Corrigé de l'examen de géométrie

Licence MFP 10 mai 2010 9h à 12h

Questions

1) Faux.

L'application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ envoie toute droite affine de $\mathbb{R}$, à savoir $\mathbb{R}$ lui-même, sur elle-même ; mais elle n'est pas affine.

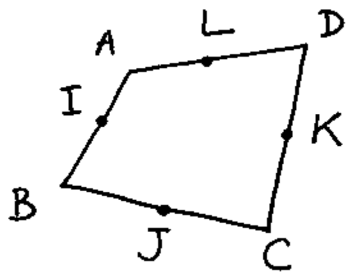
2) Vrai (vu en cours)

3) Vrai (vu en cours)

4) Faux.

La composée d'une symétrie et d'une rotation dont l'axe affine $\mathcal{D}$ est orthogonal au plan invariant $\mathcal{P}$ de la rotation a un point fixe $p = \mathcal{D} \cap \mathcal{P}$ (rotation-symétrie). Ce n'est pas une symétrie et c'est un anti-déplacement affine.

Exercice 1



1)
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC}$$
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID}$$

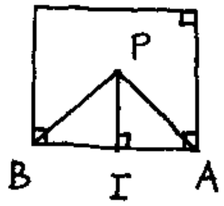
$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} \quad \text{car } \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{AI} = \vec{0}$$
$$= \overrightarrow{IK} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{IK} + \overrightarrow{KD}$$
$$= 2\,\overrightarrow{IK} \quad \text{car } \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$$

De même on montre : $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JD}$

$$= \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JD} \quad \text{car } \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$$
$$= \overrightarrow{JL} + \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{JL} + \overrightarrow{LD}$$
$$= 2\,\overrightarrow{JL} \quad \text{car } \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LD} = \vec{0}.$$

2) $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PI} \perp \overrightarrow{AB} \\ \|\overrightarrow{PI}\| = \|\overrightarrow{BI}\|\end{array}\right\}$ puisque P est le centre du carré dont $[AB]$ est un des côtés

On en déduit que $\vec{\rho}(\overrightarrow{PI}) = \overrightarrow{BI}$, soit $\vec{\rho}(2\overrightarrow{PI}) = 2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA}$.



De la même manière, on montre que $\vec{\rho}(2\overrightarrow{KR}) = \overrightarrow{CD}$

$$\vec{\rho}(\overrightarrow{BC}) = 2\overrightarrow{QJ}$$
$$\vec{\rho}(\overrightarrow{AD}) = 2\overrightarrow{LS}$$

3) (et 4))

$$
\begin{aligned}
\rho(2\overrightarrow{PR}) &= \vec{\rho}\left(2(\overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IK} + \overrightarrow{KR})\right) \\
&= \vec{\rho}(2\overrightarrow{PI}) + \vec{\rho}(2\overrightarrow{IK}) + \vec{\rho}(2\overrightarrow{KR}) \\
&= \vec{\rho}(2\overrightarrow{PI}) + \vec{\rho}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}) + \vec{\rho}(2\overrightarrow{KR}) \quad \Big) \text{ d'après 1)}. \\
&= \vec{\rho}(2\overrightarrow{PI}) + \vec{\rho}(\overrightarrow{BC}) + \vec{\rho}(\overrightarrow{AD}) + \vec{\rho}(2\overrightarrow{KR}) \\
&= \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{QJ} + 2\overrightarrow{LS} + \overrightarrow{CD} \quad \Big) \text{ d'après 2)} \\
&= \underbrace{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}} + 2\overrightarrow{QJ} + 2\overrightarrow{LS} \\
&= 2\overrightarrow{JL} + 2\overrightarrow{QJ} + 2\overrightarrow{LS} \quad \Big) \text{ d'après 1)} \\
&= 2\overrightarrow{QS} \qquad \text{d'après Charles}
\end{aligned}
$$

donc : $\boxed{\rho(\overrightarrow{PR}) = \overrightarrow{QS}}$

ce qui implique : $\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{QS}$ et $\|\overrightarrow{PR}\| = \|\overrightarrow{QS}\|$.

(puisque $\vec{\rho}$ est la rotation vectorielle d'angle $+\frac{\pi}{2}$). ■

5) Soit $O = [PR] \cap [QS]$

Il existe une rotation de centre O envoyant la droite affine (PR) sur la droite (QS) : à savoir la rotation $\rho_{O,+\frac{\pi}{2}}$ de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

Notons $\left| \begin{array}{l} P' = \rho_{O,+\frac{\pi}{2}}(P) \in (QS). \\ \vec{u} = \overrightarrow{P'Q} \in \text{ direction de } (QS). \end{array} \right.$

Alors l'isométrie affine $\tau_{\vec{u}} \circ \rho_{O,+\frac{\pi}{2}}$ envoie (PR) sur (QS)

et $\tau_{\vec{u}} \circ \rho_{O,+\frac{\pi}{2}}(P) = \tau_{\vec{u}}(P') = P' + \vec{u} = P' + \overrightarrow{P'Q} = Q$.

