Dynamique et fractals

Arnaud Chéritat

Toulouse III

Dynamiques

Dynamique discrète, continue. Champs de vecteurs, dynamique hamiltonienne. Dynamique réelle, dynamique complexe ($\mathbb{C}$). Dimension finie, infinie. Équation de Schrödinger. Systèmes affines par morceaux, continus, C^1, C^n, C^∞, analytiques. Equations d'onde. Euler, Navier Stokes. Temps discret, temps continu, plusieurs variables temporelles, actions de groupes, bifurcations, Etc. . .

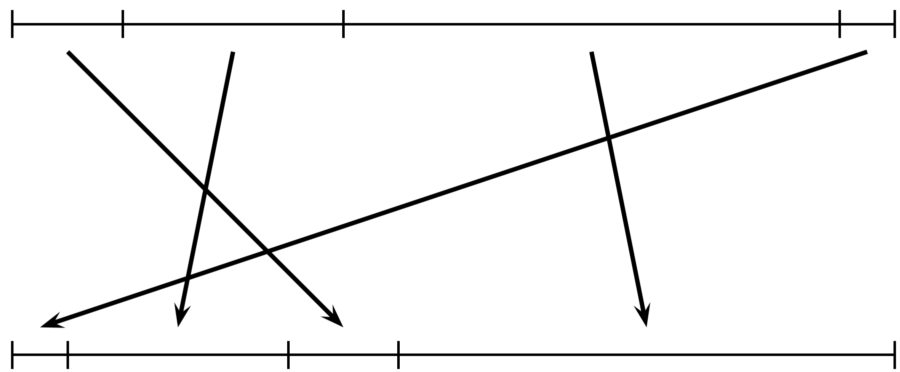
Facile ?

Même des exemples qui paraîssent complètement triviaux se révèlent extrêmement riches. Exemples :

1. Les homéomorphismes du cercle, comme par exemple $x \mapsto a + x + b\sin(x)$ dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, avec $b \leq 1$ de sorte que cela reste une bijection. (Poincaré, Arnold, Herman, . . .). Quand $b \longrightarrow 0$, c'est une perturbation de la rotation d'angle a.

Facile ?

2. Un échange d'intervalles, c'est à dire $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ bijective et translation par morceaux (Yoccoz, Forni, ...).

