors en posant $\tilde{g}_i = g_i \circ \phi$ on a:

$$f(x) = f(p) + \sum_i \tilde{x}_i \tilde{g}_i(x) + f^{null}$$

où $f^{null} \in C^\infty_{null}(M)$ et donnée par $f(x) - f(p) - \sum_i \tilde{x}_i \tilde{g}_i(x)$.

Par conséquent $\forall D \in T_pM$ on a

$$D(f) = D(f(p)) + \sum_i D(\tilde{x}_i)\tilde{g}_i(p) + \tilde{x}_i(p) D(\tilde{g}_i) = \sum_i D(\tilde{x}_i)\tilde{g}_i(p). \tag{2}$$

Cela montre que la valeur d'une dérivation D sur f est déterminé par ses valeurs sur les m fonctions $\tilde{x}_i$ et donc que l'espace T_pM a dimension au plus m. Dans ce qui suit nous allons exhiber m dérivations indépendantes. Définissons m dérivations en p, notées $\frac{\partial}{\partial x_i}$ comme suit

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f) := \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(\vec{0}).$$

Il est facile de vérifier qu'il s'agit bien de dérivations en p :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(fg) = \frac{\partial ((fg) \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(\vec{0}) = \frac{\partial \left((f \circ \phi^{-1})(g \circ \phi^{-1}) \right)}{\partial x_i}(\vec{0}) =$$

$$= \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(\vec{0})(g \circ \phi^{-1})(\vec{0}) + \frac{\partial (g \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(\vec{0})(f \circ \phi^{-1})(\vec{0}) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}(f) \cdot g(p) + \frac{\partial}{\partial x_i}(g) \cdot f(p).$$

Et si f est zéro autour de p alors $f\circ\phi^{-1}$ est 0 autour de $\vec{0}$ donc $\frac{\partial}{\partial x_i}(f) := \frac{\partial(f\circ\phi^{-1})}{\partial x_i}(\vec{0}) = 0$.

Maintenant on vérifie directement que $\frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{x}_j) := \delta_{i,j}$; en effet :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{x}_j) = \frac{\partial(\tilde{x}_j\circ\phi^{-1})}{\partial x_i}(\vec{0}) = \frac{\partial\phi(x)x_j}{\partial x_i}(\vec{0}) = \frac{\partial x_j}{\partial x_i}(\vec{0}) = \delta_{i,j}$$

où on a utilisé que par définition $\tilde{x}_j = x_j\circ\phi$ sur $\phi^{-1}(B)$ (et donc dans un voisinage de p).

□

Une troisième définition de T_pM peut être obtenue à l'aide des dérivations le long de courbes. Soit $c:(-1,1)\to M$ une courbe lisse telle que $c(0)=p$. Alors toute fonction lisse $f\in C^\infty(M;\mathbb{R})$ se tire en arrière à une fonction sur $]-1,1[\,:\, f\to f\circ c\in C^\infty(]-1,1[;\mathbb{R})$. On peut alors considérer la dérivation D_c donnée par $D_c(f) := \frac{df\circ c}{dt}|_{t=0}$.

Lemme 5.28. *L'ensemble des dérivations ainsi obtenues coincide avec T_pM.*

Proof. Puisque dans la définition de D_c nous n'avons utilisé que les valeurs de $c(t)$ pour t autour de 0 alors on peut supposer que $im(c)$ soit contenu dans une carte (U,ϕ) centrée en p. Du coup en composant avec la carte on a que $\phi\circ c:(-1,1)\to\phi(U)\subset\mathbb{R}^n$. On a

$$D_c(f) = \frac{df\circ c}{dt}|_{t=0} = \frac{df\circ\phi^{-1}\circ\phi\circ c}{dt}|_{t=0} = Jac(f\circ\phi^{-1})_{\vec{0}}\cdot Jac(\phi\circ c)(0).$$

Mais il existe des constantes $x_1,\dots x_m$ telles que $Jac(\phi\circ c)(0) = \sum_{i=1}^m x_i\vec{e}_i$ et donc on a

$$D_c(f) = \sum_{i=1}^m x_i Jac(f\circ\phi^{-1})_{\vec{0}}\vec{e}_i.$$

Mais les applications linéaires $f\to Jac(f\circ\phi^{-1})_{\vec{0}}\vec{e}_i$ sont facilement vérifiées être des dérivations en p de $C^\infty(M)$ donc des éléments de T_pM et être linéairement indépendantes (car il suffit de les tester sur des fonctions C^∞ qui localement coincident avec les fonctions $x_i\circ\phi$). Elles sont alors une base de $T_p(M)$. □

Lemme 5.29. *Les trois définitions de T_pM sont équivalentes.*

Proof. On a déjà discuté dans la preuve du Lemme 5.3 que la troisième définition est équivalente à la deuxième. De l'autre coté l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dans une charte choisie coincide avec les vitesses possibles en p des courbes en p dans la charte. Donc la troisième définition est aussi équivalente à la première. □

Remarque 5.30 (Explication de la terminologie "espace tangent"). Suite à la troisième définition on remarque ce qui suit. Soit $M \subset \mathbb{R}^{m+1}$ une variété donnée par $f = 0$ où $f : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$ est une fonction lisse pour laquelle 0 est une valeur régulière. Alors $\forall p \in M$ on a que T_pM est isomorphe au n-plan affine en $\mathbb{R}^{m+1}$ tangent à $f = 0$ en p par l'application qui envoie une dérivation $D \in T_pM$ en le vecteur tangent à la courbe qui induit D par l'isomorphisme du Lemme 5.3.

Définition 5.31 (Différentiel d'une fonction lisse)**.** Soit $f : N \to M$ une fonction lisse et $p \in N$. Alors il existe une application linéaire dite "le différentiel de f en p, et notée $d_pf : T_pN \to T_{f(p)}M$ définie par

$$d_p(f)(D)(g) = D(g \circ f)\ \forall g \in C^\infty(M; \mathbb{R}).$$

(Il est facile de vérifier qu'il s'agit bien d'une application linéaire).

Exercice 5.32. Soit N, M et f comme ci dessus. Montrer que si $D \in T_pN$ alors $d_pf(D)$ est une dérivation en $f(p)$ pour $C^\infty(M)$ au sens de la Définition 5.26.

Les définitions ci-dessus ont l'avantage de ne pas dépendre du choix de cartes autour de p et de $f(p)$. Cependant il est utile de comprendre la nature de d_pf en utilisant des cartes.

Soit $f : N \to M$ une fonction lisse, $p \in N$ (U, ϕ) une carte pour N autour de p, et (V, ψ) une carte pour M autour de $f(p)$. Soient $\partial_i \in T_pN, i = 1, \dots n$ (resp. $\partial_j \in T_{f(p)}M$) les dérivations définies par

$$\partial_i^N k := \frac{\partial \left(k \circ \phi^{-1}\right)}{\partial x_i}(\phi(p)),\ \forall k \in C^\infty(N; \mathbb{R}),$$

$$(resp.\ \partial_j^M h := \frac{\partial (h \circ \psi^{-1})}{\partial x_j}\left(\psi(f(p))\right),\ \forall h \in C^\infty(M; \mathbb{R})).$$

Exercice 5.33. Vérifier que ∂_i^N est bien une dérivation en p (resp. ∂_j^M est une dérivation en $f(p)$) et que $\partial_i^N, i = 1, \dots n$ (resp. $\partial_j^M, j = 1, \dots m$) forme une base de T_pN (resp. de $T_{f(p)}M$).

Lemme 5.34. *La matrice de $M(m \times n; \mathbb{R})$ qui exprime d_pf en les bases $\{\partial_i^N\}$ et $\{\partial_j^M\}$ est $Jac_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1})$, c'est à dire :*

$$d_pf(\partial_i^N) = \sum_j Jac_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1})_{(j,i)} \partial_j^M.$$

Proof. Par définition $d_pf : T_pN \to T_{f(p)}M$ est défini en precomposant toute fonction $h \in C^\infty(M)$ par f et puis en agissant par une dérivation de T_pN.

Donc on a :

$$d_pf(\partial_i^N)(h) = \partial_i^N(h \circ f) = \frac{\partial(h \circ f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(p)) = \tag{3}$$

$$= \frac{\partial(h \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \phi^{-1})}{\partial x_i}(\phi(p)) = \tag{4}$$

$$= \sum_j \frac{\partial(h \circ \psi^{-1})}{\partial x_j}(\psi(f(p)))\frac{\partial(\psi \circ f \circ \phi^{-1})_j}{\partial x_i}(\phi(p)) = \tag{5}$$

$$\sum_j Jac_{\phi(p)}(\psi \circ f \circ \phi^{-1})_{(j,i)}\partial_j^M h \tag{6}$$

où dans les premières deux égalités nous avons utilisé les définitions, dans la troisième nous avons composé par $\psi^{-1} \circ \psi = Id|_V$ dans la quatrième nous avons utilisé la dérivé de la fonction composée (en notant $(\psi \circ f \circ \phi^{-1})_j$ la j^{eme} composante de la fonction) et dans la dernière la définition de la matrice Jacobienne et celle de ∂_j^M. Puisque l'égalité vaut pour toute fonction $h \in C^\infty(N)$ nous avons montré la thèse. □

Définition 5.35 (Points et valeurs critiques pour fonctions entre variétés)**.** Soit $f : N \to M$ une fonction lisse. Un point critique est un point $p \in M$ tel que $\mathsf{rang}(d_pf) < m$; l'ensemble des points critiques est noté $\mathsf{Crit}(f)$. Un point régulier est $p \in N \setminus \mathsf{Crit}(f)$. Une valeur $v \in M$ est *critique* si $v \in f(\mathsf{Crit}(f))$ et régulière autrement.

Lemme 5.36. *Soit $f : N \to M$ une fonction lisse et $v \in M$ une valeur régulière. Alors $f^{-1}(v) \subset N$ est une variété de dimension $n - m$.*

Proof. Puisque f est continue $f^{-1}(v)$ est un fermé dans N et donc est à base dénombrable et Haussdorf. Pour construire un atlas il suffit de procéder exactement comme dans le Lemme 5.17: en effet il s'agit d'une construction locale. □

Lemme 5.37 (de Sard, pour les variétés)**.** *Soit $f : N \to M$ lisse ; l'ensemble des valeurs critiques a mesure nulle.*

Proof. Couvrons N par une quantité dénombrable de cartes (U_i, ϕ_i) telles que $f(U_i) \subset V_i$ où (V_i, ψ_i) est un atlas de M. En appliquant le lemme de Sard à la restriction de f à U_i on a que $f(crit(f))$ est une union dénombrable d'ensembles de mesure nulle, donc a mesure nulle. □

5.4. **Variétés à bord.** Notons $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) | x_1 \leq 0\} \subset \mathbb{R}^n$. Une fonction lisse de $\mathbb{R}^n_+$ à $\mathbb{R}^m_+$ est une fonction qui admet une extension lisse à un voisinage ouvert de $\mathbb{R}^n_+$ à valeurs dans un voisinage ouvert de $\mathbb{R}^m_+$.

Définition 5.38 (Variété à bord)**.** Une variété à bord N est un espace topologique Haussdorf et à base dénombrable admettant un atlas maximal

C^∞ de cartes localement homéomorphes à $\mathbb{R}^n$ ou à $\mathbb{R}^n_+$. Les points localement modelés par ceux de $\mathbb{R}^n+$ sont dits les points de bord de M et notés ∂N.

Exercice 5.39. Montrer que ∂N est une variété lisse de dimension $n-1$ sans bord.

L'espace tangent en un point p est défini tout comme avant : il a toujours dimension n, mais si $p \in \partial N$ alors il y a un sous-espace de dimension $n-1$ bien défini de T_pN formé par $T_p(\partial N)$.

Exemple 5.40. La boule fermée $B_n := \overline{B(0,1)}$ dans $\mathbb{R}^n$ est une variété à bord de dimension n. On a $\partial B_n = S^{n-1}$.

Exercice 5.41. Prouver que les 1-variétés connexes, compactes et à bord sont difféomorphes à $[0,1]$.