Comme $\tau_{\vec{u}} \circ \rho_{O,+\frac{\pi}{2}}$ est une isométrie (conserve les distances), et que $\tau_{\vec{u}} \circ \rho_{O,+\frac{\pi}{2}}$ est positive (conserve l'orientation), on en déduit que

$$\tau_{\vec{u}} \circ \rho_{O,+\frac{\pi}{2}}(R) = S.$$

Cette isométrie affine répond donc à la question.

Remarque : d'après la classification du cours, $\tau_{\vec{u}} \circ \rho_{O,+\frac{\pi}{2}}$ est en fait une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$ (mais de centre $O' \neq O$ en général ; on peut déterminer ce centre en résolvant l'équation $\tau_{\vec{u}} \circ \rho_{O,+\frac{\pi}{2}}(O') = O'$).

Exercice 3

1) $M = M(\vec{f}_\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac{1}{\sqrt2} & -\frac12 & -\frac12 \\ +\frac{1}{\sqrt2} & -\frac12 & -\frac12 \end{bmatrix}$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt2} \\ +\frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac12 \\ -\frac12 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{1}{\sqrt2}\cdot\left(-\frac12\right) + \frac{1}{\sqrt2}\left(-\frac12\right) = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac12 \\ -\frac12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac12 \\ -\frac12 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac{1}{\sqrt2} - \frac14 - \frac14 = \frac12 - \frac12 = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt2} \\ +\frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac12 \\ -\frac12 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{1}{\sqrt2}\left(-\frac12\right) + \frac{1}{\sqrt2}\cdot\left(-\frac12\right) = 0 .$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt2} \\ +\frac{1}{\sqrt2} \end{pmatrix} \right\|^2 = \left(\frac{-1}{\sqrt2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt2}\right)^2 = \frac12 + \frac12 = 1$$

$$\left\| \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac12 \\ -\frac12 \end{pmatrix} \right\|^2 = \frac12 + \frac14 + \frac14 = 1$$

$$\left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac12 \\ -\frac12 \end{pmatrix} \right\|^2 = \frac12 + \frac14 + \frac14 = 1.$$

Donc $M \in O(3)$: donc f_α est une isométrie pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\det(M) = \det\left(\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}\right) = -\left(-\frac{1}{\sqrt2}\right)\begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac12 & -\frac12 \end{vmatrix} + \frac{1}{\sqrt2}\begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac12 & -\frac12 \end{vmatrix}$$

$$= \left(+\frac{1}{\sqrt2}\right)\left(+\frac{1}{2\sqrt2} + \frac{1}{2\sqrt2}\right) + \frac{1}{\sqrt2}\left(+\frac{1}{2\sqrt2} + \frac{1}{2\sqrt2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt2}\left(\frac{1}{\sqrt2}\right) + \frac{1}{\sqrt2}\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)$$

$$= \frac12 + \frac12$$

$$= 1 > 0.$$

$\boxed{f_\alpha \text{ est un déplacement pour tout } \alpha \in \mathbb{R}}$

3) Pour $\alpha = -\sqrt{2}$, f_α est un déplacement affine admettant un point fixe,
donc une <u>rotation</u> affine
(d'après la classification)

- Décrivons explicitement $\mathrm{Fix}(f_\alpha)$:

$$\mathrm{Fix}(f_\alpha) \ni (x,y,z) \iff \begin{cases} -x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z = -\sqrt{2} \\ -y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}(-y) = -\sqrt{2} \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + \sqrt{2}\,y = \sqrt{2} \\ y + z = 0 \end{cases}$$

C'est l'expression analytique de l'<u>axe affine</u> $\mathcal{D}$ de la rotation.
(intersection de deux plans affines)

- $$\mathrm{Tr}(M) = 2\cos\theta + 1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

donc $2\cos\theta = -2 \implies \cos\theta = -1$

$$\implies \theta = \pm\pi$$

<u>Conclusion</u> : $f_{-\sqrt{2}}$ est la rotation affine d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle π
(retournement).

N. B. : on trouve aussi une <u>représentation paramétrique de l'axe $\mathcal{D}$</u> en choisissant un point $p \in \mathcal{D}$, par exemple $(0,1,-1)$, et un vecteur directeur $\vec{v} = (\sqrt{2}, -1, +1)$.