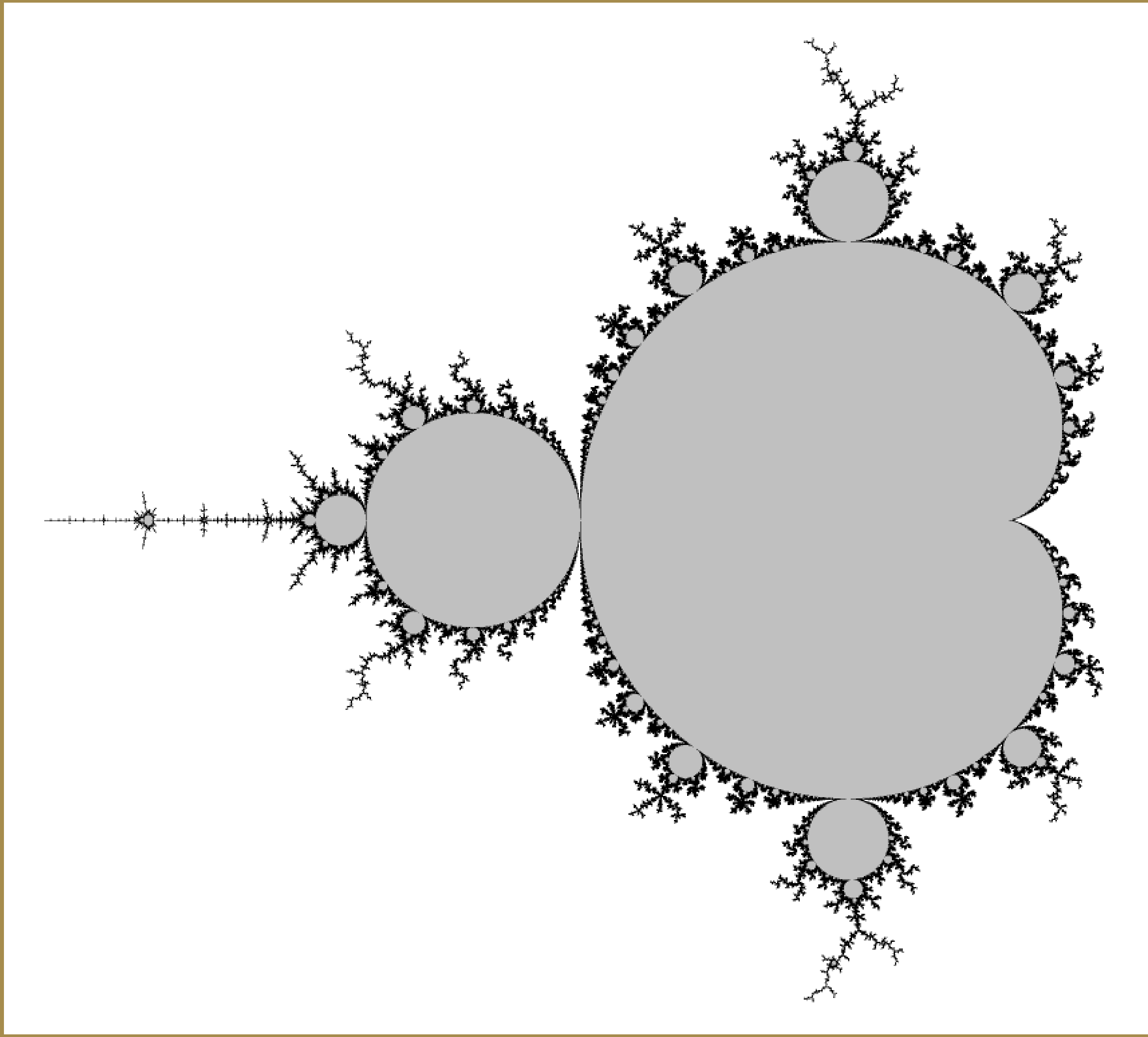


L'étude de cette classe est en cours.

Ma spécialité

Mon domaine de recherche est la dynamique holomorphe en dimension 1 (dimension complexe). Plus précisément on regarde la dynamique de $f : X \to X$ où X est une surface de Riemann (variété analytique complexe de dimension 1). Par exemple $X = \mathbb{C}$.

Une icône de la dynamique holomorphe



La famille quadratique

Soit

$$P_c(z) = z^2 + c.$$

Partant de $z \in \mathbb{C}$ on définit $z_n = P_c^n(z) = P_c(P_c(\ldots(P_c(z))))$. On définit le bassin de l'infini A comme l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $z_n \longrightarrow \infty$. Comme l'infini est un point fixe attractif, son bassin contient un voisinage de l'infini. On peut montrer qu'il est ouvert et connexe. On définit

$$K_c = \mathbb{C} - A$$

appelé ensemble de Julia rempli.

