TD1

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire gaussienne centrée réduite. Soit A une variable aléatoire telle que $P(A=1) = P(A=-1) = 1/2$. On suppose que A et X sont indépendantes. Montrer que $Y := AX$ suit une loi gaussienne centrée réduite, que $cov(X,Y) = 0$, mais que X et Y ne sont pas indépendantes.

Définition : loi du $\mathcal{X}^2$

Soient $X_1, ..., X_k$ des variables gaussiennes centrées réduites mutuellement indépendantes. Alors, la loi de $X_1^2 + ... + X_k^2$ est appelée loi du $\mathcal{X}^2$ à k degrés de liberté et est notée $\mathcal{X}^2(k)$.

Théorème de Cochran

Soit $X \sim \mathcal{N}(0, I_d)$, avec I_d la matrice identité de $\mathbb{R}^d$. Soient $E_1, ..., E_k$ des espaces vectoriels, deux à deux orthogonaux, de dimensions respectives $d_1, ..., d_k$ tels que $\mathbb{R}^d = E_1 \oplus ... \oplus E_k$. Soit P_{E_i} la projection orthogonale sur E_i. Alors, les variables aléatoires $||P_{E_1}X||^2, ..., ||P_{E_k}X||^2$ sont mutuellement indépendantes et suivent des lois du $\mathcal{X}^2$ à respectivement $d_1, ..., d_k$ degrés de liberté.

Exercice 2

Démontrer le théorème de Cochran.

Exercice 3

Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-4t^2} dt$.

Exercice 4

Soit $(X,Y)^t$ un vecteur gaussien centré (vecteur moyenne égal à zero) avec $\mathbb{E}(X^2) = 4$, $\mathbb{E}(Y^2) = 1$ et tel que les variables $2X+Y$ et $X-3Y$ soient indépendantes.

1) Déterminer la matrice de covariance de $(X,Y)^t$.

2) Montrer que le vecteur $(X+Y, 2X-Y)^t$ est également gaussien, puis déterminer sa matrice de covariance.

Exercice 5

Soit $X \in \mathbb{R}^3$ un vecteur gaussien centré de matrice de covariance

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1) X possède t'il une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$? Si oui donner son expression.

2) Trouver une matrice A de taille 3×3 telle que les composantes du vecteur AX soient des variables indépendantes et de variances 1.

On pourra utiliser, avec

$$U = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que $U^tU = UU^t = I_3$ et que $Q = UDU^t$.

3) Déterminer la loi de $X_1 + 2X_2 - X_3$, où $X = (X_1, X_2, X_3)^t$.

TD2

Exercice 1

Soient $y_1, ..., y_n$ des réels. Déterminer le réel $\hat{m}$ qui minimise la fonction $f(m) = \sum_{i=1}^n (y_i - m)^2$ par deux méthodes différentes

- Par dérivation
- En écrivant $\hat{m}$ comme l'estimation d'un coefficient de régression d'un modèle linéaire.

Exercice 2

Montrer que l'estimateur $\hat{\beta}$ vu en cours est aussi l'estimateur par maximum de vraisemblance de β^*.

Exercice 3

Soient $x_1, ..., x_n$ des réels et $y_1, ..., y_n$ des réels. On suppose que $x_1, ..., x_n$ ne sont pas tous égaux. Soient $\hat{a}, \hat{b}$ qui minimisent $\sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2$. Montrer que, avec $\bar{x} = (1/n) \sum_{i=1}^n x_i$ et $\bar{y} = (1/n) \sum_{i=1}^n y_i$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

et

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

On pourra utiliser

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

TD3

Exercice 1

On considère le modèle linéaire

$$Y = X\beta^* + \epsilon$$

où X est de taille $n \times p$ et est égale à

$$\begin{pmatrix} I_p \\ 0_{n-p,p} \end{pmatrix},$$

avec $0_{n-p,p}$ la matrice nulle de taille $(n-p) \times p$. Montrer que les composantes de $\hat{\beta}$, l'estimateur par moindres carrés vu en cours, sont indépendantes.

Exercice 2

On observe n variables aléatoires *iid* $Y_1, ..., Y_n$ de lois $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, avec μ et σ^2 inconnus.