2) On résout l'équation $f_\alpha(x,y,z) = (x,y,z)$.

$$\begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z + \alpha = x \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z - 1 = y \\ +\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + 1 = z \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z = -\alpha & (1) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z = +1 & (2) \\ +\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z = -1 & (3) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z = -\alpha & (1) & \\ -y - z = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha & (2) - \frac{1}{\sqrt{2}} \times (1) & : (2)' \\ -y - z = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha & (3) + \frac{1}{\sqrt{2}} \times (1) & : (3)' \end{cases}$$

La compatibilité des équations $(2)'$ et $(3')$ impose :

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha = -\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\alpha = -\sqrt{2}}$$

f_α admet un point fixe $p = (x,y,z)$ ssi $\alpha = -\sqrt{2}$.

4) Pour $\alpha \neq -\sqrt{2}$, f_α n'a pas de <u>point fixe</u> et est un déplacement
D'après la classification du cours, f_α est donc un <u>vissage</u>.

5) Calcul de $f_\alpha \circ f_\alpha$: pour montrer que $f_\alpha \circ f_\alpha$ est une translation, il suffit de montrer que $\overrightarrow{f_\alpha \circ f_\alpha} = \vec{f_\alpha} \circ \vec{f_\alpha} = id_{\mathbb{R}^3}$.

On calcule donc :

$M_\alpha^2 = M_\alpha \cdot M_\alpha = I_3$ ✓

f_α est donc un <u>retournement glissé</u>.

On a :

$$f_\alpha(x,y,z) = M_\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_\alpha \circ f_\alpha(x,y,z) = M_\alpha \left[M_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = M_\alpha^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + M_\alpha \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \\ +\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2} + \alpha \\ -1 - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \\ 1 + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Donc $\boxed{f_\alpha \circ f_\alpha \text{ est la } \underline{\text{translation}} \text{ de vecteur } \vec{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} + \alpha \\ -1 - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \\ 1 + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}$.

N.B. : on vérifie que pour $\alpha = -\sqrt{2}$, $\vec{v} = \vec{0}$.

Décompositions canoniques :

- $\alpha = -\sqrt{2}$: déjà vu : $f_\alpha = \rho_{\mathcal{D},\pi}$
- $\alpha \neq -\sqrt{2}$:

$$f_\alpha = \rho \circ \tau_{\vec{u}} = \tau_{\vec{u}} \circ \rho \qquad \text{avec } \rho \text{ retournement} : \rho^2 = id.$$

$$f_\alpha^2 = (\rho \circ \tau_{\vec{u}}) \circ (\rho \circ \tau_{\vec{u}}) = (\tau_{\vec{u}} \circ \rho) \circ (\rho \circ \tau_{\vec{u}})$$

$$= \tau_{\vec{u}} \circ \rho^2 \circ \tau_{\vec{u}}$$

$$= \tau_{\vec{u}}^2 = \tau_{2\vec{u}}.$$

Donc $\boxed{\vec{v} = 2\vec{u}}$.

Reste à déterminer l'axe $\mathcal{D}_\alpha$ de ρ : d'après le cours, on sait que $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathcal{D}_\alpha}$,

donc $\overrightarrow{\mathcal{D}_\alpha}$ est dirigé par $\vec{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+\alpha \\ -1-\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \\ 1+\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Pour déterminer $\mathcal{D}_\alpha$, il suffit de connaître un point $p \in \mathcal{D}_\alpha$.

Or $\tau_{\vec{u}}^{-1} \circ f_\alpha = \rho$ admet précisément cet axe comme sous-espace affine de points fixes : il suffit donc de résoudre l'équation

$$\tau_{\vec{u}}^{-1} \circ f_\alpha (x,y,z) = (x,y,z)$$

$$\iff \quad f_\alpha(x,y,z) - \vec{u} = (x,y,z)$$

$$\iff \quad M_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha+\sqrt{2} \\ -1-\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \\ 1+\frac{\alpha}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$\iff \quad (M_\alpha - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\alpha+\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2}(1+\frac{\alpha}{\sqrt{2}})+1 \\ \frac{1}{2}(1+\frac{\alpha}{\sqrt{2}})-1 \end{pmatrix}.$$

Soit le système :

$$\begin{cases} -x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z = \frac{-\alpha+\sqrt{2}}{2} & (1) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2}(1+\frac{\alpha}{\sqrt{2}})+1 = \frac{-\alpha+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}. & (2) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z = \frac{1}{2}(1+\frac{\alpha}{\sqrt{2}})-1 = \frac{\alpha-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} & (3) \end{cases}$$

$$\iff \boxed{\begin{cases} -x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z = \frac{-\alpha+\sqrt{2}}{2} & (1) \\ -y - z = 0 & (2) - \frac{1}{\sqrt{2}}(1) : (2)' \end{cases}}$$

C'est l'expression analytique de l'axe $\mathcal{D}_\alpha = \left(\frac{\alpha-\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right) + \mathbb{R}\cdot(\vec{v})$.

