Travaux dirigés, planche 1

Exercice 1 Résoudre les systèmes suivants :

$$(a) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 3 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 4y + z = 0 \\ -x + y + z = 2 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 4x - 2z = 1 \\ 2x + y - 3z = 1 \\ 6x - 5y + 8z = 1 \end{cases} \quad (d) \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 2 \\ 3x + 5y + 4z = 4 \\ 4x + 6y + 6z = 4 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x - 2y + 4t = 1 \\ 3x - 4y + 2z + 6t = 2 \\ 2x + 2y + 5z - 11t = 3 \\ -x + 2y - z - 3t = 4 \end{cases} \quad (f) \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y + 2z - 3t = 2 \\ 2x + 4z + 4t = 3 \\ 2x + 2y + 3z + 8t = 2 \\ 5x + 3y + 9z + 19t = 6 \end{cases}$$

Exercice 2 Déterminer si les ensembles suivants sont des espaces vectoriels.

$$\begin{aligned} F_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y = 2\} \\ F_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 5y + 3z = 0 \text{ et } 2x + 3y = 0\} \\ F_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\} \\ F_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \\ F_5 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 0\} \\ F_6 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z^2 = 0\} \\ F_7 &= \{(u, 2u) \mid u \in \mathbb{R}\} \\ F_8 &= \{(u, u^2) \mid u \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Exercice 3 Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables et 2π -périodique.
2. L'ensemble des polynômes de degré supérieur ou égal à n .
3. L'union de l'ensemble des polynômes de degré pair et du polynôme nul.

4. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de limite nulle en $+\infty$.

Exercice 4 Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel quelconque. Est-ce que le complémentaire de F dans E est un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 5 a) Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $F_1 \cup F_2$ soit un sous-espace vectoriel de E .

b) On suppose ici $\mathbb{K}$ infini (par exemple $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Que peut on dire de la réunion de k sous-espaces vectoriels?

Exercice 6 Dans la suite, $\mathbb{K}$ est un corps égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et F_1, F_2, F_3 trois sous-espaces vectoriels de E .

1. Montrer que

$$F_1 \cap F_2 + F_1 \cap F_3 \subset F_1 \cap (F_2 + F_3)$$

2. Y a-t'il égalité? On donnera une démonstration ou un contre-exemple.

3. Montrer que

$$F_1 \cap F_2 + F_1 \cap F_3 = F_1 \cap (F_2 + F_1 \cap F_3)$$

Exercice 7 Soit $v_1 = (1, 2)$ et $v_2 = (2, 1)$. Montrer à la main que la famille (v_1, v_2) engendre $\mathbb{R}^2$. Est-ce une base?

Exercice 8 Les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles libres? génératrices? bases?

- $(1, 2, 3), (1, 0, 1)$.
- $(1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)$.
- $(1, 0, 1), (0, 2, 2), (3, 7, 1)$.
- $(1, 2, 1), (0, 1, 2), (1, -1, 2), (1, 2, 3)$

Exercice 9 On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $e_1 = (1, 1, 0)$, $e_2 = (1, 0, -1)$, $e_3 = (1, 2, 1)$. Est-ce que les vecteurs $(2, 1, -1)$ et $(0, 0, 1)$ sont combinaison linéaires de e_1, e_2 et e_3 ? Est-ce que (e_1, e_2, e_3) forme une famille libre? Donner une base et une équation de $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$.

Exercice 10 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $e_1 = (1, 2, 3)$ et $e_2 = (2, -1, 1)$. Donner une équation caractérisant $\text{Vect}(e_1, e_2)$.

On pose $f_1 = (1, 0, 1)$ et $f_2 = (0, 1, 1)$. Montrer que $\text{Vect}(e_1, e_2) = \text{Vect}(f_1, f_2)$.

Exercice 11 Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les familles suivantes sont libres :

$$(x, e^x) \quad (x, \sin(x), \cos(x)) \quad (1, e^x, \dots, e^{nx}), \quad \{e^{\lambda x}\}_{\lambda \in \mathbb{R}}.$$

Exercice 12

1. Montrer que $E = \mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel.
2. Montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une famille libre (dans E).
3. Que peut-on dire de la dimension de E ?