1) Construire un intervalle de confiance pour μ, de niveau 95%. On pourra écrire $Y = (Y_1, ..., Y_n)^t$ comme le vecteur observé d'un modèle linéaire et utiliser l'intervalle de confiance vu en cours.

2) Quelles sont les valeurs des bornes de cet intervalle de confiance lorsque $n = 9$ et $y = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2)^t$? On pourra s'aider de la table de probabilité de la loi de Student.

Exercice 3

Cet exercice à pour but d'étudier l'effet de la surparamétrisation sur la qualité des estimateurs dans le modèle linéaire. On dispose de deux variables explicatives $X_1 = (x_{1,1}, ..., x_{1,n})^t$ et $X_2 = (x_{2,1}, ..., x_{2,n})^t$ et on suppose que la réponse Y dépend uniquement de X_1, c'est à dire que le "vrai" modèle linéaire s'écrit

$$Y = X_1\beta_1^* + \epsilon, \tag{1}$$

tel que vu en cours. En revanche, on ignore que la variable X_2 n'est pas influente, et on ajuste le modèle linéaire surparamétré

$$Y = X_1\beta_1^* + X_2\beta_2^* + \epsilon, \tag{2}$$

où l'information $\beta_2^* = 0$ n'est pas accessible. On suppose, pour simplifier les calculs que, pour $i = 1, 2$, $\sum_{j=1}^n x_{i,j} = 0$ et $\sum_{j=1}^n x_{i,j}^2 = 1$. On pose $\rho = \sum_{j=1}^n x_{1,j}x_{2,j}$.

1) Montrer que $|\rho| \leq 1$. On suppose pour la suite que $|\rho| < 1$.

2) On note $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_2$ les estimateurs par moindres carrés de β_1^* et β_2^* dans (2). Calculer ces estimateurs et donner leurs moyennes et variances.

On pourra utiliser

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

3) On note $\tilde{\beta}_1$ l'estimateur par moindres carrés de β_1^* dans (1). Calculer cet estimateur et donner sa moyenne et sa variance.

4) Comparer $\mathbb{E}\left([\hat{\beta}_1 - \beta_1^*]^2\right)$ et $\mathbb{E}\left([\tilde{\beta}_1 - \beta_1^*]^2\right)$ et interpréter cette comparaison.

TD4

Exercice 1

On considère le modèle linéaire avec n observations et p variables explicatives. Pour les hypothèses suivantes, les mettre sous l'une des formes standards vues en cours, donner le type de loi de test, et les valeurs des paramètres.

---

1) L'hypothèse est $\beta_2^* = \beta_3^* = \beta_4^* = 0$ (avec $p > 4$)
2) L'hypothèse est $\beta_2^* = \beta_3^* = \beta_4^*$ (avec $p > 4$)
3) L'hypothèse est $\beta_{2i-1}^* = 2 * \beta_{2i}^*$ pour $i = 1, ..., p/2$ (avec p pair et $i = 1, ..., p/2$).
4) On a $n = 4, p = 3$,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'hypothèse est $Y = X^{(0)}\beta^{(0)} + \epsilon$ avec

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Par exemple, pour le question 1), la forme standard est de tester $M^t\beta^* = 0$, avec 0_k le vecteur de taille $1 \times k$ dont toutes les composantes sont nulles,

$$M^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0_{p-4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0_{p-4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0_{p-4} \end{pmatrix}.$$

Ensuite, la statistique de test suit une loi de Fisher de paramètres 3 et $n - p$.

Exercice 2

On considère le modèle linéaire avec $p = 4$ et où tous les coefficients de la première colonne de X valent 1 (on a inclus un terme *intercept*). Un calcul préliminaire à donné

$$X^tX = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 15 & 4 \\ 0 & 15 & 30 & 10 \\ 0 & 4 & 10 & 40 \end{pmatrix}, \quad X^tY = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 40 \\ 80 \end{pmatrix}, \quad Y^tY = 640.$$

On admettra que

$$\begin{pmatrix} 20 & 15 & 4 \\ 15 & 30 & 10 \\ 4 & 10 & 40 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{13720}\begin{pmatrix} 1100 & -560 & 30 \\ -560 & 784 & -140 \\ 30 & -140 & 375 \end{pmatrix}.$$

1) Que vaut n?
2) Calculer $\hat{\beta}$ et $\hat{\sigma}$. (On pourra utiliser $||Y - X\hat{\beta}||^2 = ||Y||^2 - ||X\hat{\beta}||^2$)
3) Donner un intervalle de confiance à 95% pour β_2^*.
4) Tester, avec un niveau de test de 95%, l'hypothèse $\beta_2^* = \beta_3^* = \beta_4^* = 0$. On pourra utiliser que le quantile 95% de la loi de Fisher de paramètres 3 et 46 vaut environ 2.80.