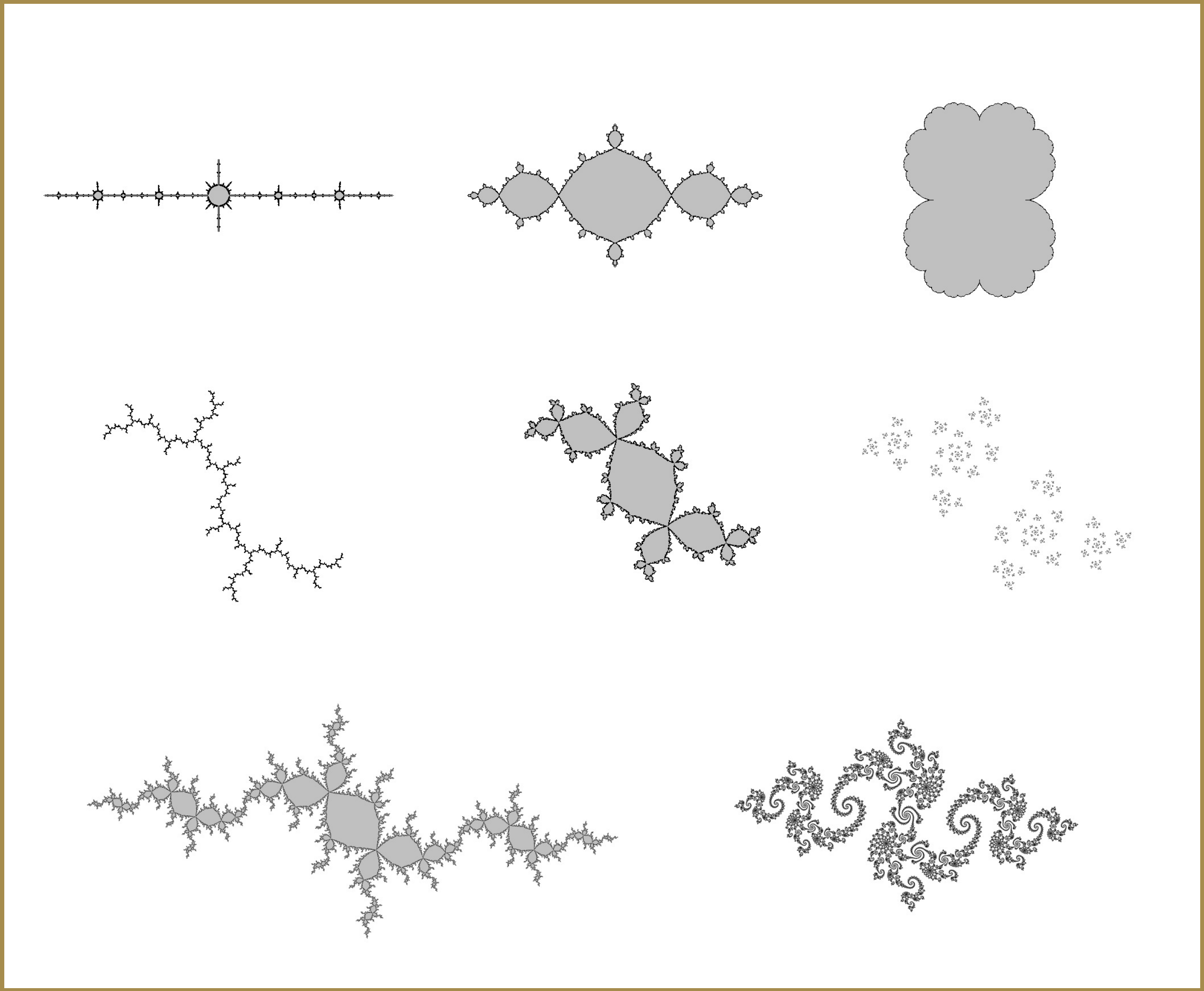
L'ensemble de Julia

On s'intéresse à la frontière

$$J_c = \partial K_c$$

appelée ensemble de Julia. C'est un ensemble fractal. Il est fermé, borné, d'intérieur vide. Il est répulsif pour la dynamique de P_c.

Exemples



Le point critique

L'unique point critique de P_c est $z = 0$. On a constaté que son orbite joue un rôle déterminant. Par exemple:

Théorème :

- *si* $0 \in K_c$ *alors* K_c *est connexe*
- *si* $0 \notin K_c$ *alors* K_c *est un ensemble de Cantor*

On definit alors l'ensemble de Mandelbrot

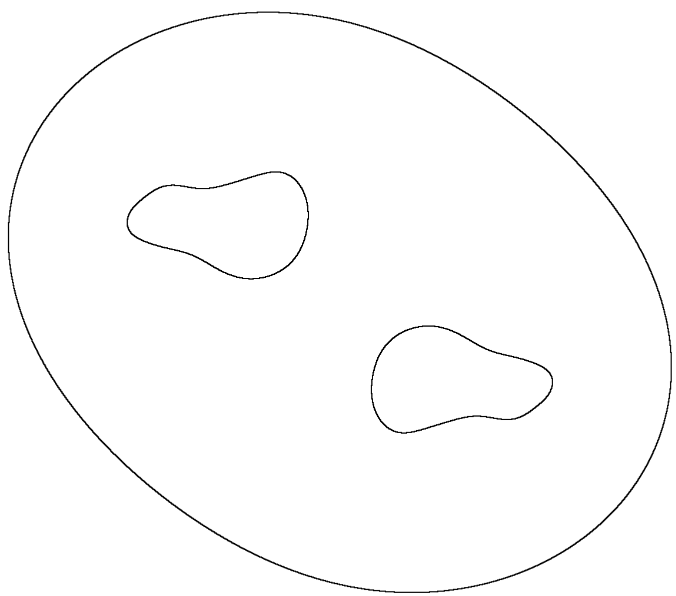
$$M = \{c \in \mathbb{C},\ K_c \text{ est connexe}\}.$$

C'est le chef d'orchestre.

