Licence Pluridisciplinaire – Mathématiques
Partiel du lundi 8 mars 2010

Calculatrices et documents sont interdits. Durée de l'épreuve : 2 heures.

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel euclidien et $F \subseteq E$ un sous-espace de E.
1. Définir la projection orthogonale $p = p_F$ sur F.

2. Soit $x \in E$. Montrer que

$$d(x, F) = ||x - p(x)||.$$

Exercice 2

Soit $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique et de sa base canonique $i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0), k = (0, 0, 1)$ orthonormale directe. On considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base i, j, k est

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. Déterminer le sous-espaces des vecteurs fixés par f.
3. En déduire que f est une rotation dont on précisera les caractéristiques.

Exercice 3

Soit $X = \{1, 2, 3\}$. Une permutation de X est une bijection $X \to X$. On note S_X le groupe des permutations de X (on ne demande pas de redémontrer que S_X est un groupe pour la composition).

Première partie

1. Quel est le nombre d'éléments de S_X ?

2. On considère l'action naturelle de S_X sur X définie par : $\sigma \cdot x = \sigma(x)$ pour $\sigma \in S$ et $x \in X$.

   2.1. Montrer que cette action est fidèle.

   2.2. Montrer que cette action est transitive.

   2.3. Montrer par un exemple qu'elle n'est pas libre.

3. On considère l'action de S sur $X^3 = \{(x, y, z) \mid x \in X, y \in Y, z \in X\}$ définie par : $\sigma \cdot (x, y, z) = (\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z))$ pour $\sigma \in S$ et $x, y, z \in X \times X \times X$. Montrer que cette action est fidèle. Est-elle transitive ? Est-elle libre ?

Réfléchir à la maison aux deux questions suivantes ou les traiter en bonus :

4. On considère le sous-ensemble Δ de X^3 constitué par les triplets de points dont au moins deux sont identiques. Par exemple $(1,2,2) \in \Delta$ et $(2,2,2) \in \Delta$ mais $(1,2,3) \notin \Delta$. On note $Y = X^3 - \Delta$ le complémentaire de Δ. Ecrire une liste des éléments de Y. Quel est le cardinal de Y ?

5. Montrer que l'action de S_X sur Y définie comme en 3) est simplement transitive.

Deuxième partie

Soit $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté par sa base orthonormale canonique (e_1, e_2, e_3). On identifie le groupe des isométries de $\mathbb{R}^3$ au groupe $O(3)$ des matrices carrées orthogonales de taille 3. Une permutation $\sigma \in S_X$ induit une transformation linéaire $f_\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie sur la base orthonormale canonique e_1, e_2, e_3 par $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$, $i = 1, 2, 3$.

1. Ecrire (sous forme de matrice dans la base canonique) la transformation linéaire f_σ : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associée à la permutation σ définie par $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 2$ et $\sigma(3) = 1$. Montrer que f_σ est une isométrie. Décrire géométriquement f_σ.

2. Même question avec $f_\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associée à la permutation ρ définie par $\rho(1) = 2$, $\rho(2) = 3$ et $\rho(3) = 1$.

3. Soit $\sigma \in S$ une permutation quelconque. Calculer $\langle f_\sigma(e_i), f_\sigma(e_j)\rangle$ en fonction de $\langle e_i, e_j\rangle$ pour $1 \leq i, j \leq 3$. En déduire que $f_\sigma \in O(3)$.

4. Montrer que l'application $(S, \circ) \to (O(3), \circ)$, $\sigma \mapsto f_\sigma$ est un homomorphisme injectif de groupes. En déduire que $G = \{f_\sigma \mid \sigma \in S\}$ est un sous-groupe de $O(3)$.

Fin du sujet