Groupes des Difféotopies de Surfaces
Solutions d'exercices (3)

Exercice 1. Calcul de $\mathfrak{M}(S^1)$. Montrer que tout difféomorphisme du cercle S^1 préservant l'orientation est isotope à l'identité.

Solution. Dans la catégorie topologique, le résultat est une conséquence du truc d'Alexander : en recollant S^n le long de l'équateur, on montre, comme dans le cours, $\mathfrak{M}(S^n) = 1$. (Le résultat est vrai en toute dimension n.)

Dans la catégorie différentiable, soit $f : S^1 \to S^1$ un difféomorphisme préservant l'orientation. Relevons le en un difféomorphisme de $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (envoyant $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}$). C'est une application différentiable dont la dérivée est strictement positive. Définissons alors

$$\tilde{f}_t(x) = (1-t)\tilde{f}(x) + tx,\ \ t \in [0,1],\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Cette application est une isotopie différentiable entre $\tilde{f}_0 = \tilde{f}$ et $\tilde{f}_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ car $(t,x) \mapsto \tilde{f}_t(x)$ est différentiable et $\tilde{f}_t'(x) = (1-t)\tilde{f}'(x) + t > 0$. C'est le résultat voulu. ■

Exercice 2. Calcul de $\mathfrak{M}(S^1 \times I)$. On identifie S^1 à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. On note A l'anneau $S^1 \times I$, $\partial A = \partial_- A \cup \partial_+ A$ avec $\partial_- A = S^1 \times 0$ et $\partial_+ A = S^1 \times 1$. Soit α le chemin orienté défini par $\alpha(t) = (0, 1-t)$, $t \in I = [0,1]$. On considère l'application

$$\rho : \mathrm{Diff}^+(A, \partial A) \to \pi_1(A, a(0))$$

définie par

$$\rho(f) = [\alpha \star f(\alpha)^{-1}]$$

(classe du lacet défini par le chemin α suivi du chemin $f(\alpha)^{-1}$).

1. Montrer que cette application induit une application (encore notée ρ)

$$\mathfrak{M}(A) \to \pi_1(A, a(0))$$

qui est un morphisme de groupes.

Solution. Manifestement l'application passe au quotient puisque si deux difféomorphismes sont isotopes, leurs images respectives de α seront isotopes donc homotopes (leurs extrêmités étant fixées car les difféomorphismes sont l'identité sur les composantes de bord).

La difficulté est de montrer qu'il s'agit d'un morphisme de groupes.

Rappel : soit un diagramme de la forme

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

où $p : E \to B$ est un revêtement (continu, différentiable) et $f : B \to B$ une application (continue, différentiable). Soit $b \in B$ et $\tilde{b} \in p^{-1}(b)$. Il existe une unique application (continue, différentiable) $\tilde{f} : E \to E$ telle que $\tilde{f}(\tilde{b}) = \tilde{b}$ et rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"] & E \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

si et seulement si $f_\sharp\big(p_\sharp(\pi_1(E, \tilde{b}))\big) \subseteq p_\sharp(\pi(E, \tilde{b}))$. C'est une conséquence du théorème de relèvement d'une appplication : il existe $\tilde{g} : Q \to E$ tel que $g(a) = \tilde{b}$ et rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d] \\ (A, a) \arrow[ur, dotted, "\tilde{g}"] \arrow[r, "g"] & (B, b) \end{tikzcd}$$

si et seulement si $g_\sharp(\pi(A, a)) \subset p_\sharp(\pi_1(E, \tilde{b}))$. (Il suffit de prendre $f = g \circ p$.)

En particulier, si E est le revêtement universel, $\pi(E, \tilde{b}) = 1$, le relèvement existe toujours. En utilisant l'unicité du relèvement, on voit que si f est un homéomorphisme (resp. un difféomorphisme) alors il en est de même de $\tilde{f}$.