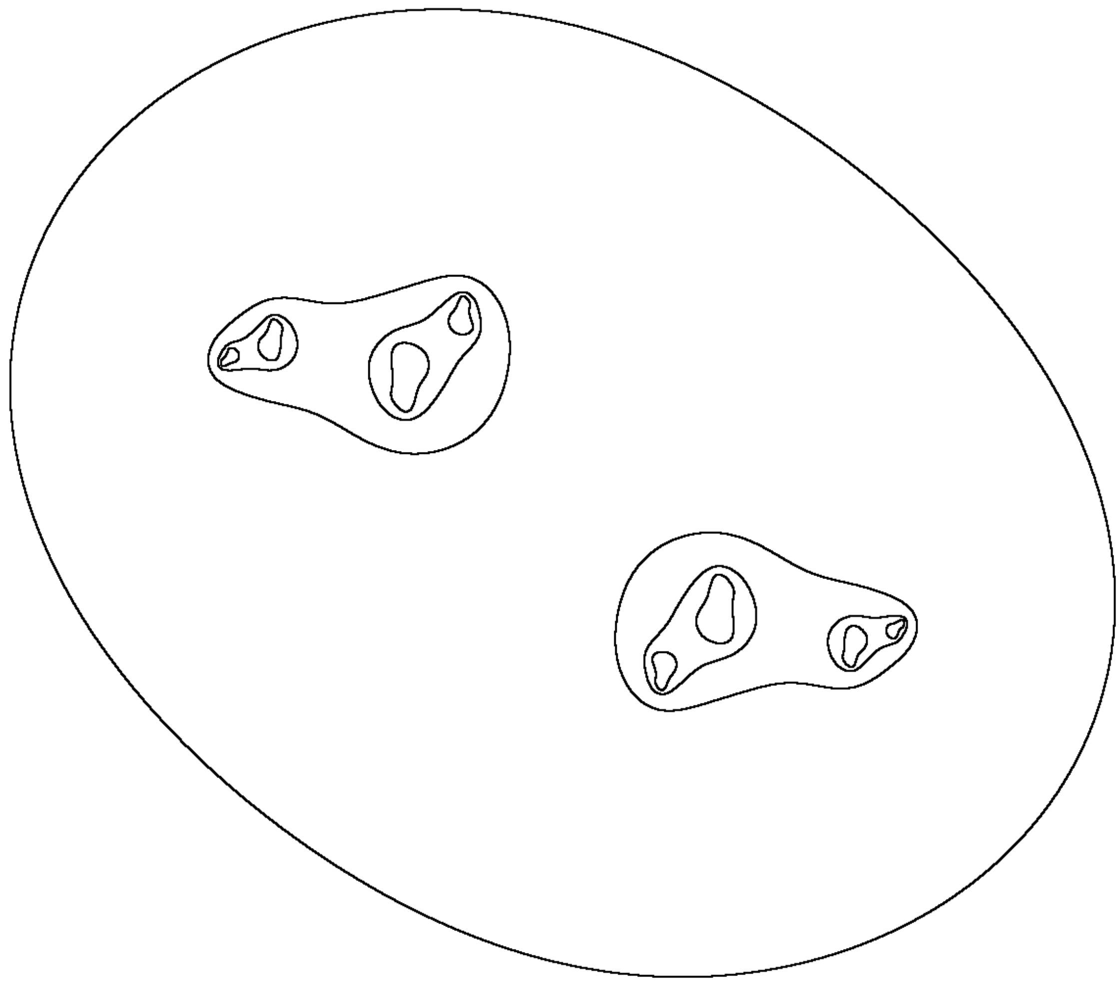
Le cas des Cantors

Quand $c \notin M$, on peut trouver des ouverts U_1, U_2 et V (en tirant en arrière un grand cercle par la dynamique)

- bornés par des courbes de Jordan
- tels que $\overline{U}_1$ et $\overline{U}_2$ sont disjoints et inclus dans V
- P_c est une bijection de U_1 dans V et de U_2 dans V
- et $\mathbb{C} - V$ est inclus dans le bassin attractif de l'infini.



Itération inverse. . .



Géométrie $\longrightarrow$ Analyse

Lemme de Schwarz : *si* $f : B(0,1) \to B(0,1)$ *est holomorphe et fixe* 0*, alors* $|f'(0)| \leq 1$ *et* $|f'(0)| = 1 \iff f$ *est une rotation.*

Rigidité : les seuls automorphismes (bijections holomorphes) de $B(0,1)$ fixant 0 sont les rotations.

Conséquence : on peut définir sur $B(0,1)$ une métrique invariante (la métrique hyperbolique) par le groupe des automorphismes de $B(0,1)$.

Uniformisation de Riemann : tout ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et différent de $\mathbb{C}$ est analytiquement isomorphe à $B(0,1)$.

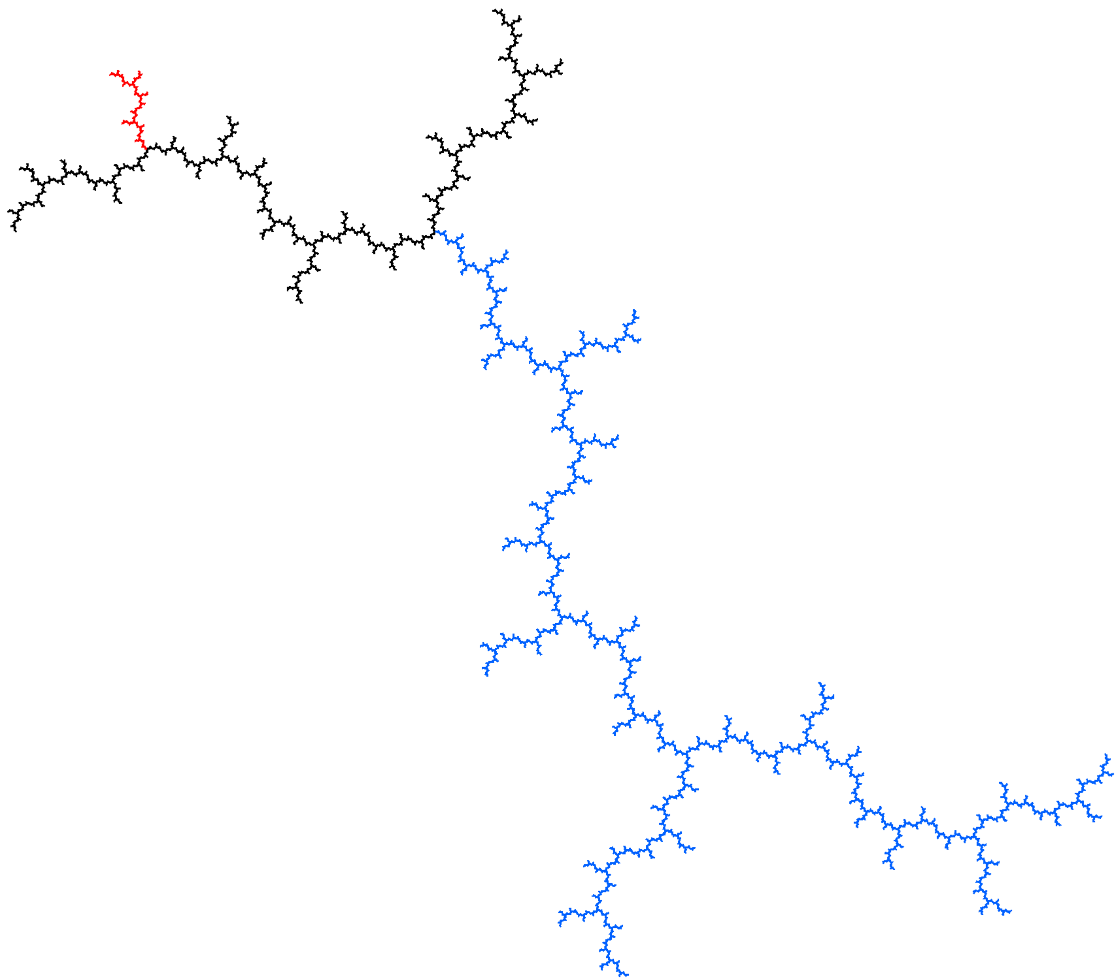
Conséquence : on peut définir sur un tel ouvert une métrique hyperbolique naturelle.