Exercice 13 Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère $P_1 = 1$, $P_2 = (X + 1)^2$ et $P_3 = X^3$. Le vecteur $P = 3X^3 - 2X^2 - 4X$ est-il combinaison linéaire de (P_1, P_2, P_3) ? Plus généralement, décrire $\text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$. est-ce que (P_1, P_2, P_3) est libre ?

Exercice 14

1. Montrer que $(X(X - 1), (X - 1)(X + 1), X(X + 1))$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soient trois réels u, v, w . Dédurre de la question précédente qu'il existe un unique $P(X) \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(-1) = u$, $P(0) = v$ et $P(1) = w$.
3. Généraliser et retrouver le théorème d'interpolation de Lagrange pour les polynômes (mais si voyons, vous connaissez ce théorème...)

Exercice 15 Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les hyperplans d'équations

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z + t &= 0 & (P_1) \\ x + y + z + t &= 0 & (P_2) \end{aligned}$$

Donner une base de P_1 et une base de $P_1 \cap P_2$.

Exercice 16 Dans $\mathbb{R}^4$, donner les équations définissant le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $e_1 = (1, 2, 0, 1)$, $e_2 = (2, 3, 0, 3)$ et $e_3 = (3, 2, 1, 2)$.

Exercice 17 Soient e_1, e_2, e_3 les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$e_1 = (3, 1, -1) \quad e_2 = (-1, 1, 2) \quad e_3 = (4, 4, 2)$$

1. La famille (e_1, e_2, e_3) est-elle libre ?
2. Justifier sans calcul si la famille (e_1, e_2, e_3) génératrice de $\mathbb{R}^3$ ou non.

- Donner la dimension de $E = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ et une base de E .
- Donner une équation déterminant E .

Exercice 18 Soit $F = \{(x, 2x, x), x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 0\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 19 On considère les vecteurs $(u_1, \dots, u_5)$ de $\mathbb{R}^4$, définis par $u_1 = (2, 1, 1, 0)$, $u_2 = (1, 1, 1, 0)$, $u_3 = (1, 1, 0, 0)$, $u_4 = (0, 0, 1, 1)$, $u_5 = (2, 3, 0, 1)$. Soit $U = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$, $V = \text{Vect}(u_4, u_5)$.

- A-t-on $U + V = \mathbb{R}^4$?
- U et V sont-ils supplémentaires ? Quelle est la dimension de $U \cap V$?
- Déterminer des équations déterminant U et V .
- Déterminer une base de $U \cap V$.

Exercice 20 Soient $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1)$ et $v_5 = (0, 1, 0, 1)$.

Pour chacune des paires suivantes, déterminer si les deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$:

- $\text{Vect}(v_1, v_2)$ et $\text{Vect}(v_3)$;
- $\text{Vect}(v_1, v_2)$ et $\text{Vect}(v_4, v_5)$;
- $\text{Vect}(v_1, v_3, v_4)$ et $\text{Vect}(v_2, v_5)$;
- $\text{Vect}(v_1, v_4)$ et $\text{Vect}(v_3, v_5)$.

Exercice 21 Soit $E = M_n(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{S}$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques. Montrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont supplémentaires et donner leur dimension. Préciser la décomposition d'un élément de E .

Exercice 22 Soit E un espace vectoriel de dimension n . Soient F, G des sous-espaces vectoriels de E . Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses (justifier ou donner un contre exemple).

- $\dim(F) + \dim(G) = n$ donc F et G sont supplémentaires.
- $\dim(F) + \dim(G) = \dim(F + G)$ donc F et G sont en somme directe.
- $\dim(F) + \dim(G) > n$ donc F et G ne sont pas en somme directe.
- $F \cap G = \{0\}$ donc F et G sont supplémentaires.
- $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(F + G)$ donc F et G sont supplémentaires.
- $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = n$ donc F et G sont supplémentaires.