En particulier, soit $f \in \mathrm{Diffeo}^+(A, \partial A)$. Il existe un unique relevé $\tilde{f} \in \mathrm{Diffeo}^+(\mathbb{R} \times I)$ tel que $\tilde{f}(0, 0) = (0, 0)$. De plus comme f est l'identité sur $\partial A = \partial_- A \cup \partial_+ A$, $\tilde{f}|_{\mathbb{R}\times 0}$ et $\tilde{f}|_{\mathbb{R}\times 1}$ sont des relevés de l'identité sur $\partial_- A \simeq S^1$ et $\partial_+ A \simeq S^1$ respectivement. Ce sont donc des éléments du groupe de transformations du revêtement universel de S^1

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathbb{R} \arrow[dl] \\ & S^1 & \end{tikzcd}$$

donc des translations entières. Donc $\tilde{f}|_{\mathbb{R}\times 0} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}\times 0}$ (car $\tilde{f}$ fixe l'origine) et $\tilde{f}|_{\mathbb{R}\times 1}(0, 1) \in \mathbb{Z}$.

Affirmation : $\rho(f) = \tilde{f}|_{\mathbb{R}\times 1}(0, 1) - (0, 1)$.

Rappelons que $\pi_1(A, \alpha(0))$ agit librement et transitivement sur la fibre au-dessus de $\alpha(0)$. Un lacet c basé en $\alpha(0) = (0, 1)$ se relève en un unique chemin $\tilde{c}$ tel que $\tilde{c}(0) = (0, 1) \in \mathbb{R} \times 1$. Comme $\tilde{c}(1)$ est au-dessus de $\alpha(0)$, il est encore dans la fibre, donc il diffère de $\tilde{c}(0)$ d'un élément de $\pi_1(A, \alpha(0))$. Par simple transitivité, cet élément n'est autre que $[c] \in \pi_1(A, \alpha(0))$:

$$[c] = \widetilde{c}(1) - \widetilde{c}(0).$$

En particulier, pour le lacet $c = \alpha \star f(\alpha)^{-1}$ et $(0,1) \in \mathbb{R} \times 1$ au-dessus de $(0,1) = \alpha(0) \in \partial_+ A$, on obtient

$$\rho(f) = [\alpha \star f(\alpha)^{-1}] = \underbrace{\alpha \star f(\alpha)^{-1}(1)}_{\text{point final de } \alpha\star f(\alpha)^{-1}} - \underbrace{\alpha \star f(\alpha)^{-1}(0)}_{\text{point initial de } \alpha\star f(\alpha)^{-1}} = \widetilde{f}(0,1) - (0,1).$$

En utilisant l'unicité du relèvement et la simple transitivité de l'action ci-dessus, nous voyons que

$$\rho(g \circ f) = \widetilde{g \circ f}(0,1) - (0,1) = \widetilde{g}(\widetilde{f}(0,1)) - \widetilde{f}(0,1) + \widetilde{f}(0,1) - (0,1) = \rho(g) + \rho(f).$$

Donc $\rho(g \circ f) = \rho(g) + \rho(f)$, ce qui est le résultat voulu. ■

2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Soit f_n l'application linéaire $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par la matrice $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Montrer que f_n induit un difféomorphisme (préservant l'orientation) de A.

Solution. Manifestement, f_n est un automorphisme positif de $\mathbb{R}^2$. Donc f_n induit un morphisme quotient surjectif $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ dont le noyau est $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. Donc f_n induit un automorphisme (positif) $S^1 \times \mathbb{R} \to S^1 \times \mathbb{R}$. Cet automorphisme se restreint en un difféomorphisme positif $S^1 \times I \to S^1 \times I$ puisque $f_n([x], t) = ([x + nt], t) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times I$ pour tout $[x] = x \bmod 1 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ si et seulement si $t \in I = [0,1]$. ■

3. Montrer que $\rho(f_n) = n$. En déduire que ρ est surjective.

Solution. Pour tout $t \in I$ fixé, $f_n|_{\mathbb{R}\times t}$ est un difféomorphisme $\mathbb{R} \times t \to \mathbb{R} \times t$: une translation par n sur $\mathbb{R}$. On reconnaît là une transformation du revêtement universel de $S^1 \times I$.