Conclusion : pour $\alpha \neq -\sqrt{2}$,

f_α est la composée (commutative) du retournement ρ_α d'axe $\mathcal{D}_\alpha$ et de la translation $\tau_{\vec{u}_\alpha}$ avec $\vec{u}_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{\alpha+\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{(\alpha+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\alpha+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

En particulier pour $\alpha = 0$:

$$\boxed{f_0 = \rho_0 \circ \tau_{\vec{u}_0} \quad \text{avec} \quad \mathcal{D}_0 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\vec{u}_0 , \quad \vec{u}_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}}$$

et pour $\alpha = \sqrt{2}$:

$$\boxed{f_{\sqrt{2}} = \rho_{\sqrt{2}} \circ \tau_{\vec{u}} \quad \text{avec} \quad \mathcal{D}_{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\vec{u}_{\sqrt{2}} \quad \vec{u}_{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Exercice 2

1) $t \circ s = s \circ t \iff \forall p \in \mathcal{E},\ t \circ s(p) = s \circ t(p)$

$\iff \forall p \in \mathcal{E},\ s(p) + \vec{u} = s(p + \vec{u})$

$\iff \forall p \in \mathcal{E},\ s(p) + \vec{u} = s(p) + \vec{s}(\vec{u})$.

$\iff \forall p \in \mathcal{E}\ \ \vec{u} = \vec{s}(\vec{u})$.

$\iff \vec{u} \in \mathrm{Fix}(\vec{s}) = \vec{\mathcal{F}}$. ■

2) Soit (s', t') un autre couple.

$$\left.\begin{array}{l} f^2 = t \circ s \circ (t \circ s) = t \circ s \circ s \circ t = t^2 \\ \text{de même : } f^2 = t'^2 \end{array}\right\} \text{ donc } \underline{t^2 = t'^2}$$

donc les deux translations sont <u>égales</u>. $\quad (\tau_{\vec{u}}^2 = \tau_{2\vec{u}})$.

Donc les deux symétries le sont aussi : $s = s'$. ■

3) Si f est une symétrie glissée alors on a déjà vu que $f^2 = t^2$ est une translation.

Réciproquement : supposons que f^2 est une translation. Alors $\vec{f}^2 = id_{\vec{E}}$.
Donc $\vec{f}$ est une symétrie vectorielle de $\vec{E}$ (cours). Donc, d'après la classification du cours, f est <u>une symétrie glissée</u> (éventuellement une vraie symétrie (translation = identité)).

4) Soit $M = M(\vec{f}) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$f(x,y,z) = M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Donc $f^2(x,y,z) = f(f(x,y,z)) = M\cdot\left[M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$$= M^2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + M\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

On vérifie que $M^2 = I_3$, donc :

$$f^2(x,y,z) = (x,y,z) + \underbrace{M\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{\vec{v}}$$

Donc f^2 est une <u>translation</u> ;

c'est la translation de vecteur $\vec{v} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} +1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} +2/9 \\ 8/9 \\ -10/9 \end{bmatrix}$$

Donc dans la décomposition $f = s \circ t = t \circ s$ cherchée, <u>t est la translation de vecteur $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{2}$</u> (puisque $f^2 = \tau_{\vec{v}} = t^2$).

Pour déterminer s, on écrit : $s = \tau_{\vec{u}}^{-1} \circ f$

Recherchons les points fixes de s :

$$s(x,y,z) = (x,y,z) \iff (\tau_{\vec{u}}^{-1} \circ f)(x,y,z) = (x,y,z)$$

$$\iff f(x,y,z) - \vec{u} = (x,y,z)$$

$$\iff \left(M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} \\ -\frac{5}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff (M - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} \end{pmatrix}.$$

$$\iff -2x - 2y - 2z = -\frac{2}{9}$$

$$\iff x + y + z = \frac{1}{9}.$$

C'est l'équation analytique du <u>plan</u> invariant $(\mathcal{P})$ par s.

On remarque que $M \in O(3)$, donc f est une isométrie, donc s est une symétrie <u>orthogonale</u>.

Conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{l} f = s \circ \tau_{\vec{u}} = \tau_{\vec{u}} \circ s \\ \text{où } \vec{u} = (1/9,\ 4/9,\ -5/9) \\ \text{et } s \text{ est la symétrie orthogonale par rapport au plan } \mathcal{P} \\ \text{d'équation : } x + y + z = \frac{1}{9} \end{array}}$$