Si V et U sont des domaines de Jordan tels que $\overline{U} \subset V$ et $f : V \to U$ est holomorphe, le lemme de Schwarz implique que f est *contractante* pour la métrique hyperbolique de V.

Géométrie $\longrightarrow$ Analyse, 2

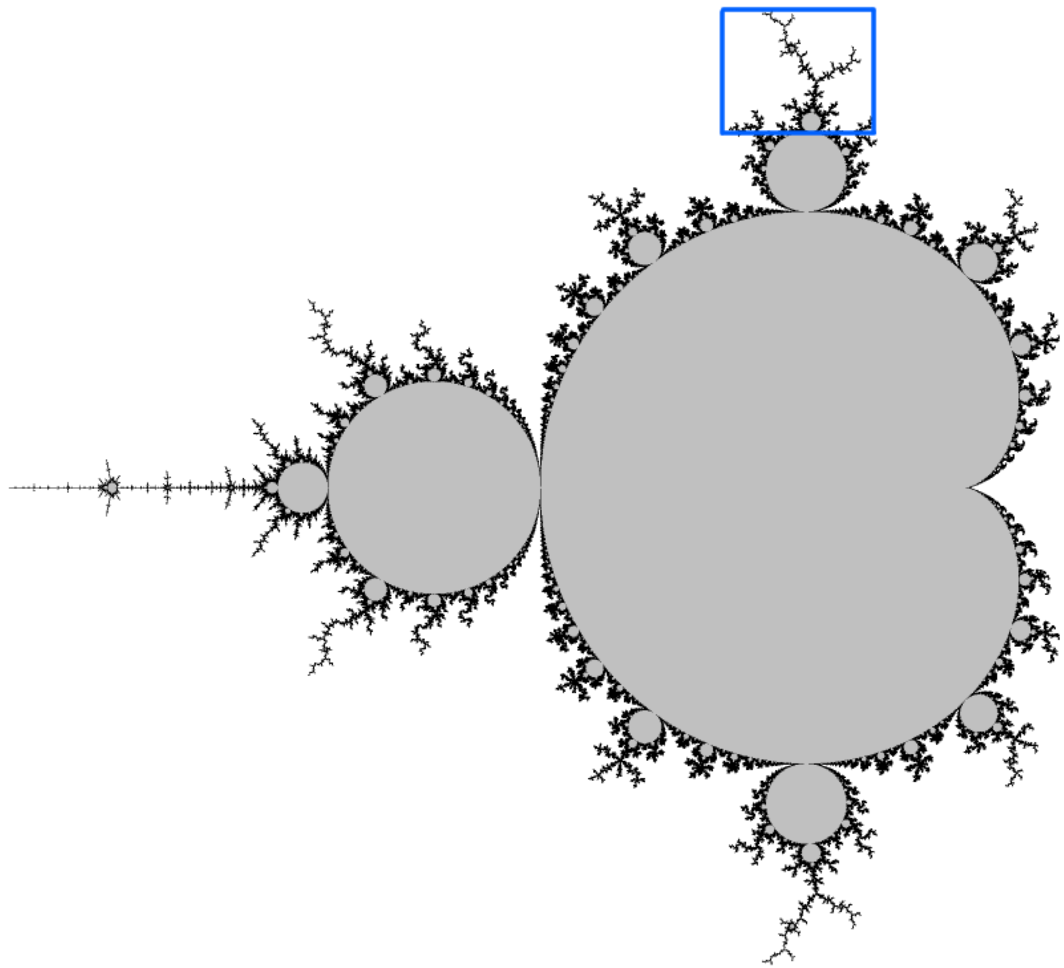
Tout un ensemble d'outils de la dynamique holomorphe en une variable est dans cet esprit. Le théorème de Montel par exemple (la famille des application holomorphes de $B(0,1)$ dans la sphère de Riemann privée de trois points donnés est équicontinue), implique que J_c est l'adhérence de l'ensemble des points périodiques répulsifs, ainsi que la propriété suivante : pour tout voisinage V d'un point z de J_c, il existe n tel que $P_c^n(V)$ recouvre J_c.