TD5

Exercice 1

Pour les modèles statistiques suivants, dire s'ils sont ou non paramétriques. On note μ_f la loi de probabilité ayant pour densité f.

1. $\mathcal{P} = \{\mu_f\,; f(0) = 1\}$.
2. $\mathcal{P} = \{\mathcal{E}(\theta)\,; \theta > 0\}$ avec $\mathcal{E}(\theta)$ la loi sur $\mathbb{R}$ de densité de probability $\mathbf{1}_{t\geq 0}\theta e^{-\theta t}$.
3. $\mathcal{P} = \{\mu_f\,; \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)\}$
4. $\mathcal{P} = \{\mu_f\,; \exists\theta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(\theta - x) = f(\theta + x)\}$
5. $\mathcal{P} = \{\mu = \alpha\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2) + \beta\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2); \alpha \geq 0, \beta \geq 0, m_i \in \mathbb{R}, \sigma_i^2 > 0\}$

Exercice 2

Soit $X_1, ...X_n$, n réalisations i.i.d. d'une variable aléatoire X telle que $\mathbb{E}(X) = m$ et $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$. Soit $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ la moyenne empirique et $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2$ la variance empirique. Ces deux quantités sont-elles des estimateurs sans biais de m et σ^2 respectivement ? Si non, calculer leur biais.

Exercice 3

On jette une pièce. Elle fait pile avec probabilité θ et face avec probabilité $1 - \theta$. Soit X la variable aléatoire qui vaut 1 si la pièce fait pile, 0 sinon.

1. Quelle est la loi de X ? Quel est le modèle statistique associé ?
2. Soient $\delta(X) = X$ et $\delta'(X) = 1 - X$ deux estimateurs de θ. Sont-ils indépendants (sous $\mathbb{P}_\theta$, en fonction de $\theta \in \Theta$)?
3. Calculer le biais et l'erreur quadratique moyenne de δ et δ'.

Exercice 4

On observe n voitures identiques se déplaçant sur un circuit. La voiture i dispose au départ d'une quantité d'essence inconnue Q_i. On suppose que $Q_1, ..., Q_n$ sont iid et uniforméments distribués sur $[0, Q_{max}]$ avec $0 < Q_{max}$ inconnu. On note X_i la distance parcourue par la voiture i jusqu'à la panne d'essence. On suppose que $X_i = \alpha Q_i$ avec $\alpha > 0$ fixé et connu.
Soit θ la distance maximale que peut parcourir une voiture.

1. Donner le modèle statistique correspondant à l'observation du n échantillon $X = (X_1, ...X_n)$. Ce modèle est-il paramétrique ?
2. Donner la vraisemblance du modèle (Rq : les observations sont des distances donc X est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$).
3. On propose comme estimateur de θ la statistique $\hat{g}(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Calculer son biais et son erreur quadratique moyenne.
4. Proposer un autre estimateur de θ (indication : chercher l'estimateur du maximum de vraisemblance). Est-il sans biais ?

TD6

Exercice 1

Pour chacune des variables aléatoires suivantes, déterminer la vraisemblance, le score (vérifier que son espérance sous $\mathbb{P}_\theta$ est nulle) et la matrice d'information de Fisher associés à l'observation de X :

1. $X \in \mathbb{R}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$, σ^2 connu.
2. $X \in \mathbb{R}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\theta_1, g(\theta_2))$, avec g de classe $\mathcal{C}^2$.
3. $X \in \mathbb{N}^*$ suit une loi géométrique de paramètre $\theta \in]0,1[$. On rapelle que X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ si $P(X=k) = (1-p)p^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Soient $X_1, ...X_n$, n réalisations i.i.d. d'une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$ et $Y_i = \mathbb{1}_{X_i=0}$. On rapelle que X suit la loi de Poisson de paramètre $p > 0$ si $P(X = k) = e^{-p}[(p^k)/(k!)]$ pour $k \in \mathbb{N}$.

