Licence Pluridisciplinaire – Mathématiques
Examen du 28 juin 2010 – durée : 2 heures

Questions de cours

Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes.

1. Une application affine $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est une translation si et seulement si $\overrightarrow{f} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{E}}}$.
2. L'application $r : \theta \pmod{2\pi} \mapsto r(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ est un isomorphisme entre le groupe des réels modulo 2π (pour l'addition modulo 2π) et le groupe $\mathrm{SO}(2)$ des matrices de rotations vectorielles de $\mathbb{R}^2$ (pour la multiplication).
3. Les isométries affines de $\mathbb{R}^3$ n'ayant pas de point fixe sont des anti-déplacements (isométries négatives).

Problème

Première partie : rotations dans le plan

L'objet de cette partie est de démontrer le résultat suivant : la composée de deux rotations affines de $\mathbb{R}^2$ est une rotation affine ou une translation.

1)

1.1) Soit ρ_1 et ρ_2 deux rotations affines de $\mathbb{R}^2$. Quelle est la nature de l'isométrie vectorielle $\overrightarrow{\rho_1 \circ \rho_2}$?

1.2) Notons θ_1, θ_2 les angles des rotations vectorielles $\overrightarrow{\rho_1}$ et $\overrightarrow{\rho_2}$ respectivement. Montrer que $\rho_1 \circ \rho_2$ est une translation si et seulement si $\theta_1 + \theta_2 = 0 \pmod{2\pi}$.

1.3) Soit ρ une rotation affine de $\mathbb{R}^2$ distincte de l'identité et $\tau_{\vec{v}}$ une translation de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\tau_{\vec{v}} \circ \rho$ a un point fixe. En déduire que c'est une rotation affine.

1.4) Montrer que $\rho_1 \circ \rho_2$ est une rotation si et seulement si $\theta_1 + \theta_2 \neq 0 \pmod{2\pi}$.

2) (Hors barême) Montrer le même résultat à l'aide des nombres complexes.

Deuxième partie : rotations dans l'espace

L'objet de cette partie de voir en quoi que la propriété précédente tombe en défaut dans $\mathbb{R}^3$. On se place ainsi dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure affine euclidienne et de son repère canonique orthonormal direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

1) Etude d'exemples.

1.1) Soit r la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe Oz ($x = y = 0$) dirigé et orienté par $\vec{e_3} = (0, 0, 1)$ et d'angle $-\pi/2$. Ecrire r sous forme analytique dans le repère canonique de $\mathbb{R}^3$.

1.2) Soit ρ la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe $\mathcal{A}$ d'équations $x = 0, z = 1$ et d'angle π. Ecrire ρ sous forme analytique dans le repère canonique de $\mathbb{R}^2$.

1.3) Montrer sans calcul que $r \circ \rho$ et $\rho \circ r$ ont un point fixe commun p. Lequel ? En déduire, par un argument du cours, toujours sans calcul, que $\rho \circ r$ admet une droite fixe (que l'on ne cherchera pas à déterminer). En déduire que $\rho \circ r$ et $r \circ \rho$ sont des rotations de $\mathbb{R}^3$ dont les axes s'intersectent en p.

1.4) Trouver une expression analytique de $\rho \circ r$; en déduire les éléments géométriques de $\rho \circ r$. Vérifier que le résultat trouvé est en accord avec la question précédente.

1.5) On considère l'isométrie ρ' de $\mathbb{R}^3$ définie par l'expression analytique : $\rho'(x, y, z) = (-y+1, x+1, z)$. Décrire la nature géométrique de ρ' et déterminer ses éléments géométriques caractéristiques.

1.6) Trouver l'expression analytique de $\rho' \circ r$; en déduire la nature géométrique de $\rho' \circ r$.

1.7) On considère la rotation ρ'' d'axe $\mathcal{C}$ d'équations $y = 1,\ z = 0$ dirigé et orienté par le vecteur $\vec{e_1} = (1, 0, 0)$ et d'angle $+\pi/2$. Ecrire ρ'' sous forme analytique dans le repère canonique de $\mathbb{R}^3$.

1.8) Trouver l'expression analytique de $\rho'' \circ r$; en déduire la nature ainsi que les éléments géométriques de $\rho'' \circ r$.

2) Étude du cas général.

2.1) Soit r et ρ deux rotations quelconques de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la nature géométrique de $\overrightarrow{\rho \circ r}$? En déduire que $\rho \circ r$ est un vissage (composée commutative d'une rotation et d'une translation) ou une rotation (= vissage avec translation triviale) ou une translation (= vissage avec rotation triviale).

2.2) En déduire que $\rho \circ r$ soit une rotation de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\rho \circ r$ a un point fixe.

2.3) En déduire que si les axes respectifs des rotations affines r et ρ sont sécants ou parallèles alors $\rho \circ r$ est une rotation.