

GROUPES DE DIFFÉOTOPIES DE SURFACES
MASTER 2 – UNIVERSITÉ PAUL SABATIER – TOULOUSE III
SOLUTION D'EXERCICE

FLORIAN DELOUP

Exercice. Soit Σ une surface différentiable compacte connexe orientée telle que $\partial\Sigma \neq \emptyset$. Soit $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ un difféomorphisme.

1. Si $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ préserve l'orientation, alors $f|_{\partial\Sigma} : \partial\Sigma \rightarrow \partial\Sigma$ préserve l'orientation.
2. Si $f|_{\partial\Sigma} : \partial\Sigma \rightarrow \partial\Sigma$ préserve l'orientation, alors $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ préserve l'orientation.

Solution. 1. Remarquons tout d'abord que le théorème d'inversion locale assure que $f|_{\partial\Sigma}$ est un difféomorphisme de $\partial\Sigma$ sur $\partial\Sigma$.

Soit $f \in \text{Diffeo}^+(\Sigma)$. Pour $p \in \Sigma$, il existe des cartes (U, ψ_U) et (V, ψ_V) autour de p et de $f(p)$ respectivement telles que $f(U) \subset V$ et $\det(D^1(\psi_V \circ f \circ \psi_U^{-1})|_x) > 0$ pour tout $x \in \psi_U(U)$. Pour $x \in \partial\Sigma$, les ouverts U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq 0\}$. Rappelons que $\partial\mathbb{R}_+^2 = \mathbb{R}$. L'application

$$x_1 \mapsto (x_1, 0)$$

définit un plongement de $\partial\mathbb{R}_+^2$ dans \mathbb{R}_+^2 .

Notons $T(x) = D^1(\psi_V \circ f \circ \psi_U^{-1})(x)$ pour $x = \psi_U(p)$. Ceci définit un difféomorphisme $T : \psi_U(U) \rightarrow \psi_V(V)$ entre ouverts de \mathbb{R}^2 . Notons

$$T(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1(x_1, x_2) \\ T_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

Examinons le jacobien $J(x) = \det T(x)$ quand $x = \psi_U(p)$ pour $p \in \partial\Sigma$. Dans ce cas,

$$x = (x_1, 0) \in \psi_U(U) \subset \mathbb{R}_+^2.$$

Comme $f(p) \in \partial\Sigma$, $T \circ \psi_U(p) \in \partial\mathbb{R}_+^2$ et donc l'application de transition T vérifie

$$T(x) = T(x_1, 0) = \begin{pmatrix} T_1(x_1, 0) \\ T_2(x_1, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1(x_1, 0) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque $f \in \text{Diffeo}^+(\Sigma)$, le jacobien $J(x)$ doit être positif en tout $x \in \psi_U(U)$ et en particulier pour $x = \psi_U(p)$ ($p \in \partial\Sigma$), soit

$$J(x) = \det(T(x_1, 0)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(x_1, 0) & \frac{\partial T_1}{\partial x_2}(x_1, 0) \\ \frac{\partial T_2}{\partial x_1}(x_1, 0) & \frac{\partial T_2}{\partial x_2}(x_1, 0) \end{vmatrix} > 0.$$

Comme $T_2(x_1, 0) = 0$ pour tout x_1 , $\frac{\partial T_2}{\partial x_1}(x_1, 0) = 0$. Donc

$$(1) \quad J(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(x_1, 0) \cdot \frac{\partial T_2}{\partial x_2}(x_1, 0) > 0.$$

En particulier $\frac{\partial T_2}{\partial x_2}(x_1, 0) \neq 0$. Vu que l'application différentiable $x_2 \mapsto T_2(x_1, x_2)$ est positive pour $x_2 \geq 0$ (x_1 fixé) et que $T_2(x_1, 0) = 0$, nous avons

$$\underbrace{T_2(x_1, x_2)}_{>0} \underset{x_2 \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\partial T_2}{\partial x_2}(x_1, 0) \cdot \underbrace{x_2}_{>0},$$

donc $\frac{\partial T_2}{\partial x_2}(x_1, 0) > 0$. Revenant à (??), nous déduisons alors que

$$\det(D^1(\psi_V \circ f|_{\partial\Sigma} \circ \psi_U^{-1})(x)) = \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(x_1, 0) > 0.$$

Le raisonnement vaut pour tout $p \in \partial\Sigma$. On conclut que $f|_{\partial\Sigma} \in \text{Diffeo}^+(\partial\Sigma)$. ■

2. On propose deux méthodes. **Méthode élémentaire:**

La surface Σ est par définition munie d'un atlas. Soit $O(f)$ l'ensemble des points $p \in \Sigma$ en lesquels f préserve l'orientation. C'est par définition l'ensemble des points $p \in \Sigma$ tels que $\det(D^1(\psi_V \circ f \circ \psi_U^{-1})(\psi_U(p))) > 0$ pour toutes cartes (U, ψ_U) et (V, ψ_V) de l'atlas de Σ autour de p et de $f(p)$ telles que $f(U) \subset V$. On va montrer que $O(f)$ est non vide et ouvert et fermé dans Σ .

