

**Licence Pluridisciplinaire – Mathématiques**  
**Examen du 10 mai 2010**

*Tout document hormis les notes de cours est interdit. Durée de l'épreuve : 3 heures.*

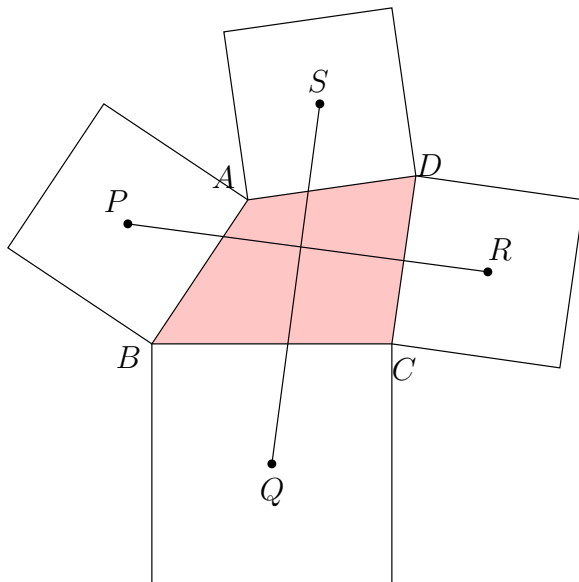
**Questions**

Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine. Dire pour chaque affirmation ci-dessous si elle est vraie ou fausse. On ne demande pas de redémontrer le résultat si l'affirmation est vraie ; si elle est fausse, donner un contre-exemple.

- 1) « Toute application  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  envoyant une droite affine sur une droite affine est une application affine. »
- 2) « Les seules applications affines  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  dont la partie linéaire  $\vec{f}$  est l'identité sont les translations. »
- 3) « Un déplacement de  $\mathbb{R}^3$  est soit une rotation soit une translation soit un vissage. »
- 4) « Un anti-déplacement de  $\mathbb{R}^3$  a un point fixe si et seulement si c'est une symétrie. »

**Exercice 1**

On considère un quadrilatère  $ABCD$ . On note  $P, Q, R, S$  les centres des quatre carrés construits sur les côtés comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Le but de l'exercice est de montrer que les segments  $[PR]$  et  $[QS]$  ont même longueur et sont orthogonaux.

- 1) On note  $I$  le milieu du côté  $[AB]$ ,  $J$  le milieu du côté  $[BC]$ ,  $K$  le milieu du côté  $[CD]$  et  $L$  le milieu du côté  $[DA]$ . Montrer les relations suivantes :  $2\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$  et  $2\overrightarrow{JL} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}$ .
- 2) Soit  $\rho$  la rotation vectorielle d'angle  $+\pi/2$ . Montrer que  $\rho(\overrightarrow{2PI}) = \overrightarrow{BA}$ ,  $\rho(\overrightarrow{2KR}) = \overrightarrow{CD}$ ,  $\rho(\overrightarrow{BC}) = 2\overrightarrow{QJ}$  et  $\rho(\overrightarrow{AD}) = 2\overrightarrow{LS}$ .
- 3) Dédurre des deux questions précédentes que  $\rho(\overrightarrow{PR}) = \overrightarrow{QS}$ . (On calculera  $\rho(\overrightarrow{2PR})$  en décomposant  $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IK} + \overrightarrow{KR}$ .)
- 4) Conclure. Peut-on trouver une isométrie affine envoyant le segment  $[PR]$  sur le segment  $[QS]$  ?

### Exercice 2

Soit  $\mathcal{E}$  un espace affine de dimension trois. On dit qu'une application  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  est une *symétrie glissée* (ou *symétrie-translation*) s'il existe une symétrie  $s$  et une translation  $t$  tels que  $f = t \circ s = s \circ t$ .

- 1) Soit  $s$  une symétrie par rapport à un sous-espace affine  $\mathcal{F}$  le long d'une direction  $G = \vec{G}$  et soit  $t$  une translation de vecteur  $\vec{u}$ . Montrer que  $t \circ s = s \circ t$  si et seulement si  $\vec{u} \in \vec{\mathcal{F}}$ .
- 2) Soit  $f$  une symétrie glissée. Montrer que le couple  $(s, t)$  vérifiant  $f = s \circ t = t \circ s$  est unique.
- 3) Soit  $f$  une application affine quelconque. Montrer que  $f$  est une symétrie glissée si et seulement si  $f \circ f$  est une translation.
- 4) Décomposer l'application  $f$  d'expression analytique suivante dans un repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  :

$$\begin{cases} x' &= (x - 2y - 2z + 1)/3 \\ y' &= (-2x + y - 2z + 2)/3 \\ z' &= (-2x - 2y + z - 1)/3 \end{cases}$$

### Exercice 3

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On considère l'application affine  $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  d'expression analytique

$$\begin{cases} x' &= -\frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z + \alpha \\ y' &= -\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z - 1 \\ z' &= -\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + 1 \end{cases}$$

- 1) Montrer que  $f_\alpha$  est une isométrie pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Préciser s'il s'agit d'un déplacement ou d'un anti-déplacement.
- 2) Montrer que  $f_\alpha$  admet au moins un point fixe si et seulement si  $\alpha = -\sqrt{2}$ .
- 3) Décrire  $f_{-\sqrt{2}}$ .

- 4) Quel type d'isométrie est  $f_\alpha$  pour  $\alpha \neq -\sqrt{2}$  ?
- 5) Montrer que  $f_\alpha \circ f_\alpha$  est une translation : l'expliciter. En déduire les décompositions canoniques de  $f_{-\sqrt{2}}$ ,  $f_{\sqrt{2}}$  et de  $f_0$ .

*Fin du sujet*