Il résulte alors de la question 1 que $\rho(f_n) = n$. ■

4. Soit $f \in \mathrm{Diffeo}^+(A)$ tel que $\rho(f)$ est trivial. Montrer que $f_\sharp : \pi_1(A, a(0)) \to \pi_1(A, a(0))$ est l'identité. En déduire que $[f]$ est trivial dans $\mathfrak{M}(A)$.

Solution. Supposons $\rho(f) = 0$. Soit $\tilde{f}$ le relevé $\widetilde{f}$ de f tel que $\widetilde{f}(0,0) = (0,0)$. D'après la question 1, il vérifie $\tilde{f}(0,1) = (0,1)$ donc $\widetilde{f}|_{\mathbb{R}\times 1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}\times 1}$. Donc $\widetilde{f}|_{\partial(\mathbb{R}\times I)} = \mathrm{Id}_{\partial(\mathbb{R}\times I)}$.

Rappel : soit $p : (E, \widetilde{x}_0) \to (B, b_0)$ le revêtement différentiable universel, $f : B \to B$ un difféomorphisme. Soit $\widetilde{y}_0 \in E$ un point au-dessus de $f(x_0)$. Soit $\widetilde{f}$ l'unique relevé de f tel que $\widetilde{f}(\widetilde{x}_0) = \widetilde{y}_0$). On note

$$\mathrm{Aut}_B(E) = \{\gamma \in \mathrm{Diffeo}(E) \mid p \circ \gamma = \gamma\}$$

le groupe des transformations du revêtement. Pour tout $\gamma \in \mathrm{Aut}_B(E)$,

$$\widetilde{f}(\gamma \cdot y) = f_\sharp(\gamma) \cdot \widetilde{f}(y), \ y \in E.$$

Preuve : $\gamma \cdot y$ et y sont dans la même fibre puisque $\gamma \in \mathrm{Aut}_B(E)$. Donc $\widetilde{f}(\gamma \cdot y)$ et $\widetilde{f}(y)$ sont encore dans la même fibre (puisque $\widetilde{f}$ recouvre f). Ils diffèrent donc par un unique élément de $\tau \in \mathrm{Aut}_B(E)$:

$$\widetilde{f}(\gamma \cdot y) = \tau \cdot \widetilde{f}(y).$$

Comme le revêtement est universel, $\mathrm{Aut}_B(E) = \pi_1(B, b_0)$. L'image de $\gamma \in \pi_1(B, b_0)$ est $f_\sharp(\gamma) \in \pi_1(B, f(b_0))$. Soit c un lacet représentant γ basé en $b = p(y)$: c se relève en un unique chemin $\widetilde{c}$ tel que $\widetilde{c}(0) = y$ et $\widetilde{c}(1) = \gamma \cdot y$. L'image $\widetilde{f}(\widetilde{c})$ de ce chemin joint $\widetilde{f}(\widetilde{c}(0)) = \widetilde{f}(y)$ à $\widetilde{f}(\widetilde{c}_1) = \widetilde{f}(\gamma \cdot y)$. Par unicité du relevé et simple transitivité de l'action de $\pi_1(B, b_0)$ sur la fibre, on en déduit

$$\tau = [\widetilde{f}(\widetilde{c})] = f_\sharp(\gamma).$$

En particulier, ici $E = \mathbb{R} \times I$, $B = S^1 \times I$ et $\pi_1(A, \alpha(0)) \simeq \mathbb{Z}$. Nous avons

$$\widetilde{f}(\gamma \cdot y) = f_\sharp(\gamma) \cdot \widetilde{f}(y).$$

Comme f préserve l'orientation, $f_\sharp : \mathbb{Z} \simeq \pi_1(A, (0,0)) \to \pi_1(A, f(0,0)) = \pi_1(A, (0,0)) \simeq \mathbb{Z}$ doit être $+\mathrm{Id}$. Donc $f_\sharp(\gamma) = \gamma$ et

$$\widetilde{f}(\gamma \cdot y) = \gamma \cdot \widetilde{f}(y).$$

Ainsi $\widetilde{f}$ est equivariante. Soit maintenant l'homotopie

$$\widetilde{f}_t(y) = (1-t)\widetilde{f}(y) + t \cdot x, \;\; t \in I, y \in \mathbb{R} \times I,$$

entre $\widetilde{f}$ et $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}\times I}$. Cette homotopie est équivariante et par conséquent, induit une homotopie au quotient entre f et Id_A. Il en résulte que $[f]$ est trivial dans $\mathfrak{M}(A)$. ■

5. Montrer que $f_n = \tau^n$ où τ est un twist de Dehn relatif à l'âme $S^1 \times 1/2$ de A. En déduire que $\mathfrak{M}(A)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et engendré par $[\tau]$.

