Université Paul Sabatier
Année 2003-2004
1ère Année de Licence

Analyse combinatoire

1) Soient E et F des ensembles finis ($\#E = n,\ \#F = p$) et $\mathrm{A}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F.

   - Montrer que $\#\mathrm{A}(E, F) = p^n$.
   - Montrer que $\#\mathcal{P}(E) = 2^n$.

2) On suppose que $n \leq p$ et que E et F sont tous les deux munis d'un ordre total.

   - Calculer le nombre d'injections de E dans F.
   - Calculer le nombre d'applications strictement croissantes de E dans F.

3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (1 + x)^n$.

   - Donner une autre expression de f en utilisant la formule du binôme de Newton.
   - Dériver deux fois l'égalité ainsi obtenue pour en déduire :

$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k \text{ et } \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k.$$

   - Montrer que pour tout $n \geq 1$, et pour tout entier $k, 0 \leq k \leq n - 1$,

$$n C_{n-1}^k = (k + 1) C_n^{k+1}.$$

   - Déduire de ce qui précède la valeur de

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k.$$