Autosimilarité de J et caractère fractal

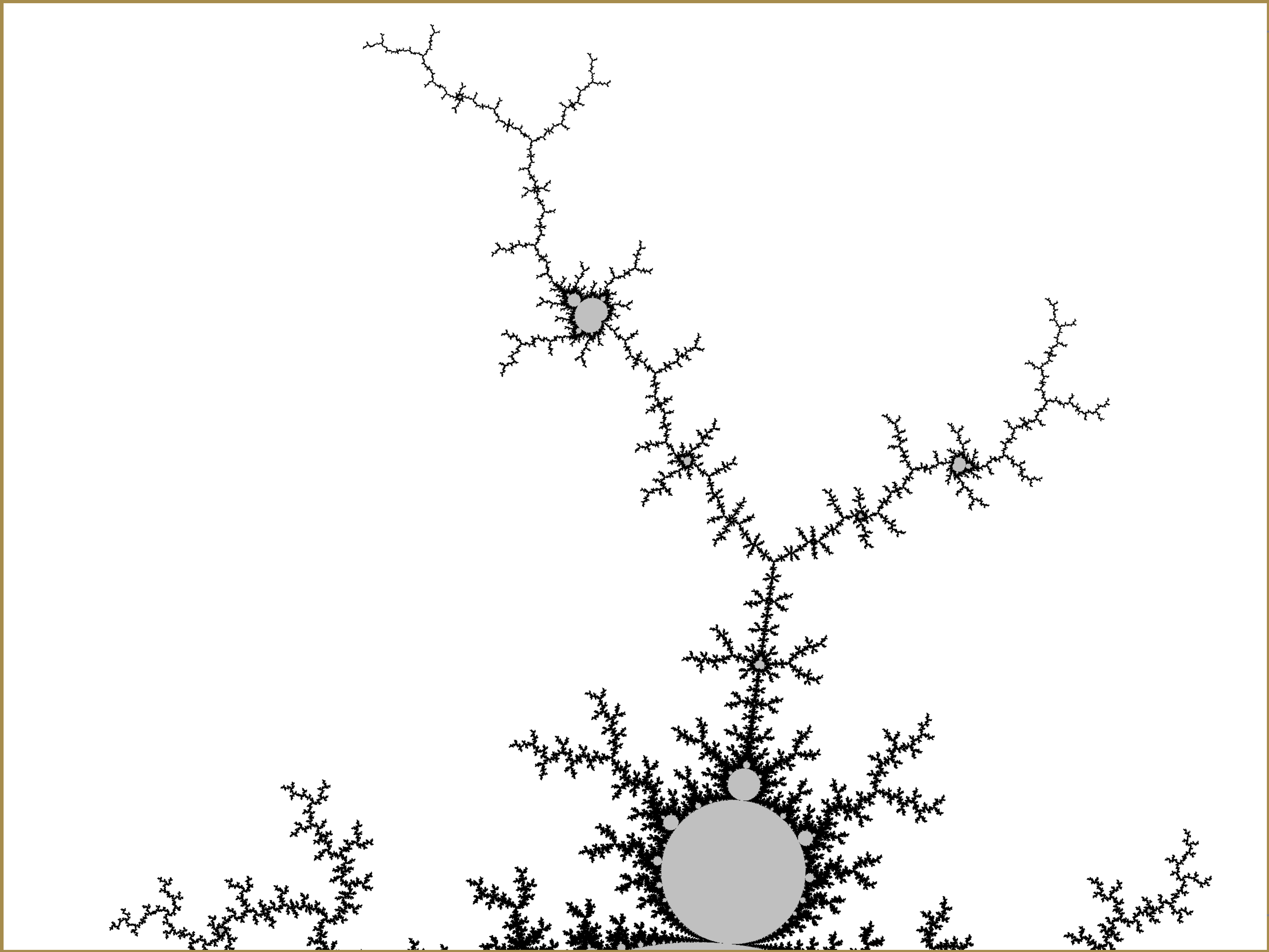


La renormalisation et l'autosimilarité de M

L'observation d'agrandissements de l'ensemble de Mandelbrot fait apparaître des copies de M dans M