1. Donner le modèle statistique pour l'échantillon $(X_1, ...X_n)$.
2. Donner la vraisemblance associée à l'observation de $(X_1, ...X_n)$.
3. Donner la borne de Cramer Rao pour un estimateur de θ à partir de $(X_1, ..., X_n)$. Comparer à la variance de $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum X_i$.
4. Quelle est la loi de Y_1. Donner la borne de Cramer Rao pour un estimateur de $g(\theta) = e^{-\theta}$, à partir de $(Y_1, ..., Y_n)$. Comparer à la variance de $\hat{g}(\theta) = \frac{1}{n}\sum Y_i$.

TD7

Exercice 1

Dans le cas $X \in \mathbb{R}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\theta_1, g(\theta_2))$, avec g de classe $\mathcal{C}^2$, donner la borne de Cramer Rao pour un estimateur sans biais de $(\theta_1, g(\theta_2))^\top$.

Exercice 2

On modélise la durée du connexion sur un site web par une variable aléatoire X de loi Gamma de paramètres 2 et θ, de densité

$$f_\theta(x) = \frac{x}{\theta^2} \exp(-x/\theta) \mathbb{1}_{x \geq 0}.$$

On a $\mathbb{E}(X) = 2\theta$ et $\mathrm{Var}(X) = 2\theta^2$. On dispose de n observations de durées de connexion, $X_1, ..., X_n$ et l'on cherche à estimer θ.

1. Donner la vraisemblance associée à l'observation de $(X_1, ...X_n)$. On admet que l'estimateur du maximum de vraisemblance pour θ est $\hat{\theta} = \frac{\sum X_i}{2n}$.
2. Après avoir vérifié que cet estimateur est sans biais, comparer sa variance avec la borne de Cramer Rao.
3. facultatif : faire le calcul de l'estimateur du maximum de vraisemblance.

TD8

Exercice 1

On considère n variables aléatoires $Y_1, ..., Y_n$, presque surement deux à deux distinctes, correspondant aux scores d'étudiants à une évaluation d'anglais. Parmi ces étudiants, on en avait sélectionné aléatoirement n_1 pour effectuer un semestre d'étude dans un pays anglophone. On classe les scores des étudiants et on leur attribue un rang $R_1, ...R_n$ ($R = 1$ correspond à la meilleure note). On notera $T_1, T_2, ...T_{n_1}$ les rangs des n_1 étudiants ayant suivi un semestre à l'étranger et $S_T = \sum_{i=1}^{n_1} T_i$.

1. Donner l'hypothèse nulle H_0 que l'on peut tester ici.
2. Si H_0 est vraie, quelle est la loi de T_1 ?
3. Quel est l'espérance de S_T, toujours sous H_0.
4. On notera $M_1, M_2, ...M_{n_2}$ les rangs des n_2 étudiants n'ayant pas suivi un semestre à l'étranger et $S_M = \sum_{i=1}^{n_2} M_i$. Quel est l'espérance de S_M, toujours sous H_0.

À partir de maintenant, on considère $n = 7$ et $n_1 = 3$.

5. Quelles valeurs peut prendre S_T ? Comment peut-on interpréter une grande valeur de S_T, une petite ?
6. Donner les $\mathbb{P}(S_T = k)$ pour toutes les valeurs possibles de k.
7. Que vaut l'espérance de S_T ? Que peut-on apercevoir sur la distribution de S_T, autour de son espérance ?

TD9

Exercice 1

Pour l'exercice 5 du TD 8, donnez une méthode permettant d'approximer la p-value associée à l'observation $S_T = 77$.

On renouvelle l'étude avec plus de rats : $n = 30$ et $n_1 = 15$, on obtient $S_T = 186$. Quelles sont vont conclusions, au risque $\alpha = 0.025$ de vous tromper ? Et pour $\alpha = 0.05$?

Exercice 2

Pour les séries temporelles suivantes, donner leur fonction moyenne et leur fonction de covariance. Ont-elles une tendance linéaire, périodique ?