Solution. Les deux questions précédentes montrent que $\mathfrak{M}(A)$ est isomorphe à $\pi_1(A, \alpha(0)) \simeq \mathbb{Z}$. Pour voir que f_1 coïncide avec un twist de Dehn, on peut revenir à la définition du twist de Dehn : Avec la définition : $f_1(\theta, t) = (\theta + t, t)$ pour $\theta \in S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et $t \in I$. C'est la définition classique du twist de Dehn τ relatif à l'âme d'un anneau (paramétré ici comme $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times I$), tel qu'il a été défini dans le cours.

Il est clair que $\tau^n = f_n$, ce qui montre que τ engendre $\mathfrak{M}(A)$. ■

Exercice 3. Soit Σ une surface connexe orientée. Rappelons qu'une courbe fermée simple c est non séparante si $\Sigma \setminus c$ est connexe, et non séparante sinon.

1. Montrer que si $[c] = 0$ dans $H_1(\Sigma)$ alors c est séparante. La réciproque est vraie si Σ est sans bord.

Solution. Si $[c] = 0$ alors c borde une 2-chaîne dans Σ : $c = \partial C$. On montre que cette 2-chaîne singulière est représentée par une sous-surface de Σ. Il en résulte que c est séparante.

Autre manière (avec l'intersection algébrique) : supposons c est non séparante. Soit I un petit segment transverse à c. Comme $\Sigma \setminus c$ reste connexe, les extrêmités de I peuvent être jointes par un chemin dans $\Sigma \setminus c$. La réunion de ce chemin et de I forme un lacet c'. L'intersection algébrique de ce lacet c avec c' est ± 1 (une fois qu'on a orienté de manière quelconque c et c'). Ceci implique que $[c] \neq 0$. ■

Réciproque si Σ a au plus une composante de bord : si c est séparante, alors $\Sigma \setminus c$ est une variété qui a deux composantes connexes qui sont des surfaces ayant chacune une composante de bord distinguée venant de c. Par conséquent, c vu dans Σ borde une surface. Il en résulte que c est triviale en homologie. ■

Si Σ a au moins deux composantes connexes de bord, la réciproque est fausse : prendre un anneau $\Sigma = S^1 \times I$ et c une courbe fermée simple parallèle à $S^1 \times 0$. ■

2. Une courbe fermée simple est *triviale* si elle est homotope à un point dans Σ ou si elle est homotope à une composante de bord de Σ. Montrer que si c est triviale, alors c est séparante.

Solution. Supposons c homotope à une composante de bord C. Soit b le nombre de composantes de bord de Σ. La courbe c est donc homotope à l'un des générateurs c_i du groupe fondamental

$$\pi_1(\Sigma) = \langle m_1, l_1, \ldots, m_g, l_g, c_1, \ldots, c_b \mid m_1 l_1 \ldots m_g^{-1} l_g^{-1} c_1 \ldots c_b = 1 \rangle. \qquad (1)$$

Si $b = 0$, on voit que c est homotope à un commutateur, donc est trivial en homologie, donc c est séparante d'après la question 1. Ceci est valable pour tout genre $g \geq 0$.