Si N, M sont variétés à bord, une fonction $f : N \to M$ est lisse si elle est localement lisse. Remarquons qu'on ne demande pas en général que $f(\partial N) \subset \partial M$. La notion de différentiel en un point est définie comme avant, tout comme la notion de valeur critique et point critique. Le lemme suivant se prouve comme sa version pour les variétés fermées (Lemme 5.36) :

Lemme 5.42 (La préimage d'une valeur régulère est une variété à bord)**.** *Soit $f : N \to M$ une fonction lisse entre variétés à bord. Alors la preimage d'une valeur régulière est une variété à bord de dimension $dim(N) - dim(M)$ dont le bord est contenu dans le bord de N.*

5.5. **Le théorème du point fixe de Brouwer.** Dans cette section on va prouver le suivant théorème de Brouwer :

Théorème 5.43. *Toute fonction continue $f : B_n \to B_n$ admet un point fixe.*

Lemme 5.44. *Si $f : B_n \to S^{n-1}$ est une fonction lisse la préimage d'une valeur régulière contient au moins deux points de S^{n-1}.*

Proof. La preimage d'une valeur régulière est une variété lisse à bord, compacte car fermée et contenue dans un compact (B_n). Donc elle est une union finie de segments $[0,1]$ plongés dans B_n avec leur bord dans S^{n-1}. Puisque leur bord contient au moins 2 points on a la thèse. □

Lemme 5.45. *Si $f : B_n \to B_n$ est lisse, alors elle a un point fixe.*

Proof. Si non, le vecteur $\overrightarrow{xf(x)}$ serait non nul pour tout $x \in B_n$ et donc on aurait une application lisse $g : B_n \to S^{n-1}$ définie par $g(x)$ le point plus proche à x dans S^{n-1} et dans la droite affine passant par x et $f(x)$. Cette application est lisse et fixe S^{n-1}, ce qui est impossible car la preimage par g d'un point de S^{n-1} a un seul point (contradiction avec Lemma 5.44). □

Preuve du théorème de Brouwer. On peut approcher toute fonction continue $f : B_n \to B_n$ par un polynôme P ayant norme ≤ 1 avec la précision qu'on veut. Si f n'admet pas de point fixe alors $||f(x)-x|| > c$ pour une constante positive c et alors si P approche f à distance $\frac{c}{4}$ on a que P n'a pas de points fixes, ce qui contredit le Lemme 5.45. $\square$

6. Variétés orientées et degré des applications

Définition 6.1 (Variété orientée)**.** On dit qu'une variété lisse (à bord ou pas) N est orientable si elle admet un atlas lisse tel que les jacobiens des changements de cartes en tout point on determinant positif : i.e.

$$\exists\{(U_i,\phi_i), i\in I\}\ t.q.\ \det(Jac_p(\phi_i\circ\phi_j^{-1}))>0\ \forall p\in\phi_j(U_i\cap U_j).$$

Une variété orientée est la donnée d'une variété lisse et d'un atlas maximal orienté. De façon équivalente une orientation est le choix d'un signe pour toute base de T_pM en tout point $p\in M$ qui soit continu en p et en la base : on peut alors distinguer les bases "positives" des bases "négatives".

Aussi un difféomorphisme entre variétés orientées $f : N\to M$ sera dit "positif" (ou on dira qu'il préserve l'orientation) si en tout point $p\in N$ il a différentielle à determinant positif par rapport à une base de positive de T_pN et une positive de $T_{f(p)}M$.

Si M est une variété orientée et $\{(U_i,\phi_i), i\in I\}$ est un atlas orienté, alors on peut définir $\overline{M}$ comme la variété M muni de l'atlas $\{(U_i, ref\circ\phi_i), i\in I\}$ où $ref : \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ est définie par $ref(x_1,x_2,\dots,x_n)=(x_1,x_2,\dots x_{n-1},-x_n)$. On appelle alors $\overline{M}$ la variété avec l'orientation opposée.

Remarque 6.2. Le groupe $GL(n)$ a deux composantes connexes correspondantes aux deux signes du determinant.

Remarque 6.3. Si M est orientée à bord, alors ∂N est une variété lisse fermée. On peut fixer une orientation sur ∂N par la convention du "vecteur sortant". Pour tout $p\in\partial N$ soit $\vec{v}_1\in T_pM$ un vecteur non nul qui pointe vers l'extérieur de N (i.e. en la carte locale en p $\vec{v}_1=\frac{\partial}{\partial x_1}$). Alors on stipule qu'une base $\vec{v_2},\dots\vec{v}_n$ de ∂N est "positive" si la base $\vec{v}_1,\vec{v_2},\dots\vec{v}_n$ est positive pour T_pN.

Exemple 6.4. Toutes les variétés rencontrées jusqu'à présent sont orientables. Le premier exemple de variété non orientable est le ruban de Moebius: il s'agit de la variété lisse de dimension 2 obtenue en recollant deux cotés opposés d'un rectangle par l'application affine telle que le résultat ne soit pas un anneau (il n'y a que deux choix de bijections affines entre les deux bases !).

Remarque 6.5. La preimage d'une valeur régulière v est aussi une variété orientée : en effet elle est une variété par le Lemme 5.36, et l'orientation est induite en stipulant qu'une base de $\vec{v}_1,\dots\vec{v}_{n-m}$ de $T_pf^{-1}(v)$ est positive si, lorsqu'on la complete à une base de T_pN par des vecteurs $\vec{v}_{n-m+1},\cdots,\vec{v}_n$ on a que la base de $T_{f(p)}M$ formée par $d_pf(\vec{v}_{n-m+1}),\cdots d_pf(\vec{v}_n)$ est positive pour M.

Soit $f : N\to M$ une application lisse entre deux variétés orientées de la même dimension.

Le signe de $d_pf : T_pN \to T_{f(p)}M$ est le signe du determinant de la matrice jacobienne de $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ lorsque (U, ϕ) et (V, ψ) sont des cartes des atlas orientés respectivement autour de $p \in N$ et de $f(p) \in M$.

Définition 6.6 (Degré d'une application lisse)**.** Si M et N sont variétés fermées et connexes et N est compact et $v \in M$ est une valeur régulière alors $f^{-1}(v)$ consiste en un nombre fini de points $p_i \in N$: on définit le degré de f par $\deg(f) = \sum_i sign(d_{p_i}(f))$.

Remarque 6.7. Si $f : N \to M$ a degré k alors, $f : \overline{N} \to M$ et $f : N \to \overline{M}$ ont degré $-k$ où $\overline{N}$ (resp. $\overline{M}$) est la variété N (resp. M) munie de l'orientation opposée.

Proposition 6.8. *Soit N une variété compacte, lisse à bord de dimension $n+1$, M une variété lisse orientée de dimension n et $f : N^{m+1} \to M^m$ une application lisse. Alors $\deg(f|_{\partial N}) = 0$.*

Proof. La preimage d'une valeur $v \in M$ qui est régulière à la fois pour f et pour $f|_{\partial N}$ est une variété compacte c dans N de dimension 1 qui intersecte ∂N transversalement. En chaque point $p \in c$ on peut définir $T_pN = T_pc \oplus T_p^{\perp}c$ (où $T_p^{\perp}c$ est un supplémentaire choisi de façon arbitraire). Puisque par définition de c on a que $T_pc = ker d_pf$ alors la restriction de d_pf à $T_p^{\perp}c$ est un isomorphisme, donc nous pouvons tirer en arrière par *df* une base positive de T_vM. On peut enfin completer cette base à une base positive de T_pN en ajoutant un vecteur de T_pc. Cela montre que c est une union finie de cercles orientés et d'arcs **orientés** $C_1, \dots C_k \subset N$ tels que $f|_{\partial N}^{-1}(v) = \partial C_1 \cup \cdots \cup \partial C_k$. De plus $\partial C_i = \{p_i^+, p_i^-\} \subset \partial N$ et on vérifie directement par la régle du vecteur sortant que le signe de p_i^{ϵ} est ϵ. Donc chaque arc a deux points de bord qui contribuent de façon opposée au degré de $f|_{\partial N}$. Puisque $f|_{\partial N}^{-1}(v)$ est exactement formé par ces points la thèse s'en suit. $\square$

Lemme 6.9. *Soit M une variété lisse connexe orientée. Pour tout points $p, q \in M$ il existe une famille $\varphi_t : M \to M, t \in [0,1]$ de difféomorphismes qui préservent l'orientation tel que $\varphi_1(p) = q$ $\varphi_0 = Id_M$ et $\varphi_t = Id$ hors d'un voisinage de p.*

Proof. Soit U l'ensemble des q' tels qu'il existe une famille $\varphi_t : M \to M, t \in [0,1]$ comme dans l'énoncé ; disons qu'un tel q' est "atteignable". Alors nous allons montrer que si (U_i, ϕ_i) est une carte de l'atlas de M difféomorphe à $\mathbb{R}^m$ telle que $U \cap U_i \neq \emptyset$ alors $U_i \subset U$ et donc que U est ouvert. Pour ce faire nous allons montrer que tout point dans $\mathbb{R}^m$ est "atteignable" à partir d'un autre point de $\mathbb{R}^m$. En effet si $p, q \in \mathbb{R}^m$ considérons un champs de vecteurs en $\mathbb{R}^m$ qui sur le segment $\overline{pq}$ vaut $\vec{pq}$ et qui à l'extérieur d'un voisinage de ce segment est 0. Alors le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\varphi_t(x) = \vec{v}(\varphi_t(x)) \\ \varphi_0(x) = x \end{cases}$$

admet une unique solution pour tout x et donc, à temps fixé donne un difféomorphisme $\varphi_t : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ (car son inverse est donné par le problème de Cauchy de vecteur $-\vec{v}$) qui, puisque $\vec{v} = 0$ hors d'un voisinage de $\overline{pq}$, est l'identité hors de ce voisinage. De plus sur $\overline{pq}$ $\varphi_t(p) = p + t\vec{pq}$ et donc $\varphi_1(p) = q$. Cela montre que si (U_i, ϕ_i) est une carte de l'atlas difféomorphe à $\mathbb{R}^m$ telle que $U \cap U_i \neq \emptyset$ alors $U_i \subset U$.

Alors l'ensemble U des points atteignables est ouvert; mais il est aussi fermé car si $q \in \overline{U}$ alors si (U_i, ϕ_i) est une carte locale centrée en q alors $U_i \cap U \neq 0$ donc $U_i \subset U$. □

Théorème 6.10. *Le degré ne dépend pas du choix de la valeur régulière v et est invariant par homotopie lisse, c'est à dire que si $g : N \to M$ est une autre application C^∞ telle qu'il existe $F : N \times [0,1] \to M$ C^∞ telle que $F(0,x) = f(x), F(1,x) = g(x)$ $\forall x \in N$ alors $deg(g) = deg(f)$.*

Proof. L'invariance homotopique est simple : une homotopie lisse entre f et g est une application lisse de $M \times [0,1] \to N$ et donc par la Proposition 6 on a que $\deg(F|_{\partial M \times [0,1]}) = \deg(f) - \deg(g) = 0$.

Pour prouver que $deg(f)$ ne dépend pas du choix de v, soit $v' \in M$ une autre valeur régulière. D'abord montrons qu'il existe une homotopie C^∞ $G : M \times [0,1] \to M$ telle que $G(y,0) = y$ $\forall y \in M$, $G(v,1) = v'$ et $d_vG(\cdot,1)$ a determinant positif. Remarquons que l'ensemble des points $v' \in M$ tels que cet énoncé est vrai est tout M (voir Lemma 6.9). Alors l'application f et l'application $g(x) = G(x,1) \circ f$ sont homotopes (par $G(x,t) \circ f, t \in [0,1]$) et ont le même degré par le point précédent. Mais $g^{-1}(v') = f^{-1}(v)$ par construction et donc $deg_{v'}(f) = deg_{v'}(g) = deg_v f$. □

7. Formes différentielles sur une variété différentiable

Nous allons définir les formes différentielles sur une variété en utilisant la définition sur $\mathbb{R}^n$ en "collant" les formes différentielles sur une variété. Puis nous définirons l'intégrale d'une forme différentielle de degré n sur une n-variété à l'aide d'une "partition de l'unité". Nous pourrons enfin prouver le théorème de Stokes dans sa forme générale. Soit M une variété differentiable de dimension m et soit $\{(U_i, \phi_i), i \in I\}$ un atlas pour M.