1. $X_t = \cos(\pi t) + A_t$ avec $A_t \sim \mathcal{N}(0, t^2)$ indépendants.
2. $X_t = A_t \cos(\pi t) + A_{t-1} \sin(\pi t)$ avec $A_t \sim \mathcal{N}(0, t^2)$ indépendants.
3. $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$, X_0 fixé et $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ i.i.d.
4. $X_0 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $\forall t \in \mathbb{N}$, $X_{t+1} = aX_t + \varepsilon_t$ avec $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1 - a^2)$ i.i.d. et indépendants de X_0, $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

1. La somme de deux processus faiblement stationnaires est-elle un processus faiblement stationnaire ?
2. Le processus $X_t = A_t + A_{t-1}$ avec $A_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ indépendants, est-il stationnaire ? Que se passe-t-il si $A_t \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{|t|})$ indépendants ?
3. Même question pour les processus des questions 3 et 4 de l'exercice 2.

TD10

Exercice 1

A propos des séries temporelles de la figure 1, que peut-on dire sur leur aspect stationnaire / tendance / facteurs saisonniers par une simple analyse visuelle ?

Exercice 2

Soit X_0 une variable aléatoire de carré intégrable. Soit $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ indépendants deux à deux et indépendants de X_0 pour tout $t \geq 1$. On définit le processus (X_t) par la relation suivante :

$$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t$$

avec $|a| < 1$.

1. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que (X_t) soit stationnaire au sens faible est que :

$$\mathbb{E}(X_0) = \frac{m}{1-a}$$

et que :

$$Var(X_0) = \frac{\sigma^2}{1-a^2}$$

Exercice 3

Soient, $(Z_t)_t$ une tendance, $(S_t)_t$ une composante saisonnière de période p et $(\varepsilon_t)_t$ une suite de variables aléatoires iid de carré intégrable (variance σ^2). Pour chacune des modèles suivants, calculer l'espérance, la variance et la fonction de covariance de X_t.

1. Modèle additif : $\forall t \in \mathbb{Z}, X_t = Z_t + S_t + \varepsilon_t$,
2. Modèle multiplicatif : $\forall t \in \mathbb{Z}, X_t = Z_t S_t + \varepsilon_t$,
3. Modèle multiplicatif complet : $\forall t \in \mathbb{Z}, X_t = Z_t S_t \varepsilon_t$.