Si $b \geq 1$, on procède par récurrence sur b. Supposons le résultat vrai pour toute surface $\Sigma_{g,b}$ de genre g avec b composantes de bord. Montrons le pour une surface $\Sigma_{g,b+1}$ et c une courbe fermée simple homotope à une composante de bord de $\Sigma_{g,b+1}$. On décompose, sous forme de somme connexe,

$$\Sigma_{g,b+1} = \Sigma_{g,b} \sharp \Sigma_{0,1}$$

où c est homotope à la composante de bord de $\Sigma_{0,1}$. Clairement, c est séparante dans $\Sigma_{0,1} \simeq D^2$ (puisque c est triviale en homologie). Il reste à remarquer que c reste séparante dans la somme connexe. ■

Supposons c homotope à un point. Dans le cas où il n'y a pas de composante de bord ($b = 0$), alors l'hypothèse implique que $[c] = 0$ en homologie et on conclut avec la question précédente. Dans le cas général, on procède de façon similaire à l'argument ci-dessus. ■

Remarque : en fait, l'argument de la question 1 utilisant l'intersection montre aussi ce résultat (sans référence à la classification des surfaces). Si c est non séparante, alors il existe une courbe fermée simple c' telle que $c \cdot c' = \pm 1$. On en déduit aisément que c n'est ni homotope à un point ni homotope à une composante de bord (car dans les deux cas, on peut homotoper c' de sorte que $c \cdot c' = 0$). Donc c n'est pas triviale. ■

3. Soit c une courbe fermée simple non séparante. On note $\Sigma_c = \Sigma \setminus c$. Soit M une n-variété compacte munie d'une décomposition cellulaire finie $M = \cup_{j,k} c_k^j$ où chaque c_k^j désigne une cellule ouverte de dimension j. Notons C_j l'ensemble des cellules de dimension j. La caractéristique d'Euler est définie par $\chi(M) = \sum_{j=0}^{\dim M} (-1)^j |C_j|$. On peut montrer que $\chi(M)$ est indépendant de la décomposition cellulaire choisie (le faire si M est une surface compacte). Montrer que $\chi(\Sigma_c) = \chi(\Sigma)$.

Solution. L'indépendance de la décomposition cellulaire se vérifie élémentairement à l'aide d'une triangulation et des mouvements associés à un changement de triangulation.

Avec l'homologie et la théorie de Morse, on montre que

$$\chi(M) = \sum_{j=0}^{\dim M} (-1)^j \dim H_j(M) \otimes \mathbb{R}.$$

C'est une autre manière de montrer l'indépendance de la décomposition cellulaire (à condition de savoir que l'homologie est indépendante de la décomposition cellulaire).

Pour une belle histoire sur cette formule (et quelques réflexions profondes sur les mathématiques), le livre de I. Lakatòs est fortement recommandée.

Pour montrer la formule de l'énoncé, il suffit de choisir la décomposition cellulaire la plus économique possible de Σ à partir de $\Sigma \setminus c$: il suffit de rajouter un cercle topologique c à $\Sigma \setminus c$ pour obtenir Σ. Ce cercle se décompose comme une cellule de dimension 1 (un segment) et une cellule de dimension 0 (un point). Par conséquent, la caractéristique d'Euler est inchangée. ■

4. Soient c, c' deux courbes fermées simples sur Σ. Montrer qu'il existe un difféomorphisme $f : \Sigma_c \to \Sigma_{c'}$ si et seulement si il existe un difféomorphisme $f : \Sigma \to \Sigma$ préservant l'orientation tel que $f(c) = c'$. En déduire : pour toute paire c, c' de courbes fermées simples non séparantes sur Σ, il existe un difféomorphisme $f : \Sigma \to \Sigma$ tel que $f(c) = c'$.

Solution. S'il existe $f \in \mathrm{Diffeo}^+(\Sigma)$ tel que $f(c) = c'$. Alors f induit par restriction un difféomorphisme $\Sigma_c \to \Sigma_{c'}$. Réciproquement, soit $f : \Sigma_c \to \Sigma_{c'}$ un difféomorphisme. Il s'agit de recoller c et c' ensemble. On fixe une orientation de Σ_c et $\Sigma_{c'}$. Quitte à composer f par un difféomorphisme de $\Sigma_{c'}$ renversant l'orientation, on peut supposer que f préserve l'orientation. Notons c_-, c_+ les composantes de bord résultant de c dans Σ_c et $c'_- = f(c_-)$, $c'_+ = f(c_+)$ les composantes de bord résultant de c' dans Σ_-. Ces composantes viennent avec l'orientation induite de Σ_c et de $\Sigma_{c'}$ respectivement. Soit maintenant $i_{-+} : c_- \to c_+$ et $i'_{-+} : c'_- \to c'_+$ deux difféomorphismes (renversant l'orientation) de recollement tels que