Définition 7.1. Une k-forme différentielle sur M est la donnée d'une k-forme différentielle $\omega_i \in \Omega^k(\phi_i(U_i)), \forall i \in I$ telle que $\forall i \neq j$ on ait

$$(\omega_i)|_{\phi_i(U_i \cap U_j)} = (\phi_j \circ \phi_i^{-1})^*(\omega_j|_{\phi_j(U_j \cap U_i)}).$$

Exemple 7.2. Soit $f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M)$ alors $df \in \Omega^1(M)$. En effet si par définition on a $f_j = f \circ \phi_j^{-1}$ et $df_j = d(f \circ \phi_j^{-1}) \in \Omega^1(\phi_j(U_j))$. Alors sur $U_i \cap U_j$ on a $df_i = d(f \circ \phi_j^{-1} \circ \phi_j \circ \phi_i^{-1}) \in \Omega^1(\phi_i(U_i \cap U_j))$ et donc $f_i = d((\phi_j \circ \phi_i^{-1})^*(f \circ \phi_j^{-1})) = (\phi_j \circ \phi_i^{-1})^*(d(f \circ \phi_j^{-1})) = (\phi_j \circ \phi_i^{-1})^*(df_j)$ où dans l'avant dernière égalité nous avons utilisé le troisième point du Lemme 4.13.

Plus en général si $g_1, \dots g_k \in \Omega^0(M)$ alors $dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k \in \Omega^k(M)$ en effet si la condition de recollement est vérifiée pour g_i alors elle l'est aussi pour dg_i grace au point 2) du Lemme 4.13 et aussi pour les produits extérieurs par le point 1 du même lemme.

On a la suivante :

Proposition 7.3. *$\Omega^*(M)$ est une algèbre associative avec unité et munie d'une "dérivée extérieure" de degré 1 donnée localement par d. Si $f : N \to M$ est une application lisse alors elle induit un morphisme d'algèbres f^* : $\Omega^*(M) \to \Omega^*(N)$ qui commute aux dérivées extérieures et qui est défini en cartes locales.*

Proof. Tous les énoncés sont simples ou découlent directement du Lemme 4.13. Par exemple la bonne définition de d est due au fait que si $(\omega_i)|_{\phi_i(U_i \cap U_j)} = (\phi_j \circ \phi_i^{-1})^*(\omega_j|_{\phi_j(U_j \cap U_i)})$ alors on a $(d\omega_i)|_{\phi_i(U_i \cap U_j)} = d(\phi_j \circ \phi_i^{-1})^*(\omega_j|_{\phi_j(U_j \cap U_i)}) = (\phi_j \circ \phi_i^{-1})^*(d\omega_j|_{\phi_j(U_j \cap U_i)})$. La bonne définition du produit $\wedge$ est prouvée de façon similaire.

La définition de f^* est faite par cartes locales : si $\omega \in \Omega^*(M)$ alors $f^{-1}(U_i), i \in I$ est un recouvrement de N par des ouverts; on choisit alors un atlas $\{(V_j, \psi_j), j \in J\}$ de N tel que $\forall (V_j, \psi_j) \exists i \in I$ tel que $f(V_j) \subset U_i$ et on définit $f^*(\omega)_j := (\phi_i \circ f \circ \psi_j^{-1})^*(\omega_i)$. On vérifie que si (U_k, ϕ_k) est une autre carte contenant $f(V_j)$ alors on a $(\phi_i \circ f \circ \psi_j^{-1})^*(\omega_i) = (\phi_k \circ f \circ \psi_j^{-1})^*(\omega_k)$ car $\omega_k = (\phi_i \circ \phi_k^{-1})^*(\omega_i)$ et on utilise le point 3 du Lemme 4.13. Puis on vérifie alors que si (V_k, ψ_k) est une autre carte de l'atlas de N, alors $f^*(\omega)_k = (\psi_j \circ \psi_k^{-1})^*(f^*(\omega)_j)$. En effet on a :

$$f^*(\omega)_k = \left((\phi_i \circ f \circ \psi_k^{-1}\right)^* (\omega_i)) = \left((\phi_i \circ f \circ \psi_j^{-1} \circ \psi_j \circ \psi_k^{-1}\right)^* (\omega_i)) =$$

$$= (\psi_j \circ \psi_k^{-1})^*((\phi_i \circ f \circ \psi_j^{-1})^*(\omega_i)) = (\psi_j \circ \psi_k^{-1})^* f^*(\omega)_j.$$

Le fait que f^* soit un morphisme d'algèbre découle du point 1 du Lemma 4.13 et le fait que $f^*(d) = df^*$ du point 2. □

7.1. **Partitions de l'unité.** La suivante proposition nous dit que nous pouvons écrire la fonction constante 1 sur une variété comme somme de fonctions lisses, chacune ayant support en une carte. Nous n'allons pas la prouver. Cela nous permettra de "localiser" beaucoup de constructions par la suite :

Proposition 7.4. *Soit M une variété differentiable; alors elle admet un atlas dénombrable $\{(U_i, \phi_i), i \in \mathbb{N}\}$ et des fonctions $\psi_i \in C^\infty(M; [0,1]), i \in \mathbb{N}$ telles que supp$(\psi_i) \subset U_i$ et $\sum_i \psi(i) = 1 \in C^\infty(M)$. De plus, on peut supposer que $\forall m \in M$ $\#\{i | m \in$ supp$(\psi_i)\} < \infty$. Si M est compacte on peut supposer I fini. Nous noterons par la suite $\rho_i = \psi_i \circ \phi_i^{-1} \in C^\infty(\phi_i(U_i); \mathbb{R})$.*

7.2. **Le théorème de Stokes.** Supposons que M est une variété compacte lisse orientée et soit $\{(U_i, \phi_i), 1 \leq i \leq k\}$ un atlas orienté fini. Soit aussi $\psi_i, i \in I$ une partition de l'unité subordonnée à cet atlas.

Définition 7.5. Soit M une variété orientée et $\{(U_i, \phi_i), i \in I$ un atlas orienté. Une forme volume sur M est $\omega \in \Omega^n(M)$ telle que dans tout carte on a $\omega_i = a_i(x) dx_1 \wedge \cdots dx_n$ avec $a_i(x) > 0$ $\forall x \in \phi_i(U_i)$.

Lemme 7.6. *Si M est orientée alors elle admet une infinité de n-formes volume.*

Proof. Pour chaque $j \in I$ définissons une n-forme différentielle ω^j sur M comme suit. Dans la carte (U_j, ϕ_j) posons $\omega_j^j = \rho_j dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, puis si (U_i, ϕ_i) est une autre carte posons $\omega_i^j = (\phi_j \circ \phi_i^{-1})^*(\omega_i^j)$ et si $U_i \cap U_j = \emptyset$ alors posons $\omega_i^j = 0$. La n-forme différentielle ainsi obtenue est positive sur $supp\psi_j$ et nulle ailleurs.

Pour obtenir une forme volume ω posons alors $\omega_i = \sum_j \omega^j$. Puisque la partition de l'unité est telle que $\sum \psi_i = 1$ on a que la somme est bien définie et non nulle en tout point de M et donc ω est une forme volume. Si on multiplie ω par n'importe quelle fonction positive on obtient une autre forme volume, donc il y en a une infinité. □

Définition 7.7. Soit M une variété orientée et compacte et soit $\{(U_i, \phi_i), i \in I\}$ un atlas fini et orienté et $\{\psi_i, i \in I\}$ une partition de l'unité. L'intégrale d'une n-forme ω sur M est

$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathbb{R}^m} \rho_i \omega_i$$

où l'intégration sur $\mathbb{R}^n$ d'une n-forme $a(x)dx_1 \wedge \cdots dx_n$ à support compact est par définition l'intégrale de Lebesgue de $a(x)$ sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 7.8. *L'intégrale $\int_M \omega$ ne dépend pas du choix de l'atlas fini $\mathcal{A} := \{(U_i, \phi_i), 1 \leq i \leq k\}$ ni de la partition de l'unité $\{\psi_i, i \in I\}$.*

Proof. Commençons par remarquer que l'intégrale est linéaire en ω : $\int_M \lambda\omega_1 + \omega_2 = \lambda \int_M \omega_1 + \int_M \omega_2$. Si $\mathcal{A}_2 := \{(V_j, \phi'_j), 1 \leq j \leq k'\}$ est un autre atlas orienté fini et ψ'_j une partition de l'unité qui lui est subordonnée, alors on peut raffiner $\mathcal{A}$ à un atlas $\mathcal{A}' := \{(U_i \cap V_j, \phi_i|_{U_i \cap V_j}), 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k'\}$. Par la linéarité de l'intégrale on a donc que $\int_M \omega = \sum_{i,j} \int_M \psi_i \psi'_j \omega$. Donc pour montrer que l'intégrale est bien défini il est suffisant de le montrer pour une forme différentielle dont le support est contenu dans l'intersection de deux cartes (U_i, ϕ_i) et (V_j, ϕ'_j) de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_2$ respectivement. Supposons donc que *supp*$\omega \subset U \cap V$ où $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ et $(V, \phi') \in \mathcal{A}_2$.

Soit alors $\omega = a(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ l'écriture de ω dans la carte (U, ϕ) et $\omega = b(x)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ son écriture dans la carte (V, ϕ'). Par définition de n-forme différentielle on a que $b(x) = a(\phi \circ \phi'^{-1}(x)) \det Jac_x(\phi \circ \phi'^{-1})$. Mais alors en appliquant la formule de changement de variable dans les intégrales on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(x)dx_1 \cdots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} a(\phi \circ \phi'^{-1}(x)) \det Jac_x(\phi \circ \phi^{-1})dx_1 \cdots dx_n =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} b(x)dx_1 \cdots dx_n.$$

Donc nous avons montré que $\int_M \omega$ est le même si on le calcule dans la carte (U, ϕ) ou dans la carte (V, ϕ').

□

Théorème 7.9 (Stokes)**.** *Soit M une variété compacte orientée à bord et $\omega \in \Omega^{m-1}(M)$ et $i : \partial M \hookrightarrow M$ l'inclusion. Alors on a :*

$$\int_{\partial M} i^*\omega = \int_M d\omega.$$

Proof. Soit $\{(U_i, \phi_i), i \in I\}$ un atlas fini et ρ_i une partition de l'unité qui lui est subordonnée (i.e. $\rho_i \in C_0^\infty(U_i, [0, 1])$ et $\sum_i \rho_i = 1$). Alors $\omega = \sum_i \rho_i \omega$. Alors par définition nous avons que :

$$\int_M d\omega = \sum_i \int_{\mathbb{R}^m} d((\rho_i \omega)_i)$$

où $(\rho_i\omega)_i$ est l'écriture en la carte locale de $\mathbb{R}^m$ de $\rho_i\omega$. Il y a deux cas possibles : soit la carte (U_i, ϕ_i) est une carte difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^m$ soit à un ouvert de $\mathbb{R}^m_+$.

Cas ouvert de $\mathbb{R}^m$. Dans ce cas on a que $(\rho_i\omega)_i$ est une n-forme différentielle à support compact dans $\mathbb{R}^n$. Donc par le Lemme 4.21 on a $\int_{\mathbb{R}^m}(d\rho_i\omega)_i = 0$.