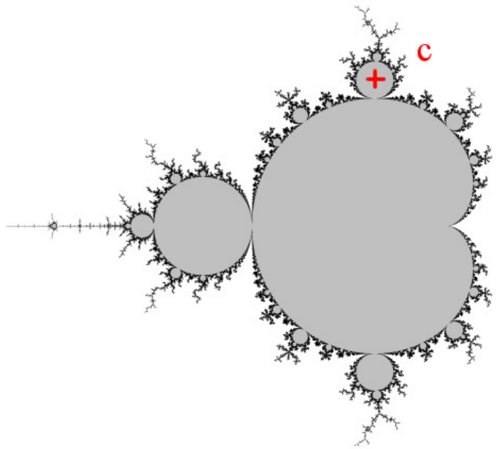


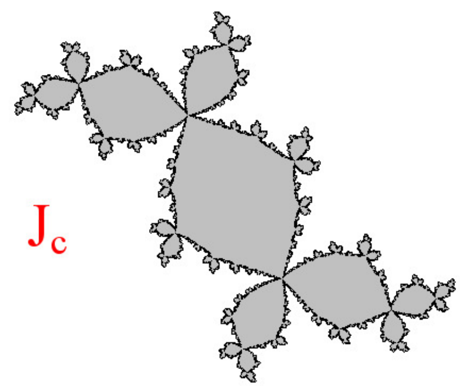
Zoom

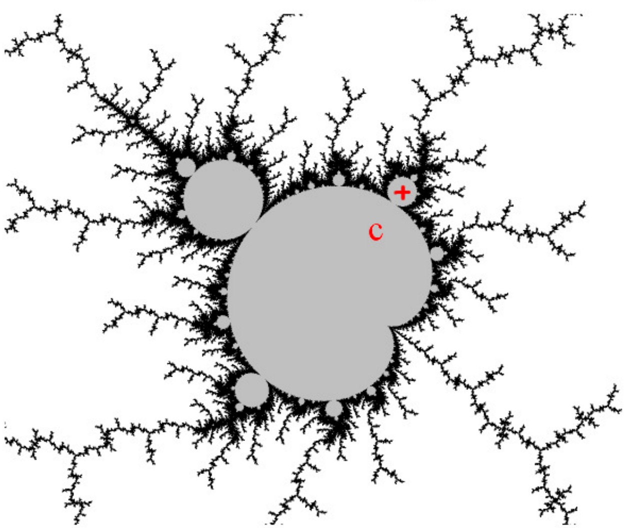


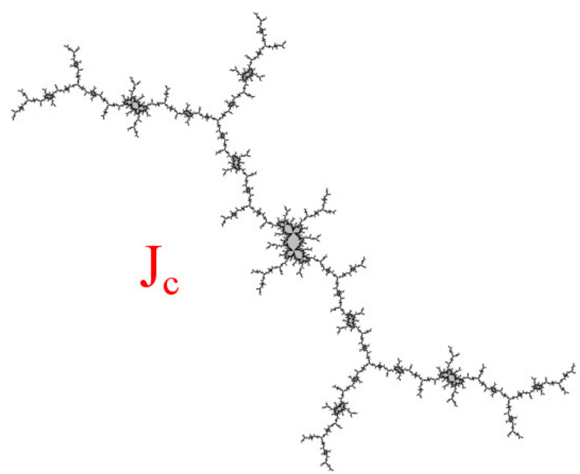
Explications ?

Sélectionnons un paramètre c dans une petite copie de M, et regardons l'ensemble J_c.