$$\Sigma = \Sigma_c / x \sim i_{-+}(x),\ x \in c_-, \quad \Sigma = \Sigma_{c'} / x \sim i'_{-+}(x),\ x \in c'_-.$$

Si f est compatible avec ces recollements, à savoir si

$$f \circ i_{-+} = i'_{-+} \circ f|_{c_-}, \tag{2}$$

alors f induit par recollement un difféomorphisme $\widetilde{f} : \Sigma \to \Sigma$ préservant l'orientation tel que $\widetilde{f}(c) = c'$. Reste à garantir la condition de compatibilité (2). Pour cela, remarquons que

$$f|_{c_+},\ \text{et } i'_{-+} \circ f \circ i_{-+}^{-1}$$

sont deux difféomorphismes $c_+ \to c'_+$ préservant l'orientation. ils sont donc isotopes (cf. question 1). Soit

$$h : 0,1] \times c_+ \to \Sigma_{c'},\ (t,x) \mapsto h_t(x)$$

une isotopie joignant $h_0 = f|_{c_+}$ à $h_1 = i'_{-+} \circ f \circ i_{-+}^{-1}$. Par le théorème d'extension des isotopies, cette isotopie se prolonge (sans modifier la restriction sur c_-) en une isotopie

$$H : [0,1] \times \Sigma_c \to \Sigma_{c'}$$

telle que $H_1 : \Sigma_c \to \Sigma_{c'}$ est un difféomorphisme vérifiant la condition de compatibilité (2).

Notons que c est séparante ssi c' l'est aussi car Σ_c et $\Sigma_{c'}$ ont le même nombre de composantes connexes.

D'après la question précédente, si c et c' sont non séparantes, alors les surfaces Σ_c et $\Sigma_{c'}$ ont même caractéristique d'Euler. Elles ont évidemment le même nombre de composantes connexes et ont le même nombre de composantes de bord. D'après la classification topologique des surfaces, elles sont donc difféomorphes. Il s'ensuit qu'il existe un difféomorphisme envoyant c sur c'. ■

5. Montrer : une courbe fermée simple homotope à un point borde un disque (on peut utiliser la classification topologique des surfaces et le groupe fondamental).

Solution. Si c est homotope à un point, alors c est séparante (cf. question 2). On peut alors représenter Σ comme la réunion de deux surfaces $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ avec $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = c$. Le théorème de Van Kampen dit que

$$\pi_1(\Sigma) = \pi_1(\Sigma_1) \star_{\pi_1(c)} \pi_1(\Sigma_2).$$

Puisque $[c] = 0$ dans $\pi_1(\Sigma)$, il s'ensuit que c est contractible dans Σ_1 ou dans Σ_2, par exemple dans Σ_1. Dans Σ_1, c représente une composante de bord donc est (librement) homotope à un lacet représentant un générateur c_i ou c_i^{-1} dans la présentation (1) du groupe fondamental $\pi_1(\Sigma_1)$ de Σ_1. Puisque $[c] = 0$, $[c_i] = 0$, ce qui implique que le genre g de Σ_1 est 0 et que Σ_1 a une seule composante de bord, à savoir c lui-même : donc Σ_1 est un disque et c borde ce disque. ■

6. Montrer : une courbe fermée simple homotope à une composante B de bord de Σ coborde avec B un anneau dans Σ.

Solution. Soit c vérifiant la condition de l'énoncé. Rebouchons la composante de bord B par un disque D tel que $\partial D = B$. On obtient alors une nouvelle surface Σ' dans laquelle c est à présent homotope à un point. D'après la question 5, c borde dans Σ' un disque qui est D. En isotopant c dans la direction normale à ce disque vers Σ (existence d'un collier pour la composante B de bord), on en déduit que c coborde un anneau avec $\partial D = B$. ■