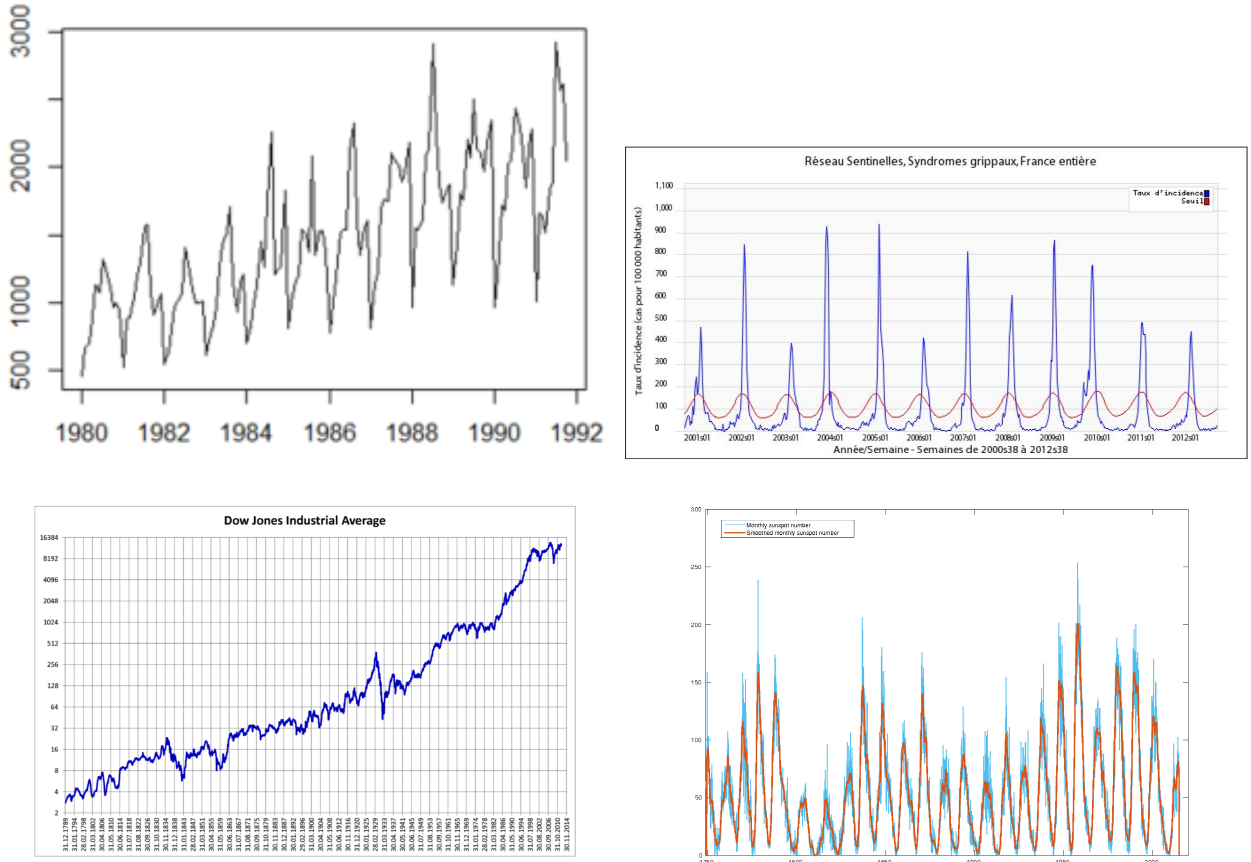

Figure 1: 1) Vente de vins australiens entre janvier 1980 et octobre 1991 (bouteilles/mois)
2) Syndromes grippaux de 2000 à 2012 (cas/100000 habitants)
3) Évolution du Dow Jones
4) Nombre mensuel de taches solaires

TD11

Exercice 1

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ une série temporelle centrée telle que :

$$X_t - \varphi X_{t-1} = \varepsilon_t \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc gaussien de variance $\sigma^2 > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que $\varphi = 1$
   (a) Pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et $h \in \mathbb{N}^*$, écrire $X_{t+h} - X_t$ en fonction de $\varepsilon_t, ..., \varepsilon_{t-h+1}$.
   (b) En déduire la valeur de $\mathbb{E}((X_{t+h} - X_t)^2)$.
   (c) Montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ne peut pas être un processus stationnaire.
2. On suppose que $\varphi = -1$, montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ ne peut pas être un processus stationnaire.
3. On suppose que $|\varphi| < 1$ et que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire.
   (a) Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, écrire X_t en fonction de $(\varepsilon_s)_{s\in\mathbb{Z}}$.
   (b) On définit la régression affine de X_t sur $(X_s; s < t)$ par X_t^* tel que :

   $$X_t = X_t^* + R_t = \lambda_0 + \sum_{s<t} \lambda_i X_i + R_t$$

   avec R_t non corrélé avec les $(X_s; s < t)$.
   L'innovation au temps t est alors $X_t - X_t^*$.
   Déduire de la question (3a) que ε_t est l'innovation au temps t.
   (c) Soit $h \in \mathbb{N}^*$, établir une relation de récurrence entre $\gamma(h)$ et $\gamma(h-1)$, avec $\gamma(h) = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h})$.
   (d) Calculer $\gamma(0)$ et en déduire l'expression de $\gamma(h)$ pour tout h.
   (e) Calculer la fonction d'autocorrélation de la série temporelle.
   (f) Montrer que, pour $h = 1, 2$, $\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{T-h}\sum_{t=1}^{T-h} X_t X_{t+h}$ est un estimateur sans biais de $\gamma(h)$. En déduire un estimateur de φ.
4. On suppose que $|\varphi| > 1$ et que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire.
   (a) Soit $(\nu_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ le processus définit par :

   $$X_t - \frac{1}{\varphi} X_{t-1} = \nu_t,$$

   écrire ν_t en fonction de $(\varepsilon_s)_{s\in\mathbb{Z}}$.
   (b) Montrer que $(\nu_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc gaussien.