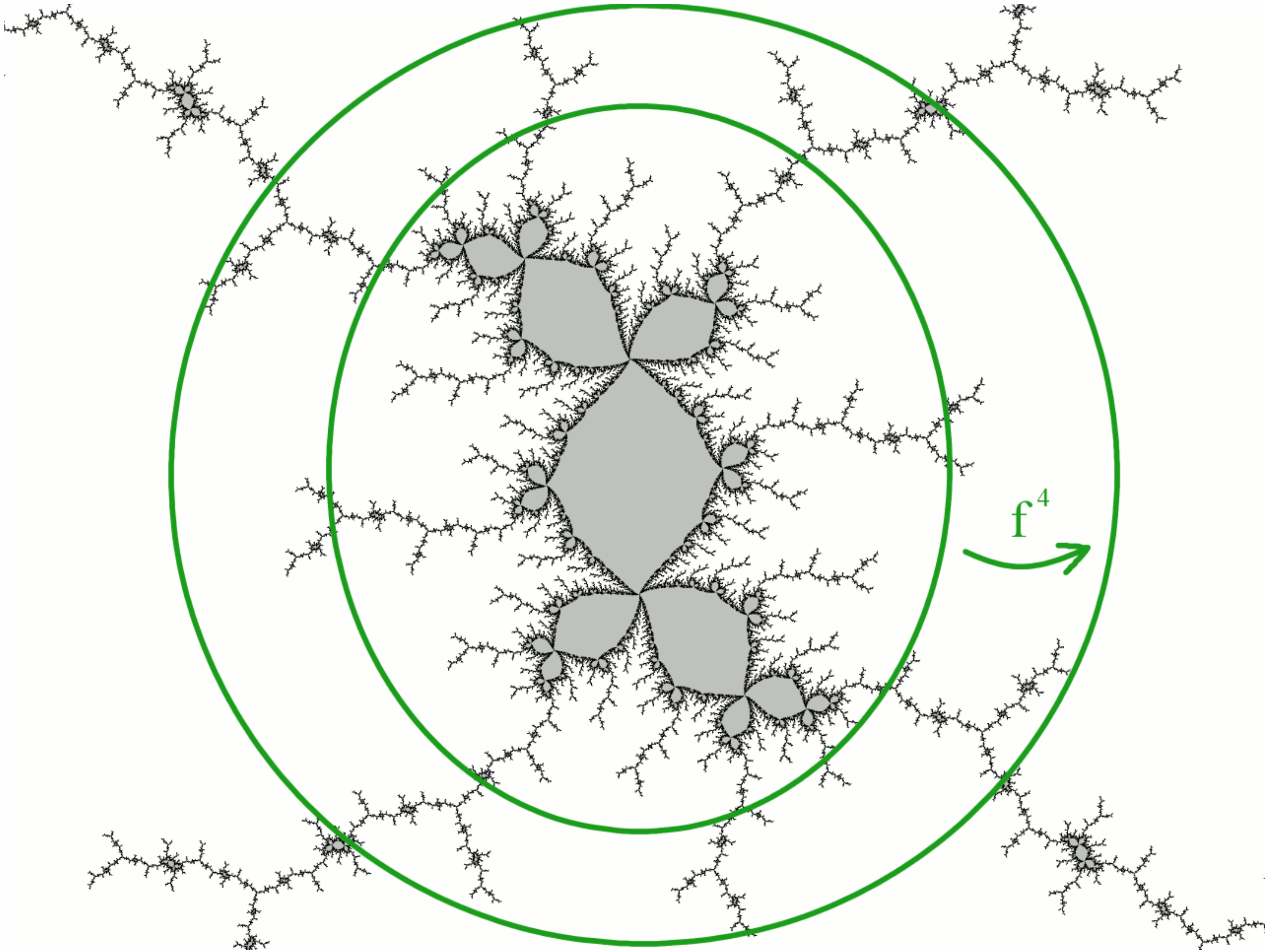








f^4



Application à allure polynomiale

Théorème [Douady, Hubbard] : *Si U et V sont des domaines de $\mathbb{C}$, simplement connexes, $\overline{U} \subset V$ et $f : U \to V$ est analytique et propre (elle envoit le bord sur le bord), alors il existe un polynôme P et un disque D contenant $K(P)$ sur lequel $P : P^{-1}(D) \to D$ est conjuguée à $f : U \to V$. On dit que f est à allure polynomiale quand son degré est ≥ 2.*

La conjugaison n'est pas différentiable en général (elle est quasiconforme, et donc son module de continuité est typiquement Höldérien).

Renormalisation

Définition : Si P est un polynôme et $n \geq 2$, U, V sont tels que $f = P^n : U \to V$ est à allure polynomiale et si $K(f)$ est connexe et différent de $K(P)$, alors on dit que P est renormalisable, et f est la renormalisée de P. On a alors $K(f) \subset K(P)$ et $J(f) \subset J(P)$. On identifiera deux renormalisées $f_i : U_i \to V_i$, $i = 1, 2$, si $K(f_1) = K(f_2)$ et $f_1 = f_2$ au voisinage de ce compact.

Renormalisation en degré 2

Dans le cas de la famille $P_c = z^2 + c$, si P_c est renormalisable pour une certaine valeur de c, alors $c \in M$ et on peut toujours s'arranger pour que le point critique 0 de P_c soit dans U, quitte à remplacer U, V par $P^k(U)$, $P^k(V)$ pour k bien choisi.

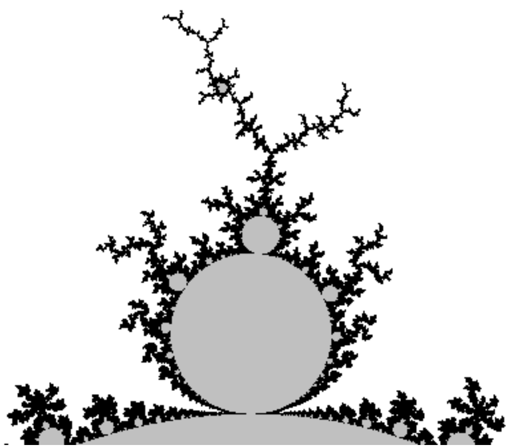
Les renormalisées dont le f a degré 2 et dont le U contient 0, d'un même polynôme $P_c = z^2 + c$, forment une chaîne, finie ou infinie, $f_n : U_n \to V_n$ telle que f_{n+1} est une renormalisée de f_n.

Action sur M

Partons d'un P_c et supposons-le renormalisable. À sa renormalisée le théorème de Douady Hubbard associe un polynôme Q de degré 2. Un polynôme de degré 2 est analytiquement conjugué à $P_{c'}$ pour un unique c'. Ici $c' \in M$. Ainsi on obtient une application de renormalisation $c \mapsto c'$ d'un sous-ensemble de M vers M, qui sur les dessins correspond à envoyer les petites copies de M sur l'original.

Remarques

- Les copies de M dans M forment un sous-ensemble dense.
- Génériquement au sens de Baire sur ∂M, P_c est non-renormalisable.
- Il y a deux sortes de copies de M : sans le point de rebroussement (copies attachées à un bulbe), et avec un point de rebroussement.



Quelques questions ouvertes concernant M

L'ensemble M est connexe. L'intérieur de M est non vide. La dynamique de P_c est hyperbolique sur $J(P_c)$ si et seulement si, soit $c \notin M$, soit P_c a un cycle attractif . Dans ce cas, on sait que $c \notin \partial M$.

Conjectures :

1. ∂M est de mesure de Lebesgue nulle (on sait que sa dimension de Hausdorff est 2).
2. $\overset{\circ}{M}$ est composé uniquement de polynômes hyperboliques (donc les polynômes de degré 2 hyperbolique forment un ouvert dense de l'ensemble des polynômes de degré 2).
3. M (ou ∂M, c'est équivalent) est localement connexe.

On sait que 3. $\Rightarrow$ 2.