Remarque : si Σ n'est pas orientée et a une composante de bord C, alors C est un cercle topologique qui possède un voisinage orientable. Si c est homotope à C, alors c coborde avec C un anneau mais n'est pas nécessairement séparante. Le voir si Σ est un anneau de Moebius. ■

7. Soient c_1, c_2 deux courbes fermées simples non séparantes sur Σ telles que $i(c_1, c_2) = 0$ (intersection géométrique). Montrer qu'il existe une courbe fermée simple c_3 telle que $i(c_1, c_3) = i(c_3, c_2) = 1$.

Solution. Il existe un difféomorphisme f envoyant c_1 sur un méridien m_1 de Σ (cf. Question 4). La courbe fermée simple c_2 est envoyée par f sur une courbe fermée simple c_2' *disjointe de* m_1 (puisqu'un difféomorphisme préserve l'intersection géométrique nulle). On peut donc supposer que c_1 est un méridien d'une présentation de la surface (comme sphère avec des anses). Considérons la longitude l_1 : elle intersecte de façon transverse minimale m_1 en un point. Si la longitude l_1 intersecte géométriquement c_2 en exactement un point, alors l_1 répond à la question. Sinon, il existe un cylindre $C \simeq S^1 \times I$ dont l'intérieur contient le méridien c_1 tel que $c_2 \in \Sigma \setminus C$. Considérons les deux cas selon que c_2 reste ou non non séparante dans $\Sigma' = \Sigma \setminus \mathrm{Int}(C)$.

Cas 1 : c_2 reste non séparante dans $\Sigma' = \Sigma \setminus \mathrm{Int}(C)$. Il existe un difféomorphisme g de Σ' (dont la restriction au bord de Σ' est l'identité) envoyant c_2 sur un autre méridien m_2 d'une présentation de la surface Σ' comme sphère avec des anses(cf. Question 4). On peut donc finalement supposer que c_2 est un méridien m_2 d'une autre anse de Σ. Il est alors aisé de construire une courbe fermée simple c_3 avec les propriétés demandées.

Cas 2 : c_2 devient séparante dans $\Sigma' = \Sigma \setminus \mathrm{Int}(C)$. La surface $(\Sigma_{c_1})_{c_2}$ obtenue en retirant successivement c_1 et c_2 a deux composantes connexes A et B. Chacune de ces composantes a des composantes composantes de bord distinguées venant de c_1 et de c_2. Notons les $c_{1-}, c_{1+}, c_{2-}, c_{2+}$ respectivement. Si l'une de ces composantes a trois composantes de bord distinguées ou si l'une composante contient c_{1-}, c_{1+} (ou c_{2-}, c_{2+}), alors c_1 (ou c_2) n'est pas initialement non séparante dans Σ, contradiction. Donc A et B ont chacune deux composantes de bord distinguées parmi $c_{1-}, c_{1+}, c_{2-}, c_{2+}$ avec deux indices distincts, par exemple A contient c_{1-}, c_{2-} et B contient c_{1+}, c_{2+} respectivement. Soit alors un arc dans A joignant c_{1-} à c_{1+} et un arc dans B joignant c_{1+} à c_{2+}. La réunion de ces arcs forment dans Σ (qu'on obtient en recollant c_{2-}, c_{2+} et c_{1-}, c_{1+}) une courbe fermée simple γ dont l'intersection avec c_1 (resp. c_2) est égale à 1. Ces courbes sont donc en position géométrique minimale (d'après le critère du bigone) et réalisent l'intersection géométrique demandée. ■

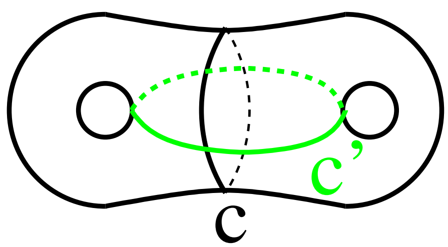
Exercice 4. (Une introduction au sous-groupe de Torelli.) Soit Σ une surface connexe compacte sans bord. On note

$$\bullet : H_1(M) \times H_1(M) \to \mathbb{Z}$$

la forme d'intersection algbrique. L'objet de l'exercice est de démontrer que la représentation symplectique du cours

$$\begin{array}{rcl} \star : \mathfrak{M}(\Sigma) & \to & \mathrm{Sp}_{2g}(H_1(\Sigma), \bullet) \\ [f] & \mapsto & f_\star \end{array}$$

n'est pas injective. Considérer la figure suivante



représentant une paire de courbes fermées simples c et c' sur une surface fermée Σ de genre 2.