- $O(f)$ est non vide:

Conservons les mêmes notations que précédemment. Vu que $f|_{\partial\Sigma}$ préserve l'orientation,

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_1}(x_1, 0) > 0.$$

Comme $T_2(x_1, x_2) > 0$ pour $x_2 > 0$ et $T_2(x_1, 0) = 0$,

$$\frac{\partial T_2}{\partial x_2}(x_1, 0) > 0.$$

Comme $T_2(x_1, 0) = 0$ pour tout x_1 ,

$$\frac{\partial T_2}{\partial x_1}(x_1, 0) = 0.$$

Il en résulte que

$$J(x) = \det(T(x_1, 0)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(x_1, 0) & \frac{\partial T_1}{\partial x_2}(x_1, 0) \\ 0 & \frac{\partial T_2}{\partial x_2}(x_2, 0) \end{vmatrix} = \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(x_1, 0) \cdot \frac{\partial T_2}{\partial x_2}(x_2, 0) > 0.$$

Donc f préserve l'orientation en $p = \psi_U^{-1}(x) \in \partial\Sigma$. On conclut que $O(f)$ contient $\partial\Sigma$.

- $O(f)$ contient un voisinage de $\partial\Sigma$:

Comme les applications $x_2 \mapsto \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(x_1, x_2)$, $x_2 \mapsto \frac{\partial T_2}{\partial x_2}(x_1, x_2)$ et $x_2 \mapsto \frac{\partial T_2}{\partial x_1}(x_1, x_2)$ sont continues, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour $0 < x_2 < \eta$,

- $\frac{\partial T_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) > 0$

- $\frac{\partial T_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) > 0$
- $\left| \frac{\partial T_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) \right| < \varepsilon.$

On en déduit pour $x_2 < \varepsilon$ assez petit,

$$\begin{aligned} J(x) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial T_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial T_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial T_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) \cdot \frac{\partial T_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) - \frac{\partial T_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) \cdot \frac{\partial T_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) \\ &> \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) \cdot \frac{\partial T_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) - \varepsilon \cdot \left| \frac{\partial T_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right| > 0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $p = \psi_U^{-1}(x) \in O(f)$. On en conclut que $O(f)$ contient un voisinage de $\partial\Sigma$ dans Σ .

- $O(f)$ est ouvert dans Σ :

Soit $p \in O(f) \setminus \partial\Sigma$. (Un tel point existe d'après l'étape précédente.) Soit (U, ψ_U) et (V, ψ_V) des cartes quelconques adaptées à p et $f(p)$, i.e.: U et V sont des ouverts de Σ contenant p et $f(p)$ respectivement et $f(U) \subset V$. On note encore $T(x) = D^1(\psi_V \circ f \circ \psi_U^{-1})(x)$ pour $x = \psi_U(p)$. Par hypothèse sur p , $\det T(x) > 0$. L'application $x \mapsto \det T(x)$ est définie et continue en x dans le voisinage $\psi_U(U) \subset \mathbb{R}^2$. Donc il existe un voisinage $\Omega \subset \psi_U(U)$ de $x = \psi_U(p)$ tel que pour tout $x' \in \Omega$, $\det T(x') > 0$. Ceci revient à dire que pour tout $p' \in \psi_U^{-1}(\Omega)$ (qui est un voisinage de p contenu dans U), $p' \in O(f)$.

- $O(f)$ est fermé dans Σ :

Montrons que le complémentaire $\Sigma \setminus O(f)$ est ouvert. Soit $p \in \Sigma \setminus O(f)$. Il existe donc un couple de cartes (U, ψ_U) et (V, ψ_V) autour de p et de $f(p)$ respectivement telles que $f(U) \subset V$ et $\det T(x) < 0$ pour $x = \psi_U(p)$. Par le même argument de continuité de $x \mapsto \det(T(x))$ que précédemment, on montre que $\det T(x') < 0$ pour tout x' dans un voisinage de x . Donc $p' \in \Sigma \setminus O(f)$ pour tout p' dans un voisinage de p . On a donc montré que $O(f)$ est fermé.