Cas ouvert de $\mathbb{R}^m_+$. Dans ce cas on a que $(\rho_i\omega)_i$ est une n-forme à support compact dans un voisinage de $\mathbb{R}^n_+$. Alors par le Lemme 4.22 on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} d(\rho_i\omega)_i = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} j^*(\rho_i\omega)$$

où $j : \mathbb{R}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ est l'inclusion de $\mathbb{R}^{n-1}$ par $j(x_1, \dots, x_{n-1}) = (0, x_1, \dots, x_{n-1})$. L'énoncé final est alors obtenu en sommant sur les cartes (U_i, ϕ_i). □

7.3. **Formes différentielles fermées et exactes: cohomologie de de Rham.**

Définition 7.10. Une forme $\omega \in \Omega^*(M)$ est fermée si $d\omega = 0$, elle est exacte si il existe $\eta \in \Omega^*(M)$ telle que $d\eta = \omega$. On note $Z^*(M)$ l'espace vectoriel des formes fermées et $B^*(M)$ celui de celles exactes.

Remarque 7.11. Puisque $d^2 = 0$ si une forme est exacte alors elle est fermée donc $B^*(M) \subset Z^*(M)$. La graduation de Ω^* se restreint à une graduation sur $B^*(M)$ et sur $Z^*(M)$. De plus $B^*(M)$ et $Z^*(M)$ sont des algèbres.

Définition 7.12 (Cohomologie de de Rham)**.** L'algèbre de cohomologie de de Rham de M est $H^*(M) = Z^*(M)/B^*(M)$. Elle est graduée par la graduation induite de Z^*. Pour toute $\omega \in Z^*(M)$ on note $[\omega] \in H^*(M)$ sa *classe de cohomologie*.

Remarque 7.13. Dans tout ce qui précède on peut remplacer $\Omega^*(M)$ (et $Z^*(M)$ et $B^*(M)$) par leurs sous-algèbres formées par les formes à support compact. On obtient alors la cohomologie à support compact $H^*_c(M)$.

Théorème 7.14. *Si M est une variété compacte alors $H^*(M)$ est une algèbre de dimension finie et si $f : M \to N$ est une application lisse alors elle induit un morphisme d'algèbres $f^* : H^*(N) \to H^*(M)$ qui dépend seulement de la classe d'homotopie lisse de f.*

Exemple 7.15. Soit M une variété compacte orientée de dimension m et $\omega \in \Omega^m(M)$ une forme volume. Alors $d\omega = 0$ et $\int_M \omega > 0$ donc $\omega \notin B^*(M)$ car autrement il existerait une $n-1$-forme η telle que $\omega = d\eta$ et par le théorème de Stokes on aurait $\int_M \omega = \int_M d\eta = \int \partial M\eta = 0$ car $\partial M = \emptyset$. Donc $0 \neq [\omega] \in H^m(M)$. En effet on peut montrer que $H^m(M) = \mathbb{R}$. Pour être plus concrets, dans le cas de $M = S^1 = [0, 2\pi]/\{0 \sim 2\pi\}$ pensez à $\omega = d\theta$ et pour le cas du tore T^m pensez à $d\theta_1 \wedge \cdots \wedge d\theta_m$.

7.4. $*$**-Une idée de preuve de l'invariance homotopique.** Cette section n'est que pour le lecteur plus curieux. Pour tous les détails nous conseillons les premiers chapitres du livre de Bott et Tu. Nous n'allons pas prouver l'intégralité du Théorème 7.14, mais seulement l'invariance par homotopie lisse de f^*. Pour ce faire, nous allons avoir besoin des lemmes suivants.

Lemme 7.16. *Soit I un intervalle (compacte ou pas) et $M^{(m)}$ une variété lisse. Soit $\pi : M \times I \to M$ la projection et $\forall t \in I$ soit $s_t : M \hookrightarrow M \times I$ le plongement $s_t(x) = x \times \{t\}, \forall x \in M$. Alors π^* et s_t^* sont inverses l'une de l'autre en cohomologie : $\pi^* \circ s_t^* = \mathrm{Id}_{H^*(M\times I)}$ et $s_t^* \circ \pi^* = \mathrm{Id}_{H^*(M)}$.*

Proof. Remarquons qu'on a automatiquement (déjà au niveau de Ω^*) que $s_t^* \circ \pi^* = \mathrm{Id}_{\Omega^*(M)}$ et donc, a fortiori l'identité est vraie en cohomologie. Aussi, soit

$$F_0 = C^\infty(M \times I) \otimes_{\mathbb{R}} \pi^*(\Omega^*(M))$$

et $t : M \times I \to I$ une coordonnée paramétrant I. Soit alors $F_1 = dt \wedge F_0 \subset \Omega^*(M \times I)$ et on vérifie facilement qu'on a $\Omega^*(M \times I) = F_0 \oplus F_1$ (en tant qu'espaces vectoriels).

Pour montrer que $\pi^* \circ s_t^* = \mathrm{Id}_{H^*(M\times I)}$ nous montrerons qu'il existe une application linéaire $K : \Omega^*(M \times I) \to \Omega^*(M \times I)$ de degré -1 telle que :

$$\mathrm{Id}_{M\times I} - \pi^* \circ s_t^* = \pm(dK - Kd). \tag{7}$$

Puisque le second membre est nul en cohomologie, alors cela prouvera l'énoncé. Définissons alors $K : F_0 \oplus F_1$ par $K|_{F_0} = 0$ et $K|_{F_1}(dt \wedge \omega) = \int_t^y \omega ds \in F_0$. Vérifions alors l'identité sur F_0 et sur F_1 séparément.

Vérification sur F_0. Si $\omega \in F_0$ alors elle est une somme de formes différentielles de la forme $f(x, y)\omega_M$ où $\omega_M \in \pi^*(\Omega^*(M))$ c'est à dire ne dépend pas de t. Le coté gauche est alors $f(x, t)\omega_M - f(x, 0)\omega_M$. Le coté droit est

$$\pm Kd\omega = \pm Kd(f(x, s)\omega_M) = \pm K(f(x, s)d\omega_M) \pm K(\omega_M df(x, s)) =$$
$$= \pm K(\omega_M df(x, s)) = \pm K(\omega_M \frac{\partial f}{\partial t}(x, s)dt) =$$
$$= \pm \int_t^y \omega_M \frac{\partial f}{\partial t}(x, s)ds = \omega_M(f(x, y) - f(x, t)).$$

où on a remarqué que $f(x, s)d\omega_M \in F_0$ et aussi $\omega_M df(x, s) - \omega_M \frac{\partial f}{\partial t}(x, s)dt \in F_0$.

Vérification sur F_1. Dans ce cas le coté gauche de l'équation (7) est l'identité sur F_1 (parce-que s_t^* est nul sur F_1). Si $dt \wedge \omega \in F_1$ alors

$$\pm(dK - Kd)(dt \wedge \omega) = \pm d \int_t^y \omega ds \mp K(dt \wedge d\omega) =$$

$$= \pm\omega \wedge dt + \int_t^y \sum_i (\frac{\partial \omega}{\partial x_i} \wedge dx_i) ds - \int_t^y \sum_i (\frac{\partial \omega}{\partial x_i} \wedge dx_i) ds = \pm\omega \wedge dt.$$

□

Lemme 7.17 (de Poincaré)**.** *$H^m(\mathbb{R}^n) = 0, m > 0$ et $H^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$.*

Proof. Si $n = 0$ l'énoncé est vrai. Supposons-le vrai pour n et montrons-le pour $n+1$. Soit $s : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ donnée par $s(x_1, \dots x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0)$ et $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ donnée par $\pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots x_n)$. Alors le Lemme 7.16 montre que s^* et π^* sont des isomorphismes donc la thèse suit. □

Lemme 7.18. *Soit $\omega \in Z^*(M \times [-1, 1])$ et soit $\omega_{\pm 1} = s^*_{\pm 1}\omega$ les restrictions à $M \times \{\pm 1\}$ respectivement. Alors $[\omega_1] = [\omega_{-1}] \in H^*(M)$.*

Proof. Soit $s_t : M \to M \times \{t\} \hookrightarrow M \times [-1, 1]$ et $\pi : M \times [-1, 1] \to M$ la projection. Par le Lemme 7.16 on a que s^*_t est l'inverse de π^* en cohomologie. Alors $s^*_+ = s^*_-$. □

Corollaire 7.19 (Invariance par homotopie lisse)**.** *Si $f_t : M \to N, t \in [0, 1]$ est une homotopie lisse et $\omega \in Z^*(N)$ alors $[f^*_1(\omega)] = [f^*_0(\omega)] \in H^*(M)$.*

8. Homologie cellulaire et simpliciale

8.1. **Complexes algébriques.** Donnons d'abord les bases de *l'algèbre homologique*. Cette théorie est la théorie générale sous-jacente plusieurs constructions fondamentales en topologie algébrique, géométrie algébrique algèbre, etc. Dorénavant R sera un anneau commutatif.

Définition 8.1. Un R-module *gradué* est un R-module C décomposé en somme directe de R-modules indexée par $\mathbb{Z}$:

$$C = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} C_i.$$

Si C et D sont deux R-modules gradués, un morphisme R-lineaire $f : C \to D$ est de *degré* $d \in \mathbb{Z}$ si il décale le degré par d: $f(C_i) \subset D_{i+d}$.

La restriction de f à C_i est notée d'habitude f_i.

Définition 8.2. Un *complèxe de chaînes* $C = (C, \partial)$ sur R est un R-module gradué C muni d'une application R-linéaire de degré -1 $\partial : C \to C$ t.q. $\partial \circ \partial = 0$, dite l' *application de bord* ou la *différentielle* de C.

Un complexe de chaînes $C = (C, \partial)$ est d'habitude noté comme suit:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{i+2}} C_{i+1} \xrightarrow{\partial_{i+1}} C_i \xrightarrow{\partial_i} C_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \cdots$$

Les éléments de C_i sont dits les *i-chaînes*. Remarquons que $\operatorname{Im} \partial_{i+1} \subset \operatorname{Ker} \partial_i$ dans C_i. Les éléments de $\operatorname{Ker} \partial_i$ sont dits les *i-cycles* et ceux de $\operatorname{Im} \partial_{i+1}$ sont les *i-bords*.

Définition 8.3. L' *homologie* de C est le R-module gradué

$$H(C) := \frac{\operatorname{Ker} \partial}{\operatorname{Im} \partial}$$

dont la partie de degré i est $H_i(C) = \operatorname{Ker} \partial_i / \operatorname{Im} \partial_{i+1}$.

La classe d'homologie d'un $c \in \operatorname{Ker} \partial$ est notée $[c]$.

Définition 8.4. Si $C = (C, \partial)$ et $D = (D, \partial)$ sont complexes de chaînes sur R, un morphisme de complexes de chaînes entre C et D est une application R-lineaire $f : C \to D$ de degré 0 t.q. $f \circ \partial = \partial \circ f$.

De façon diagrammatique, un morphisme de complexes de chaînes $f : C \to D$ s'écrit

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{i+2}"] & C_{i+1} \arrow[r, "\partial_{i+1}"] \arrow[d, "f_{i+1}"] & C_i \arrow[r, "\partial_i"] \arrow[d, "f_i"] & C_{i-1} \arrow[r, "\partial_{i-1}"] \arrow[d, "f_{i-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial_{i+2}"] & D_{i+1} \arrow[r, "\partial_{i+1}"] & D_i \arrow[r, "\partial_i"] & D_{i-1} \arrow[r, "\partial_{i-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Remarquons que f envoie cycles dans cycles et bords dans bords.

Définition 8.5. Le morphisme *induit* par un morphisme de complexes de chaînes $f : C \to D$ *en homologie* est l'application R linéaire de degré 0

$$H(f) : H(C) \longrightarrow H(D)$$

définie par $H(f)([c]) = [f(c)]$ pour tout $c \in \operatorname{Ker} \partial$.

Nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} H(g \circ f) = H(g) \circ H(f) \\ H(\mathrm{Id}_C) = \mathrm{Id}_{H(C)} \end{array} \right. \tag{8}$$

pour tout morphismes de chaînes $f : C \to D$ et $g : D \to E$. Dit autrement, l'homologie est un foncteur de la categorie des complexes de chaînes sur R avec leurs morphismes dans la catégorie des R-modules gradués avec leurs morphismes de degré 0.