1. Montrer que c est homologue 0 mais n'est pas homotope à un point.

Solution. Soit $p \in \Sigma$. Pour une orientation de c et des méridiens m_1, m_2 et longitudes l_1, l_2 de Σ,

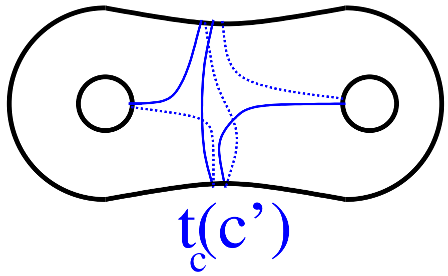
$$[c] = l_1 \cdot m_1 \cdot l_1^{-1} \cdot m_1^{-1} = (l_2 \cdot m_2 \cdot l_2^{-1} \cdot m_2^{-1})^{-1} \neq 1 \in \pi_1(\Sigma, p).$$

Puisque $H_1(\Sigma) = \pi_1(\Sigma, p)/[\pi_1(\Sigma, p), \pi_1(\Sigma)]$, nopus déduisons que $[c] = 0$ en homologie. Mais c n'est pas homotope à un point.

Autre méthode : Puisque c est séparante et que Σ n'a pas de composante de bord, $[c] = 0$ en homologie (cf. Question 1 de l'Exercice 3). D'autre part, si c était homotope à un point, d'après la question 5 de l'Exercice 3, c borderait un disque dans Σ, ce qui n'est manifestement pas le cas (c est séparante et borde de chaque côté une copie du tore privé d'un disque). Donc $[c] \neq 1$ dans $\pi_1(\Sigma, p)$. ■

2. Montrer que $t_c(c')$ est homologue à c' mais n'est pas isotope à c'.

Solution. Observons que $\iota(c, c') = 0$ (intersection algébrique) quelle que soit l'orientation de c et de c'. Nous avons $(t_c)_*([c']) = [c'] + 0 \cdot [c] = [c'] \in H_1(\Sigma)$ d'après une formule déjà vue. D'où la première affirmation. Pour la seconde, considérons $t_c(c')$ dans Σ.



On calcule l'intersection géométrique de c' et de $t_c(c')$: on observe que $i(c', t_c(c')) =$ 4 sur la figure. (Il est aisé de vérifier qu'il n'y a pas de bigone.) On peut aussi utiliser la formule générale (déjà vue)

$$i(c', t_c(c')) = i(c, c')^2 = 2^2 = 4.$$

Par conséquent, c et c' ne sont pas isotopes (sinon leur intersection géométrique serait nulle). ∎

3. Conclure que t_c est un élément non trivial de Ker $\star$.

Solution. Nous avons la formule

$$(t_c)_*(x) = x + ([c] \cdot x)x,$$

pour tout $x \in H_1(\Sigma)$ où $\cdot$ désigne ici l'intersection algébrique. Puisque $[c] = 0$, on déduit que $(t_c)_* = \mathrm{Id}_{H_1(\Sigma)}$. Donc $t_c \in \mathrm{Ker}(\star)$. La question précédente montre que t_c n'est pas isotope à l'identité puisque $t_c(c')$ n'est pas isotope à c'. Donc t_c est un élément non trivial du groupe $\mathfrak{M}(\Sigma)$ de difféotopies de Σ. On conclut que Ker $\star$ est un sous-groupe normal non trivial de $\mathfrak{M}(\Sigma)$: c'est le sous-groupe de Torelli. ∎