

Chapitre 1 : Systèmes linéaires

Attention : Ceci n'est pas un poly de cours, mais c'est un résumé succinct du cours.

1 Définition

Dans toute la suite $\mathbb{K}$ désigne un corps (on pourra prendre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ mais les matheux doivent avoir en tête que ça peut être n'importe quel corps). Un système d'équations linéaires à p équations et n inconnues est un système du type :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

Dans lequel $a_{11}, \dots, a_{pn}, b_1, \dots, b_n$ sont des éléments donnés de $\mathbb{K}$, et $x_1, \dots, x_n$ sont les inconnues. Une *solution* de (S) est un n -uplet $(x_1, \dots, x_n)$ qui vérifie toutes les n équations.

Vocabulaire : On appelle *second membre* du système le n -uplet $(b_1, \dots, b_n)$. Si le second membre est nul, on dit que le système est *homogène*.

Résoudre le système (S) , c'est trouver **toutes** ses solutions ou prouver qu'il n'y en a pas.

2 Résolution

2.1 Équivalence

Pour résoudre un système, on va se ramener à un système équivalent plus simple

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (S') \left\{ \begin{array}{l} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \vdots \\ a'_{p1}x_1 + a'_{p2}x_2 + \dots + a'_{pn}x_n = b'_p \end{array} \right.$$

Dire que $(S) \Leftrightarrow (S')$ c'est dire que (S) et (S') **ont les mêmes solutions** (c'est à dire que toute solution de (S) est aussi solution de (S') et que toute solution de (S') est aussi solution de (S)).

2.2 Résolution par la méthode du pivot de Gauss

L'intérêt de cette méthode est qu'elle est en général la plus sûre et la plus efficace. C'est basé sur la remarque (élémentaire) suivante :

Remarque 2.1. On ne change pas les solutions d'un système linéaire si :

- on change l'ordre des équations,
- on multiplie une équation par un élément non nul de $\mathbb{K}$,
- on ajoute à une équation un multiple d'une autre.

Remarque 2.2. Attention : une manipulation qui ne peut pas se décomposer en une série de manipulations successives du type précédent risque de ne pas mener à un système équivalent. Exemple élémentaire : si on fait en même temps $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, on ne peut plus retrouver L_1 ni L_2 .

On effectue alors l'algorithme suivant :

1. Si $a_{1,1} \neq 0$ (on dit que $a_{1,1}$ est un pivot), alors pour tout $i > 1$, on remplace la ligne L_i par $L_i - a_{i,1}/a_{1,1}L_1$, ce qui a pour effet d'annuler le coefficient devant x_1 de la ligne L_i .
2. Si $a_{1,1} = 0$ mais il existe i tel que $a_{i,1} \neq 0$, on échange au préalable les lignes L_1 et L_i .
3. Si pour tout i , $a_{i,1} = 0$, c'est que l'inconnue x_1 est "muette", on va considérer j_1 le plus petit indice tel que l'on puisse trouver un coefficient $a_{i,j_1} \neq 0$. On échange la ligne 1 et la ligne i , et ce coefficient sera le pivot et sera utilisé pour éliminer l'inconnue x_{j_1} des autres équations.
4. On ne touche plus à la première l'équation et on continue l'algorithme en se restreignant aux équations suivantes (qui est un système avec $p - 1$ équation et $n' < n$ inconnues.)

A la fin de l'algorithme on arrive à un système *échelonné*, c'est à dire de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a'_{1,j_1}x_{j_1} + & \dots & & \dots & + & \dots & = b'_1 \\ & & a'_{2,j_2}x_{j_2} + & \dots & & \dots & = b'_2 \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & a'_{r,j_r}x_{j_r} + & \dots & = b'_r \\ & & & & & 0 & = b'_{r+1} \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & 0 & = b'_p \end{array} \right.$$

Avec $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq n$, et les coefficients $a'_{j_1}, \dots, a'_{j_r}$ sont non nuls. On peut alors décrire les solutions de la manière suivante :

1. Si il existe $i > r$ tel que $b'_i \neq 0$, alors le système n'a pas de solution.
2. Si pour tout $i > r$, $b'_i = 0$ (ou si $r = p$), on raye les éventuelles équations inutiles, il y a deux possibilités :
 - a) $\{j_1, \dots, j_r\} = \{1, \dots, n\}$, le système est dit de *Cramer*, on voit facilement qu'il y a une unique solution (on exprime successivement $x_n, x_{n-1}, \dots$ en fonction des coefficients).
 - b) $\{j_1, \dots, j_r\} \neq \{1, \dots, n\}$. Les inconnues $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$ sont appelée *inconnues principales*, les autres inconnues (il y en a) sont appelées *variables libres*. On passe les variables libres dans le second membre. Il reste un système de Cramer en les inconnues $(x_{j_1}, \dots, x_{j_r})$: pour chaque valeur que peuvent prendre les variables libres, on a une solution. Le système a donc une infinité de solution¹.

1. Pour les matheux : c'est bien sûr seulement si le corps est infini.