Un suite à trois termes de R-modules $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ (où f et g sont R-lineaires) est *exacte* si $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$. En général, une suite de R-modules

$$\cdots \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_{i-2} \xrightarrow{f_{i-2}} \cdots$$

est *exacte* si chaque sous-suite de trois termes consécutifs est exacte. Une *suite exacte courte* de R-modules est une suite exacte de R-modules de la forme

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0.$$

Dit autrement, une suite exacte courte est une sui suite à trois termes $L \overset{f}{\to} M \overset{g}{\to} N$ qui est exacte où f est injective et g is surjective.

Théorème 8.6. *Un suite exacte courte de complexes de chaînes sur R*

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

(où f et g sont morphismes de complexes de chaînes) induit une suite exacte longue en homologie

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_n(C) \xrightarrow{H(f)} H_n(D) \xrightarrow{H(g)} H_n(E) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(C) \xrightarrow{H(f)} \cdots$$

Içi, l'application R-linear map $\partial_* : H(E) \to H(C)$ de degré -1 est définie par $\partial_*([e]) = [f^{-1}\partial g^{-1}(e)]$ et est dite morphisme de connexion.

Proof. Les arguments sont basés sur "diagram chasing" dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d, "\partial"] & \vdots \arrow[d, "\partial"] & \vdots \arrow[d, "\partial"] & \\
0 \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\partial"] & D_{n+1} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\partial"] & E_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\partial"] & D_n \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\partial"] & E_n \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{n-1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\partial"] & D_{n-1} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\partial"] & E_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes et les colonnes sont d'"ordre" 2 (i.e. $\partial \circ \partial = 0$).

La définition du morphisme de connexion ∂_* est détaillée comme suit. Soit $[e] \in H_n(E)$. Puisque g est surjective, il existe $d \in D_n$ t.q. $g(d) = e$. Alors, $\partial(d) \in D_{n-1}$ satisfait $g\partial(d) = \partial g(d) = \partial e = 0$. Donc, par exactitude de la ligne en bas du diagramme, il y a $c \in C_{n-1}$ t.q. $f(c) = \partial(d)$. Remarquons que c est un cycle puisque $f\partial(c) = \partial f(c) = \partial\partial(d) = 0$ et f est injective. Posons $\partial_*([e]) = [c]$ et on vérifie facilement que cette quantité dépend seulement sur la classe d'homologie $[e]$ (i.e. est indépendante des choix du cycle e, de la chaîne d et du cycle c). Il est clair que ∂_* est R-lineaire. Puis, on peut vérifier par le même type d'arguments ("diagram chasing") que la suite longue en homologie est exacte. $\square$

Exercice 8.7. Détailler la preuve du Théorème 8.6.

Exercice 8.8. Montrer que dans le Théorème 8.6, le morphisme de connexion ∂_* est *naturel*. Dit autrement si on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "c"] & D \arrow[r, "g"] \arrow[d, "d"] & E \arrow[r] \arrow[d, "e"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "f'"] & D' \arrow[r, "g'"] & E' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dans la catégorie des complexes de chaînes alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
H(E) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "H(e)"] & H(C) \arrow[d, "H(c)"] \\
H(E') \arrow[r, "\partial_*"] & H(C')
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

8.2. **L'homologie cellulaire.** Nous avons déjà défini la notion de degré pour une application **lisse** entre deux variétés compactes orientées de la même dimension, et nous avons remarqué qu'elle est bien définie à homotopie lisse près. Nous commençons par observer qu'en effet le degré est bien défini aussi pour des applications continues et cela à homotopie (même juste continues) près. Nous allons prouver cela seulement pour les sphères, mais l'étudiant intéressé pourra essayer de développer le contenu de la remarque suivante.

Lemme 8.9. *Toute $f : S^n \to S^n$ est homotope à une application $g : S^n \to S^n$ lisse; de plus on peut supposer que $||f - g||_\infty < \frac{1}{2}$. Si $g_1, g_2 : S^n \to S^n$ sont deux applications lisses comme ci-dessus, alors leur degré coincide. Par consequent, on peut définir $deg(f) := deg(g_1) = deg(g_2)$.*

Proof. Nous pouvons étendre f à une fonction $\tilde{f} : B^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ continue. Par le théorème de Stone-Weierstrass les polynômes sont denses par rapport à la norme $|| \cdot ||_\infty$ dans l'espace des fonctions continues $B^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ par conséquent nous pouvons approcher $\tilde{f}$ par une fonction polynomiale P à distance $< \frac{1}{2}$. La fonction g cherchée est alors $\frac{P}{||P||_2}$.

En effet remarquons que $P|_{S^n} : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ est une application lisse telle que $||P|_{S^n} - f||_\infty < \frac{1}{2}$ alors $\frac{P|_{S^n}}{||P|_{S^n}||} : S^n \to S^n$ est bien définie et lisse. De plus f est homotope à $\frac{P|_{S^n}}{||P|_{S^n}||_2}$ par

$$H(x,t) = \frac{(1-t)f(x) + t\frac{P|_{S^n}(x)}{||P|_{S^n}(x)||_2}}{||(1-t)f(x) + t\frac{P|_{S^n}(x)}{||P|_{S^n}(x)||_2}||_2}.$$

Cela montre le premier point de la thèse. Si g_1 et g_2 sont deux telles fonctions, alors leur distance réciproque (par rapport à la norme ∞) est < 1 donc elles sont homotopes par l'homotopie :

$$F(x,t) := \frac{(1-t)g_1(x) + tg_2(x)}{||(1-t)g_1(x) + tg_2(x)||_2}.$$

Par conséquent elles ont le même degré. (Remarque : dans les homotopies ci-dessus ce qu'il faillait contrôler était que le dénominateur ne soit pas 0 d'où le contrôle sur la distance $|| \cdot ||_\infty$.) □

Définition 8.10 (Le complexe cellulaire)**.** Soit X un CW-complexe. Pour tout $i \geq 0$ soit C_i le $\mathbb{Z}$-module libre (i.e. groupe abelien) engendré librement par les i-cellules de X (et $C_{-1} = 0$). Pour toute i-cellule e^i_k (rappelons qu'une telle cellule est donnée par une application de recollement $\phi^i_k : S^{i-1} \to X_{i-1}$), soit $\pi^i_k : X_i \to S^i$ la projection au quotient par le sous-espace $X_i \setminus int(e^i_k)$ (en effet remarquons que l'espace quotient est une sphère). Soit $\partial_{i+1} : C_{i+1} \to C_i$

défini par $\partial_{i+1}e_h^{i+1} = \sum_k n_k e_k^i$ où k varie sur les i-cellules et n_k est le degré de l'application $\pi_k^i \circ \phi_h^{i+1} : S^i \to S^i$.

Théorème 8.11. *On a que $\partial \circ \partial = 0$.*

Malheureusement la preuve de ce théorème se base sur des techniques d'homologie singulière que nous ne traiterons pas. Pour cette raison, dans la prochaine sous-section nous traiterons l'exemple de l'homologie simpliciale, définie pour une classe spéciale de CW-complexes : les complexes simpliciaux.

Içi nous nous limiterons à en déduire que par conséquent (C, ∂) est complexe algébrique : l'homologie cellulaire de X est alors définie comme l'homologie de ce complexe.

Proposition 8.12. *Si $f : X \to Y$ est une application cellulaire alors elle induit un morphisme de complexes algébriques de degré 0.*

Exercice 8.13. Prouver la proposition.

Nous n'allons pas non-plus prouver le suivant :

Théorème 8.14 (Approximation cellulaire)**.** *Soit $f : X \to Y$ une application continue (pas nécessairement cellulaire) entre deux CW-complexes. Alors f est homotope à une application cellulaire. De plus si $f, g : X \to Y$ sont applications cellulaires qui sont homotopes alors les applications f_* et g_* induites sur l'homologie du complexe coincident.*

Pour une preuve (qui est tout à fait au niveau de l'étudiant averti) voir le Théorème 4.8 de [3]. La consequence suivante est celle qui nous intéresse principalement car elle nous dit que l'homologie cellulaire est un invariant à homotopie près des espaces topologiques qui sont homotopiquement équivalents à des CW-complexes. Nous n'allons pas la prouver, mais nous nous limiterons à l'utiliser pour calculer l'homologie d'un espace topologique homotopiquement équivalent à un CW-complexe. Dans la prochaine sous-section nous prouverons (en partie) le corollaire analogue pour les espaces simpliciaux.

Corollaire 8.15. *Si un espace topologique X a deux structures de CW-complexe, alors leurs homologies sont isomorphes. Par conséquent si X est homotopiquement équivalent à un CW-complexe Y alors l'homologie cellulaire de Y est un invariant à équivalence homotopique près de X.*

8.3. **Homologie simpliciale.** Dans la section précédente, nous avons défini un complexe algébrique associé à tout CW-complexe, mais nous n'avons pas pu prouver qu'en effet on avait bien $\partial \circ \partial = 0$. Dans cette section nous allons étudier des CW-complexes particuliers, les complexes simpliciaux. Pour ces espaces, il est facile de définir explicitement (sans même parler de degré topologique des applications !) le complexe algébrique associé et de prouver qu'on a bien $\partial\circ\partial = 0$. Les résultats d'approximation simpliciale à homotopie près, par contre, continuent à rester au délà des objectifs pedagogiques de ce cours.

Si $v_0, v_1, \ldots, v_d$ sont vecteurs d'un espace vectoriel réel, le simplexe affine dont les sommets sont $v_0, v_1, \ldots v_d$ est l'ensemble

$$\{\sum_{i=0}^{d} t_i v_i | t_i \in [0,1], \sum_{i=0}^{d} t_i = 1\}.$$

Définition 8.16 (Complexes simpliciaux abstraits et leurs réalisations géométriques)**.** Un complexe simplicial abstrait S est une liste d'ensembles finis tels que si $K_2 \in S$ et $K_1 \subset K_2$ alors $K_1 \in S$. Notons $V(S) = \cup_{K\in S} K$.

La réalisation géométrique de S est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{V(S)}$ défini par $|S| := \cup_{K\in S}|K|$ où $|K|$ est le simplexe dont les sommets sont les vecteurs e_i avec $i \in K$. Sa topologie est définie par $C \subset |S|$ est fermé si pour chaque $K \in S$ on a que $C \cap |K|$ est fermé dans $|K|$. Nous disons que K est un "k-simplexe" ou "face" si $card(K) = k+1$ et $|K|$ sa réalisation géométrique. (Remarquons que les 0-simplexes, aussi dits "sommets" de S, sont en correspondance avec $V(S)$).

Exercice 8.17. Soit

$$S_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}\},$$
$$S_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,3\}\} \text{ et}$$
$$S_3 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Dessiner $|S_i|, i = 1,2,3$.

Définition 8.18 (Applications simpliciales et leurs réalisations géométriques)**.** Une application $f : S_1 \to S_2$ entre complexes simpliciaux abstraits est une application $f : V(S_1) \to V(S_2)$ telle que $f(K) \in S_2\ \forall K \in S_1$. Sa réalisation géométrique, notée $|f|$, est l'application $|f| : |S_1| \to |S_2|$ telle que $|f|(|K_0|) = |f(K_0)|$ pour tout 0-simplexe de S_1 et telle que pour tout $K \in S_1$ la restriction de $|f|$ à $|K|$ est affine.

Exercice 8.19. Soit S_1 et S_3 comme dans l'Exercice 8.17 et soit $f : S_3 \to S_1$ la seule application simpliciale telle que $f(\{1\}) = \{1\}, f(\{2\}) = \{2\}, f(\{3\}) = \{1\}$. Décrire la réalisation géométrique de f.

Remarque 8.20. Si $V(S)$ est ordonné (par exemple il est en bijection avec $\mathbb{N}$), alors $|S|$ est un CW-complexe de type particulier car les n-cellules sont par définition non seulement homéomorphes à la boule de dimension n mais elles sont aussi munies d'un homeomorphisme linéaire avec le n-simplexe dans R^{n+1}.