- *Conclusion*: $O(f)$ est non vide, ouvert et fermé dans Σ qui est connexe, donc $O(f) = \Sigma$. Donc $f \in \text{Diffeo}^+(\Sigma)$. ■

Méthode avec l'homologie: pour montrer que $f \in \text{Diffeo}^+(\Sigma)$, il suffit de montrer que l'isomorphisme $f_* : H_2(\Sigma, \partial\Sigma) \rightarrow H_2(\Sigma, \partial\Sigma)$ induit en homologie est l'identité.

Plus généralement tout difféomorphisme $f \in \text{Diffeo}(\Sigma)$ induit en homologie le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes et les flèches verticales sont des isomorphismes:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & H_2(\Sigma) & \xrightarrow{p_*} & H_2(\Sigma, \partial\Sigma) & \xrightarrow{\partial} & H_1(\partial\Sigma) & \xrightarrow{i_*} & H_1(\Sigma) & \longrightarrow & \dots \\
& & \simeq \downarrow f_* & & \simeq \downarrow \bar{f}_* & & \simeq \downarrow (f|_{\partial\Sigma})_* & & \downarrow f_* & & \\
0 & \longrightarrow & H_2(\Sigma) & \xrightarrow{p_*} & H_2(\Sigma, \partial\Sigma) & \xrightarrow{\partial} & H_1(\partial\Sigma) & \xrightarrow{i_*} & H_1(\Sigma) & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

Comme Σ est orienté de dimension 2 et a un bord non trivial, $H_2(\Sigma, \partial\Sigma) = \mathbb{Z}$ et $H_2(\Sigma) = 0$. Donc \bar{f}_* est $\pm \text{Id}_{\mathbb{Z}} = \pm 1$ et l'homomorphisme de bord $\partial : H_2(\Sigma, \partial\Sigma) \rightarrow H_1(\partial\Sigma)$ est injectif. L'homomorphisme de bord ∂ admet la description suivante: soit $\partial\Sigma = \cup_i C_i$ le bord de Σ écrit sous forme de réunion disjointe de composantes connexes. Alors $\partial[\Sigma, \partial\Sigma] = [\partial\Sigma] = \sum_i [C_i]$ où $[\Sigma, \partial\Sigma]$ désigne la classe d'orientation homologique (qui est le générateur choisi de $H_2(\Sigma, \partial\Sigma) = \mathbb{Z}$), $[\partial\Sigma] \in H_1(\partial\Sigma)$ la classe d'homologie représentée par le bord orienté $\partial\Sigma$ et $[C_i]$ les classes de 1-homologie représentées par les composantes (orientées) du bord.

Par hypothèse, $f|_{\partial\Sigma}$ préserve l'orientation. Donc $f|_{\partial\Sigma}$ permute les composantes orientées C_i sans changer leurs orientations respectives. La commutativité du carré central du diagramme dit que $\pm \partial = (f|_{\partial\Sigma})_* \circ \partial$. Nous devons montrer que le signe est $+1$. Appliquons cette égalité à la classe d'homologie d'orientation $[\Sigma, \partial\Sigma] \in H_2(\Sigma, \partial\Sigma)$:

$$\pm \sum_i [C_i] = (f|_{\partial\Sigma})_* \left(\sum_i [C_i] \right) = \sum_i (f|_{\partial\Sigma})_* [C_i] = \sum_i [C_i].$$

(En effet, la permutation qu'opère $(f|_{\partial\Sigma})_*$ sur les $[C_i]$ laisse invariante leur somme.)
Donc le signe est $+1$, comme annoncé. \blacksquare

Remarques.

- (1) Les deux méthodes fonctionnent aussi en dimension quelconque: on peut remplacer Σ par une variété différentiable de dimension finie quelconque. (Avec la première méthode, on a à considérer la sous-matrice de taille $n-1$ de la matrice jacobienne de taille n .)
- (2) La première méthode (élémentaire) fonctionne aussi même si la variété n'est pas compacte ce qui n'est pas le cas de la méthode homologique ci-dessus. En effet, si Σ n'est pas connexe, $\partial\Sigma$ peut avoir un nombre infini de composantes connexes (on peut modifier la théorie homologique pour cela mais c'est une autre histoire).