Définition 8.21 (Simplexes orientés)**.** Un k-simplexe orienté dans S est une application bijective

$$\sigma : \{0, \dots, k\} \to K$$

pour un $K \in S$. Pour tout $i \in \{0, \dots k\}$ nous noterons $\hat{\sigma_i}$ le $k-1$-simplexe orienté identifié par l'application de $\{0, 1, \dots, k-1\} \to K \setminus \sigma(i)$ définie par

$$\hat{\sigma_i}(j) = \begin{cases} \sigma(j) & if\ j < i \\ \sigma(j+1) & if\ j \geq i \end{cases}$$

Définition 8.22 (Complexe de l'homologie simpliciale)**.** Le complexe de l'homologie simpliciale de S, noté $C_*(S)$ est $C_*(S) := \bigoplus_{k \geq 0} C_k(S)$ où $C_k(S)$ est défini par

$$C_k(S) := \mathbb{Z}\langle\{k - simplexes\ orientés\ \ dans\ S\}\rangle / Sim$$

(le $\mathbb{Z}$-module engendré par les k-simplexes orientés) où Sim est le module engendré par $\sigma - sign(b) \cdot (\sigma \circ b)$ pour toute bijection $b : \{0, \dots, k\} \to \{0, \dots, k\}$ et tout k-simplexe orienté σ. Pour tout $k \geq 1$ l'opérateur de bord $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$ est l'application $\mathbb{Z}$-linéaire définie sur les simplexes orientés par $\partial_k(\sigma) := \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \hat{\sigma}_i$.

Exercice 8.23. Vérifier que le complexe de l'homologie simpliciale est bien un complexe algébrique (i.e. $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0,\ \forall k \geq 0$).

Exercice 8.24. Calculer l'homologie simpliciale de $S_i, i = 1, 2, 3$ si S_i sont les complexes simpliciaux de l'Exercice 8.17. Que vaut H_2 ? Que vaut H_1? que vaut H_0 ?

Lemme 8.25. *Si $f : S_1 \to S_2$ est une application simpliciale alors elle induit un morphisme de complexes algébriques $f_* : C_*(S_1) \to C_*(S_2)$ définie sur les k-simplexes orientés par $f(\sigma) = f \circ \sigma$ si $f \circ \sigma$ est une bijection et* 0 *autrement. Par conséquent f induit une application au niveau des homologies $f_* : H_*(S_1) \to H_*(S_2)$.*

Exercice 8.26. Vérifier qu'on a bien $\partial \circ f_* = f_* \circ \partial$.

Définition 8.27. Si S est un complexe simplicial, sa subdivision barycentrique est le complexe simplicial abstrait $bar(S)$ tel que

$$V(bar(S)) = \{b(K), K \in S\}$$

(où $b(K)$ est une notation indiquant le "barycentre de K") et les d-simplexes de $bar(S)$ sont les ensembles $\{b(K_0), b(K_1), \cdots, b(K_d)\}$ où $K_i \in S$ est un i-simplexe et $K_0 \subset K_1 \cdots \subset K_d$.

Exercice 8.28. Dessiner $|bar(S_i)|, i = 1, 2, 3$ si S_i sont les complexes simpliciaux de l'Exercice 8.17.

Lemme 8.29. *On a que $H_*(S) = H_*(bar(S))$ où l'isomorphisme est induit par un morphisme injectif $i : C_*(S) \to C_*(bar(S))$ défini sur k-simplexe singulier $\sigma : \{0, 1, \dots k\} \to K$ par*

$$i(\sigma) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{d+1}} sign(\tau)\sigma_\tau$$

où σ_τ est la suite croissante de barycentres de la forme

$$\{b\left(\sigma \circ \tau(0)\right), b\left(\sigma \circ \tau(0), \sigma \circ \tau(1)\right), \cdots, b\left(\sigma \circ \tau(0), \cdots, \sigma \circ \tau(n)\right)\}.$$

Exercice 8.30. Vérifier le lemme dans le cas $S = \{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ et de S_1, S_2, S_3 où S_i sont les complexes simpliciaux de l'Exercice 8.17.

Remarque 8.31. Si $f : S_1 \to S_2$ est une application simpliciale alors elle induit une application simpliciale $bar(f) : bar(S_1) \to bar(S_2)$ définie uniquement par

$$bar(f)(\{b(K_0), b(K_1), \cdots, b(K_d)\}) = \{b(f(K_0)), b(f(K_1)) \cdots, b(f(K_d))\}.$$

Définition 8.32. On note $bar^n(S)$ la n-eme subdivision barycentrique itérée de S. En appliquant n-fois la remarque précédente on défini $bar^n(f)$ pour toute $f : S_1 \to S_2$ simpliciale.

Nous ne prouverons pas le suivant :

Théorème 8.33 (Théorème d'approximation simpliciale)**.** *Soit $f : |S_1| \to |S_2|$ une application continue. Alors il existe un $n \geq 0$ tel que f est homotope à la réalisation géométrique d'une application $g : bar^n(S_1) \to bar^n(S_2)$ qui lui est "proche" au sens suivant : pour tout $x \in |bar^n(S_1)|$ et pour tout $K \in bar^n(S_2)$ tel que $f(x) \in |K|$ alors on a que $|g|(x) \in |K|$.*

Ni le suivant :

Théorème 8.34. *Si $f, g : S_1 \to S_2$ sont applications simpliciales telles que $|f|$ et $|g|$ sont homotopes, alors $f_* = g_* : H_*(S_1) \to H_*(S_2)$.*

Le corollaire suivant nous assure qu'en gros, si on sait réaliser un espace topologique par un complexe simplicial alors on peut en calculer un invariant (l'homologie) par le biais de ce complexe simplicial, et cela ne dépend pas du choix du complexe simplicial (pourvu que ce dernier ait une réalisation géométrique homotopiquement équivalente à l'espace de départ).

Corollaire 8.35. *Si un espace topologique X est homotopiquement équivalent à la réalisation $|S|$ pour un complexe simplicial S alors $H_*(S)$ est un invariant à équivalence homotopique près de X.*

Proof. Nous allons prouver que deux complexes simpliciaux qui sont homotopiquement équivalents à X ont homologies isomorphes. Soit $f_i : X \to |S_i|$

deux équivalences homotopiques entre X est les réalisations géométriques de deux complexes simpliciaux $S_i, i = 1, 2$. Soit $g_i : |S_i| \to X$ l'inverse homotopique de f_i. Alors par le Théorème 8.33, $f_2 \circ g_1 : S_1 \to S_2$ est une équivalence homotopique qui est homotope à une application simpliciale $h : |bar^n(S_1)| \to |bar^n(S_2)|$ entre des subdivisions barycentrique itérées de S_1 et S_2. Le même est vrai pour $f_1 \circ g_2$, appelons l'application simpliciale associée $k : |bar^m(S_2)| \to |bar^m(S_1)|$. Supposons par exemple que $n \geq m$ alors on a que $k \circ h$ et $h \circ k$ sont applications simpliciales homotopes aux identités de $bar^n(S_1)$ et de $bar^n(S_2)$ donc par le Théorème 8.34 les applications induites par h et k au niveau de l'homologie sont l'une inverse de l'autre. Finalement par le Lemme 8.29 ces homologies sont aussi isomorphes à celles de $H_*(S_i), i = 1, 2$. □

9. Homologie singulière

Cette section n'est pas au programme et n'est içi que pour les lecteurs curieux.

9.1. **Définition de l'homologie singulière.** Dans la section précédente nous avons appris ce qu'est un complexe algébrique et nous avons énoncé (sans preuve) le fait qu'à tout CW-complexe est associé un complexe algébrique dont l'homologie est un invariant à équivalence homotopique près des espaces topologiques admettant des structures de CW-complexes. Dans cette section nous allons définir une notion d'homologie (dite singulière) qui est définir pour tout espace topologique (sans restriction).

Le *d-symplexe standard* est le symplexe de dimension d

$$\Delta^d := \left\{ (x_0, x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^{d+1} : \sum_{i=0}^{d} x_i = 1 \text{ and } x_i \in [0,1] \right\}.$$

Soit $(e_0, e_1, \ldots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{d+1}$. Alors, Δ^d est l'enveloppe convexe de $e_0, e_1, \ldots, e_d$. Si $v_0, v_1, \ldots, v_d$ sont points dans $\mathbb{R}^n$, notons $[v_0, v_1, \ldots, v_d]$ l'unique application affine $\Delta^d \to \mathbb{R}^n$ définie par $e_i \mapsto v_i$. En particulier, pour tout $i = 0, \ldots, d$, la i^{eme} *face* de Δ^d est l'application affine

$$\delta_i^d := [e_0, \ldots, \widehat{e_i}, \ldots, e_d] : \Delta^{d-1} \longrightarrow \Delta^d.$$

Définition 9.1. Soit X un espace topologique. Un *d-symplèxe singulier* en X est une application continue $\sigma : \Delta^d \to X$.

Pour $d \geq 0$, notons $\Delta_d(X)$ le groupe abélien engendré librement par l'ensemble des d-simplexes singuliers en X. Un élément c de $\Delta_d(X)$ est dit une *d-chaîne singulière*, et s'écrit comme somme formelle finie

$$c = \sum_i r_i \cdot \sigma_i$$

où $r_i \in \mathbb{Z}$ et $\sigma_i : \Delta^d \to X$. Pour tout $d < 0$, on conviendra que $\Delta_d(X) := 0$.

Le *bord* d'un d-symplexe singulier $\sigma : \Delta^d \to X$ est la$d-1$-chaîne singulière

$$\partial_d(\sigma) := \sum_{i=0}^{d} (-1)^i \cdot \sigma \circ \delta_i^d.$$

Par extension linéaire on obtient un morphisme de groupes

$$\partial_d : \Delta_d(X) \longrightarrow \Delta_{d-1}(X).$$

Lemme 9.2. *On a* $\partial \circ \partial = 0$.

Proof. Par définition de ∂, on a

$$\partial_d\partial_{d+1}(\sigma) = \partial_d\left(\sum_{j=0}^{d+1}(-1)^j\cdot\sigma\circ\delta_j^{d+1}\right) = \sum_{i=0}^{d}\sum_{j=0}^{d+1}(-1)^{i+j}\sigma\circ\delta_j^{d+1}\circ\delta_i^d.$$

Notons que pour tout $0\le j\le i\le d$,

$$\delta_j^{d+1}\circ\delta_i^d = [e_0,\ldots,\widehat{e_j},\ldots,\widehat{e_{i+1}},\ldots,e_d] = \delta_{i+1}^{d+1}\circ\delta_j^d.$$

Donc, on conclut que

$$\begin{aligned}\partial_d\partial_{d+1}(\sigma) &= \sum_{0\le i<j\le d+1}(-1)^{i+j}\sigma\circ\delta_j^{d+1}\circ\delta_i^d + \sum_{0\le j\le i\le d}(-1)^{i+j}\sigma\circ\delta_j^{d+1}\circ\delta_i^d\\ &= \sum_{0\le i<j\le d+1}(-1)^{i+j}\sigma\circ\delta_j^{d+1}\circ\delta_i^d + \sum_{0\le j\le i\le d}(-1)^{i+j}\sigma\circ\delta_{i+1}^{d+1}\circ\delta_j^d\\ &= \sum_{0\le i<j\le d+1}(-1)^{i+j}\sigma\circ\delta_j^{d+1}\circ\delta_i^d + \sum_{0\le j<i\le d+1}(-1)^{i-1+j}\sigma\circ\delta_i^{d+1}\circ\delta_j^d\end{aligned}$$

est triviale. □

Définition 9.3. Le *complexe des chaînes singulières* de X est le complexe de chaînes $\Delta(X) = (\Delta(X),\partial)$ sur $\mathbb{Z}$.

Chaque application continue $f : X\to Y$ induit un morphisme de complexes de chaînes $f_\Delta : \Delta(X)\to\Delta(Y)$ défini par $\sigma\mapsto f\circ\sigma$. Il est immédiat que

$$\left\{\begin{array}{l}(g\circ f)_\Delta = g_\Delta\circ f_\Delta\\ (\mathrm{Id}_X)_\Delta = \mathrm{Id}_{\Delta(X)}\end{array}\right. \tag{9}$$

pour toutes application continues $f : X\to Y$ and $g : Y\to Z$. Dit autrement, Δ est un foncteur de la catégorie des espaces topologiques à celle des complexes de chaînes. Donc nous avons obtenu des invariants topologiques, mais ils sont trop gros : par exemple $\Delta_0(X)$ est le groupe abélien librement engendré par l'ensemble X. Il est donc naturel de "réduire" le foncteur Δ en le composant avec le foncteur homologie H.

Définition 9.4. L' *homologie singulière* de X est le groupe abélien gradué

$$H(X) := H(\Delta(X)).$$

Chaque application continue $f : X\to Y$ induit un morphisme de groupes $f_* : H(X)\to H(Y)$ de degré 0 défini par $f_* = H(f_\Delta)$. Selon (8) et (9), on a

$$\left\{\begin{array}{l}(g\circ f)_* = g_*\circ f_*\\ (\mathrm{Id}_X)_* = \mathrm{Id}_{H(X)}\end{array}\right. \tag{10}$$

pour toutes les applications continues $f : X\to Y$ et $g : Y\to Z$. Dit autrement, H est un foncteur de la catégorie des espaces topologiques à la catégorie des groupes abéliens gradués.

Il est facile de généralizer l'homologie singulière aux couples (X, A). Dans ce cas l' inclusion $i : A \to X$ définit un morphisme de complexes de chaînes $i_\Delta : \Delta(A) \to \Delta(X)$ qui est injectif. Donc aussi un complexe quotient

$$\Delta(X, A) := \Delta(X)/\Delta(A)$$

et une suite exacte courte de complexes de chaînes

$$0 \longrightarrow \Delta(A) \xrightarrow{i_\Delta} \Delta(X) \xrightarrow{j_\Delta} \Delta(X, A) \longrightarrow 0 \tag{11}$$

où la projection canonique j_Δ est pensée comme induite par une "application d'inclusion" $j : X \to (X, A)$. Les cycles de $\Delta(X, A)$ sont représenté par des chaînes singulières en X dont le bord est contenu dans A et, donc, peuvent être vus comme des cycles "relatifs".

Définition 9.5. Le groupe d' *homologie singulière relative* de (X, A) est le groupe abélien gradué

$$H(X, A) := H\left(\Delta(X, A)\right).$$

Encore une fois il est facile de contrôler que H est un functeur de la catégorie des couples d' espaces topologiques à celle des groupes abéliens gradués. Selon le Théorème8.6, la suite exacte courte (11) induit une suite exacte longue en homologie

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

Par convention, on pose $H(X, \varnothing) := H(X)$ et $H(\varnothing) := 0$ de façon que cette suite est valide aussi si $A = \varnothing$.

Exercice 9.6. Soit X un espace topologique dont les composantes connexes par arcs sont $(X_i)_i$. Prouver que les inclusions $X_i \subset X$ induisent un morphisme de groupes

$$\bigoplus_i H(X_i) \xrightarrow{\simeq} H(X).$$

Exercice 9.7. Montrer que l'homologie du point est $H_0(\{\star\}) \simeq \mathbb{Z}$ en dimension 0, et est $H_i(\{\star\}) = 0$ en dimension $i \geq 1$. Déduire l'homologie d'un espace discret.

9.2. **Calcul de H_0 et H_1.** Soit X un espace topologique. On a déjà prouvé que $\Delta_0(X)$ est le groupe abelien engendré librement par X et nous pouvons considérer le morphisme de groupes

$$\varepsilon : \Delta_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}, \ \sum_i z_i \cdot x_i \longmapsto \sum_i z_i$$

dit d'*augmentation*.

Proposition 9.8. *Si X est connexe par arcs, alors l'augmentation induit un morphisme de groupes*

$$\varepsilon_* : H_0(X) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Z}.$$

En général, $H_0(X)$ est le groupe abelien engendré librement par l'ensemble des composantes connexes par arcs de X.

Proof. Par convention, ∂_0 est trivial et donc $H_0(X) = \Delta_0(X)/\operatorname{Im}\partial_1$. Pour tout 1-simplexe singulier $\sigma : \Delta^1 \to X$, nous avons $\partial\sigma = \sigma(e_1) - \sigma(e_0)$. Donc, $\varepsilon(\partial\sigma) = 0$ et ε induisent un morphisme de groupes $\varepsilon_* : H_0(X) \to \mathbb{Z}$.

Choisissons un point base $\star \in X$. Pour tout $x \in X$, on peut trouver un chemin $\sigma : I \to X$ de $\star$ à x. Donc, en identifiant l'interval I avec Δ^1, σ est un 1-simplexe singulier t.q. $\partial\sigma = x - \star$. Cela montre que pour tout $c = [\sum_i z_i \cdot x_i] \in H_0(X)$,

$$c = \sum_i z_i \cdot [x_i] = \sum_i z_i \cdot [\star] = \varepsilon_*(c) \cdot [\star]$$

en on en déduit que ε_* est un isomorphisme. Le deuxième énoncé suit de l' Exercice 9.6. □

Calculons maintenant $H_1(X)$ en fonction du $\pi_1(X, \star)$. Dans la suite nous identifions l'intervalle I avec le 1-simplexe standard Δ^1 par un homéomorphisme

$$\Delta^1 \xrightarrow{\cong} I \tag{12}$$

qui envoie e_0 dans 0 et e_1 dans 1. Alors, tout chemin fermé $\alpha : \star \rightsquigarrow \star$ définit un 1-simplexe singulier $\alpha : \Delta^1 \to X$ such that $\partial\alpha = 0$.

Claim 9.9. Soit $\alpha_1 : \star \rightsquigarrow \star$ et $\alpha_2 : \star \rightsquigarrow \star$ deux chemins fermés. Alors,

$$\alpha_1 \simeq \alpha_2 \Longrightarrow [\alpha_1] = [\alpha_2] \in H_1(X).$$

En effet, Δ^2 s'identifie à $(I \times I)/(0 \times I)$. Si $F : I \times I \to X$ est une homotopie rélative à $\{0, 1\}$ entre $\alpha_1 : I \to X$ et $\alpha_2 : I \to X$, alors F définie une application continue $F : \Delta^2 \to X$. Pour une bonne identification entre $(I \times I)/(0 \times I)$ et Δ^2, on a $\partial F = \alpha_1 - \alpha_2 + \star = \alpha_1 - \alpha_2 + \partial\star$, où $\star$ denote les applications constantes $\Delta^1 \to \{\star\}$ et $\Delta^2 \to \{\star\}$ respectivement. Donc, α_1 diffère de α_2 par un bord.

Donc, nous avons une application bien définie $\mathsf{Hur} : \pi_1(X, \star) \to H_1(X)$ qu'on peut voir que ne dépend pas du choix de l'identification (12). Le prochain énoncé montre que Hur est un morphisme de groupes:

Claim 9.10. Soit $\alpha_1 : \star \rightsquigarrow \star$ et $\alpha_2 : \star \rightsquigarrow \star$ chemins fermés. Alors, $\alpha_1 * \alpha_2$ est homologue à $\alpha_1 + \alpha_2$

En effet on définit une application continue $F : \Delta^2 \to X$ qui est α_1 sur $[e_0, e_1]$, α_2 sur $[e_1, e_2]$ et $\alpha_1 * \alpha_2$ sur $[e_0, e_2]$. Par exemple on peut demander que F soit constante sur les segments orthogonaux à $[e_0, e_2]$, ce qui determine F.

Théorème 9.11 (Hurewicz)**.** *Le morphisme de groupes* $\mathsf{Hur} : \pi_1(X, \star) \to H_1(X)$ *induit un isomorphisme de groupes*

$$\mathsf{Hur} : \pi_1(X,\star)/\pi_1(X,\star)' \xrightarrow{\simeq} H_1(X)$$

où $\pi_1(X,\star)' = [\pi_1(X,\star), \pi_1(X,\star)]$ *est le sous-groupe dérivé de* $\pi_1(X,\star)$*.*

Proof. Pour tout $x \in X$, choisissons un chemin $\lambda_x : \star \rightsquigarrow x$. En utilisant que le groupe $\Delta_1(X)$ est abélien libre et que $\pi_1(X,\star)/\pi_1(X,\star)'$ est abelien, on obtient un morphisme de groupes $\mathrm{G} : \Delta_1(X) \to \pi_1(X,\star)/\pi_1(X,\star)'$ en le définissant sur chaque 1-simplexe singulier $\sigma : \Delta^1 \to X$. Pour cela, regardons σ comme un chemin $I \to X$, et posons

$$\mathrm{G}(\sigma) := \left\{ \left[\lambda_{\sigma(0)} * \sigma * \overline{\lambda_{\sigma(1)}} \right] \right\}.$$

Soit $\tau : \Delta^2 \to X$ un 2-simplexe singulier. Soit $\tau_i := \tau \circ \delta_i^2 : \Delta^1 \to X$ la i-ème face de τ. Alors, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}(\partial\tau) &= \mathrm{G}(\tau_0 - \tau_1 + \tau_2) \\
&= \mathrm{G}(\tau_2 + \tau_0 - \tau_1) \\
&= \mathrm{G}(\tau_2) \cdot \mathrm{G}(\tau_0) \cdot \mathrm{G}(\tau_1)^{-1} \\
&= \left\{ [\lambda_{\tau(e_0)} * \tau_2 * \overline{\lambda_{\tau(e_1)}}][\lambda_{\tau(e_1)} * \tau_0 * \overline{\lambda_{\tau(e_2)}}][\lambda_{\tau(e_0)} * \tau_1 * \overline{\lambda_{\tau(e_2)}}]^{-1} \right\} \\
&= \left\{ [\lambda_{\tau(e_0)} * \tau_2 * \overline{\lambda_{\tau(e_1)}}][\lambda_{\tau(e_1)} * \tau_0 * \overline{\lambda_{\tau(e_2)}}][\lambda_{\tau(e_2)} * \overline{\tau_1} * \overline{\lambda_{\tau(e_0)}}] \right\} \\
&= \left\{ [\lambda_{\tau(e_0)} * \tau_2 * \tau_0 * \overline{\tau_1} * \overline{\lambda_{\tau(e_0)}}] \right\}.
\end{aligned}$$

Mais, il est facile de vérifier que le lacet $\tau_2 * \tau_0 * \overline{\tau_1}$ basé en $\tau(e_0)$ est homotope au lacet constant en $\tau(e_0)$. Donc, $\mathrm{G}(\partial\tau)$ est trivial. Donc, G induit un morphisme de groupes

$$\mathrm{G} : H_1(X) \longrightarrow \pi_1(X,\star)/\pi_1(X,\star)'.$$

Il est facile de vérifier que G est l'inverse de Hur. □

Exercice 9.12. Calculer le premier groupe d' homologie de tout graph.

Exercice 9.13. Calculer le premier groupe fondamental de toute surface compacte connexe. Puis en déduire son premier groupe d'homologie.

Exercice 9.14. Montrer que le morphisme de Hurewicz est *naturel*, i.e. toute application continue $f : X \to Y$ envoyant x_0 en y_0 donne un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X,x_0) \arrow[r, "f_\sharp"] \arrow[d, "\mathsf{Hur}"'] & \pi_1(Y,y_0) \arrow[d, "\mathsf{Hur}"] \\ H_1(X) \arrow[r, "f_*"'] & H_1(Y). \end{tikzcd}$$

Donc, la surjectivité de $f_\sharp$ implique la surjectivité de f_*. Est-ce que cela est vrai pour l'injectivité ?

9.3. **Lex axiomes de Eilenberg–Steenrod.** L'homologie singulière satisfait des propriétés spécifiques données ci-dessous connues comme les *axiomes de Eilenberg–Steenrod*.

Dans leur livre fondamental [2], Eilenberg et Steenrod ont défini une *théorie de homologique* H comme une collection d'applications qui associent à chaque couple topologique (X, A) un groupe abélien gradué $H_*(X, A)$, à chaque application continue $f : (X, A) \to (Y, B)$ un morphisme de groupes gradués $f_* : H_*(X, A) \to H_*(Y, B)$ de degré 0, et à chaque couple (X, A) un morphisme de groupes $\partial_* : H_*(X, A) \to H_*(A)$ de degré (-1). De plus ces applications doivent satisfaire les axiomes suivants, où nous notons $H(X) := H(X, \varnothing)$ pour tout espace topologique X.

(1) $\forall (X, A)$, H envoie l'identité de (X, A) sur l'identité de $H(X, A)$.

(2) Pour toute applications continues $f : (X, A) \to (Y, B)$ et $g : (Y, B) \to (Z, C)$, on a $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

(3) Pour toutes applications continues $f : (X, A) \to (Y, B)$, on a $\partial_* \circ f_* = (f|_A)_* \circ \partial_*$.

(4) *Axiome d'exactitude:* $\forall (X, A)$, la suite

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

est exacte, où $i : A \to X$ et $j : X \to (X, A)$ dénotent les applications d' inclusion.

(5) *Axiome d'homotopie:* Si $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ sont homotopes, alors $f_* = g_*$.

(6) *Axiome d'Excision :* $\forall A \subset B \subset X$ t.q. $\overline{A} \subset int(B)$, l'inclusion $i : (X \setminus A, B \setminus A) \to (X, B)$ induit un isomorphisme

$$i_* : H(X \setminus A, B \setminus A) \xrightarrow{\simeq} H(X, B).$$

(7) *Axiome de la Dimension:* L'homologie du point $H(\{\star\})$ est concentrée en degree 0, i.e. $H_i(\{\star\}) = 0$ for all $i \neq 0$.

Dans le langage des catégories, les premiers deux axiomes disent que H est un foncteur de la catégorie des espaces topologiques à celle des groupes abéliens gradués. Le troisième axiome dit que $\forall i \in \mathbb{Z}$, ∂_* est une transformation naturelle du foncteur H_i au foncteur H_{i-1} pre-composé avec le foncteur canonique $(X, A) \mapsto A$ de la categorie des couples topologiques dans celle des espaces topologiques.

Il est connu que si H et H' sont deux théories homologiques et si $H_0(\{\star\}) \simeq H'_0(\{\star\})$, alors $H(K)$ est canoniquement isomorphe à $H'(K)$ pour tout CW complexe K, qui est un type d'espace très général en topologie. (Plus en général si H et H' satisfont deux axiomes de plus alors $H(X)$ est canoniquement isomorphe à $H'(X)$ pour tout espace topologique X [5].)

Il y a des théories qui satisfont tous les axiomes à l'exception de celui de la dimension. Ces théories sont dites *generalisées* et incluent les théories de cobordisme, qui jouent un rôle important en topologie.

Mais nous n'avancerons pas dans cette direction axiomatique, et H dénotera dorenavant l'homologie singulière. On a vu que H satisfait les axiomes (1-2) et (4). L' axiome (3) est une conséquence de l'Exercice 8.8, tandis-que l'axiome (7) est donné par l'Exercice 9.7. Les Axiomes (5) et (6) sont plus difficiles à prouver, et le lecteur peut consulter un des livres [2, 5, 1, 3]. L'Axiome (5) montre que tout comme le groupe fondamental l'homologie est un invariant homotopique. Donc, nous déduisons de la fonctorialité qu'une équivalence homotopique induit un isomorphisme en homologie, qu'espaces contractibles ont l'homologie d'un point, et ainsi de suite.

9.4. **Propriétés de l'homologie singulière.** Outre les axiomes de Eilenberg–Steenrod, il y a plusieurs propriétés satisfaites par l'homologie singulière.

Théorème 9.15. *Soit $B \subset A \subset X$ espaces topologiques, et $i : (A, B) \to (X, B)$ et $j : (X, B) \to (X, A)$ les inclusions. Alors, on a une suite exacte longue*

(13)
$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_n(A, B) \xrightarrow{i_*} H_n(X, B) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A, B) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

où le morphisme $\partial_* : H_n(X, A) \to H_{n-1}(A, B)$ est la composition de l'application $\partial_* : H_n(X, A) \to H_{n-1}(A)$ donnée par la couple (X, A) avec l'application $H_{n-1}(A) \to H_{n-1}(A, B)$ induite par l'inclusion $A \to (A, B)$.

Ce résultat peut être dérivé des axiomes de Eilenberg–Steenrod (see [**?**]), ou de la définition des groupes d'homologie rélative comme suit.

Preuve du Théorème 9.15. La suite de l'énoncé est la suite exacte longue associée à la suite exacte courte de complexes de chaînes suivante par le Théorème 8.6:

$$0 \longrightarrow \Delta(A)/\Delta(B) \longrightarrow \Delta(X)/\Delta(B) \longrightarrow \Delta(X)/\Delta(A) \longrightarrow 0$$

□

La proposition suivante dit que les groupes d'homologie relative peuvent presque être remplacés par des groupes d'homologie absolus. Pour l'énoncer, nous avons besoin de renforcer la notion de "retracte par déformation". Un sous-espace $R \subset X$ est un *retracte par déformation fort* de X s'il y a une retraction r de X sur R qui est homotope à l'identité de X relativement à R.

Proposition 9.16. *Soit $A \subset X$ un fermé t.q. A est un retracte par deformation forte d'un de ses voisinages. Alors, la projection canonique $(X, A) \to (X/A, A/A)$ induit un isomorphisme $H(X, A) \simeq H(X/A, A/A)$.*

Notons que A/A est un point preferé de X/A, donc $H(X/A, A/A)$ est l' homologie de X/A relative à un point. En général, pour un espace topologique pointé $(Y, \star)$, on peut considérer le groupe d' homologie relative $H(Y, \{\star\})$ qui est parfois appelé l'homologie singulière *reduite* de Y. L'axiome d' exactitude et celui de la dimension axiom montrent que l'inclusion $Y \to (Y, \{\star\})$ induit un isomorphisme $H_i(Y, \{\star\}) \simeq H_i(Y)$ en dimension $i \neq 0$, et $H_0(Y, \{\star\})$ est le groupe abelien libre engendré par les composantes connexes par arcs de Y qui ne contiennent pas $\star$.

Proof of Proposition 9.16. Soit U un voisinage de A t.q. A est un retracte fort par deformation de U. Nous avons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
H(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & H(X,U) \arrow[d] & H(X \setminus A, U \setminus A) \arrow[l] \arrow[d] \\
H(X/A, A/A) \arrow[r] & H(X/A, U/A) & H((X/A) \setminus (A/A), (U/A) \setminus (A/A)) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

où les applications horizontales sont induites par les inclusions et les verticales par la projection canonique de $X \to X/A$.

Puisque U est un retracte par deformation de A, le morphisme de groupes $H(A) \to H(U)$ induit par l' inclusion est un isomorphisme. Il en suit de la suite exacte longue associée à la couple (U, A) que $H(U, A) = 0$. Donc, Théorème 9.15 implique que l'application $H(X, A) \to H(X, U)$ est un isomorphisme. De façon similaire, en utilisant que la retraction par deformation est forte, nous obtenons que l'application $H(X/A, A/A) \to H(X/A, U/A)$ est un isomorphime. Par excision les applications $H(X \setminus A, U \setminus A) \to H(X, U)$

et $H((X/A) \setminus (A/A), (U/A) \setminus (A/A)) \to H(X/A, U/A)$ sont aussi des isomorphismes. Donc, toutes les applications horizontales du diagramme sont des isomorphismes. Il est aussi vrai que l'application verticale de droite est un isomorphisme parce que la projection $X \setminus A \to (X/A) \setminus (A/A)$ est un homeomorphisme envoyant $U \setminus A$ sur $(U/A) \setminus (A/A)$. La conclusion s'en suit. $\square$

Mais l'outil le plus important pour le calcul de l'homologie singulière est la suite de *Mayer–Vietoris* qui est une sorte d'analogue du théorème de Seifert–Van Kampen pour l'homologie.

Théorème 9.17 (Mayer–Vietoris)**.** *Soit $A, B \subset X$ t.q. $X = int(A) \cup int(B)$. Soit $i^A : A \cap B \to A$, $i^B : A \cap B \to B$, $j^A : A \to X$ et $j^B : B \to X$ les inclusions. Alors, il y a une suite exacte longue*

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_n(A \cap B) \xrightarrow{i^A_* \oplus i^B_*} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{j^A_* - j^B_*} H_n(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A \cap B) \xrightarrow{i^A_* \oplus i^B_*} \cdots$$

où $\partial_* : H_n(X) \to H_{n-1}(A \cap B)$ est la composition

$$H_n(X) \longrightarrow H_n(X, B) \xrightarrow[\simeq]{\textit{excision}} H_n(A, A \cap B) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A \cap B).$$

Le Théorème 9.17 peut être déduit des axiomes de Eilenberg–Steenrod ou prouvé directement. Voici une idée de cette preuve. Il y a une suite exacte de complexes de chaînes

$$0 \longrightarrow \Delta(A \cap B) \xrightarrow{i^A_\Delta \oplus i^B_\Delta} \Delta(A) \oplus \Delta(B) \xrightarrow{j^A_\Delta - j^B_\Delta} \Delta^{\{A,B\}}(X) \longrightarrow 0$$

où $\Delta^{\{A,B\}}(X)$ denote le groupe abelien engendré librement par les simplexes singuliers en X qui sont supportés soit en A soit en B. Par le Théorème 8.6, cela induit une suite exacte longue, qui donne le Théorème 9.17 avec $H(X)$ remplacé par l' homologie de $\Delta^{\{A,B\}}(X)$. Donc, on s'est reduit à prouver que ces groupes sont isomorphes, et cela est la part technique de l'argument [1, 3]. En particulier, cette preuve montre que le morphisme $\partial_* : H_n(X) \to H_{n-1}(A \cap B)$ est en effet un morphisme de connexion.

Exercice 9.18. Soit $(X, \star)$ et $(Y, \bullet)$ des espaces topologiques pointés. Trouver des conditions suffisantes sur $(X, \star)$ et $(Y, \bullet)$ pour que les inclusions de X et Y dans $X \vee Y$ induisent un isomorphisme

$$H(X, \star) \oplus H(Y, \bullet) \simeq H(X \vee Y, \star).$$

Exercice 9.19. Calculer l' homologie de S^1 en utilisant Mayer–Vietoris.

Exercice 9.20. Calculer l' homologie de S^2 en utilisant Mayer–Vietoris.

Exercice 9.21. Calculer l' homologie de S^n en utilisant Mayer–Vietoris. Montrer qu'il y a une identification canonique entre $H_n(S^n)$ et $H_0(S^0)$. En déduire que $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$ de façon canonique.

D'après l'exercice précédent on peut alors définir le degré topologique d'une application $f : S^n \to S^n$ comme le scalaire induit par $H_n(f)$.

Exercice 9.22. Montrer que $H_n(D^k, \partial D^k) = \mathbb{Z}$ si $k = n$ et 0 autrement.

Exercice 9.23 (Théorème de l'invariance du domaine)**.** Montrer qu'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ n'est pas homéomorphe à un ouvert V de $\mathbb{R}^m$ avec $m \neq n$. (Aide: considérer l'action sur $H_n(U, U \setminus pt)$ de l'homéomorphisme et utiliser une excision de $U \setminus D$ ou D est un disque centré en pt.)

References

1. Bredon – *Topology and geometry.* Volume 139 of Graduate Texts in Mathematics. Springer- Verlag, New York, 1993.
2. S. Eilenberg and N. Steenrod. –*Foundations of algebraic topology.* Princeton University Press, Prince- ton, New Jersey, 1952.
3. A. Hatcher. – *Algebraic topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
4. J. Milnor – *Topology from a differential point of vue.* The University Press of Virginia Charlottesville.
5. R. M. Switzer – *Algebraic topology—homotopy and homology.* Springer-Verlag, New York, 1975. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 212.

Institut de Mathématiques de Toulouse, 118 route de Narbonne, Toulouse F-31062

E-mail address: `francesco.costantino@math.univ-toulouse.fr`