Université Paul Sabatier
Année 2003-2004
1ère Année de Licence

Applications

1 Injections-Surjections

1) dire si les applications suivantes sont surjectives ? injectives ? bijectives ?

   $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$; $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2$; $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln x$; $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp x$.

   Bien remarquer que **tout** dans la définition a une importance : non seulement la forme de l'application, mais aussi l'espace de départ, mais aussi l'espace d'arrivée.

2) A l'aide de *patates*, dessiner une application non injective, puis une application non surjective.

3) Interpréter les phrases suivantes en termes d'injectivité et de surjectivité, en précisant de quelle application il s'agit (la définir y compris les deux espaces de départ et d'arrivée...) :

   - il existe des nombres complexes différents et de même carré,
   - tout nombre réel positif admet une racine carrée,
   - le nombre 3 n'est le sinus d'aucun nombre réel,
   - un nombre complexe est caractérisé par sa partie réelle et sa partie imaginaire,
   - un nombre complexe est caractérisé par son module et son argument.

4) L'application de l'ensemble des français à valeur dans l'ensemble des prénoms est-elle injective ? surjective ?
   Mêmes questions pour l'application à valeur dans les entiers qui à chacun fait correspondre son numéro d'identité nationale (numéro de "sécu"...) : est-elle injective ? surjective ?

5) Une application particulière : l'application "caractéristique" définie de E à valeurs dans $\{0, 1\}$ pour un sous-ensemble A de E :

   $$\mathbb{1}_A : E \to \{0, 1\} \ ; \ \mathbb{1}_A : x \mapsto 0 \text{ si } x \notin A, 1 \text{ si } x \in A.$$

   On définit alors l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans les fonctions sur E à valeurs dans $\{0, 1\}$:

   $$F : \mathcal{P}(E) \to \mathrm{A}(E, \{0, 1\}) \ ; \ F : A \mapsto \mathbb{1}_A.$$

   Quelles sont les propriétés de cette application ?

6) Soient trois ensembles E, F, G et deux applications : $f : E \to F$, $g : F \to G$. On pose $h = g \circ f$. Montrer que

- f et g injectives implique h injective.
- f et g surjectives implique h surjective.
- h injective implique f injective.
- h injective et f surjective implique g injective.
- h surjective implique g surjective.
- h surjective et g surjective implique f surjective.

7) On rappelle les notations $\mathbb{1}_A$ ou χ_A pour la fonction définie par

$$x \mapsto 1 \text{ si } x \in A, 0 \text{ sinon},$$

appelée selon les auteurs "fonction indicatrice" de l'ensemble A, ou "fonction caractéristique". Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Donner en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ les indicatrices

$$\mathbb{1}_{A\cup B},\ \mathbb{1}_{A\cap B},\ \mathbb{1}_{A^c}.$$

2 Images directe et réciproque

1) Dire si les assertions suivantes sont vraies, auquel cas, les montrer. Si elles sont fausses, donner un contre-exemple, et préciser lorsqu'une égalité a été proposée si l'une des inclusions est quand même vraie.

$$\begin{aligned}
f^{-1}(A\cup B) &= f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B) && (1)\\
f^{-1}(A\cap B) &= f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B) && (2)\\
f^{-1}(\overline{A}) &= \overline{f^{-1}(A)} && (3)\\
f^{-1}(A\Delta B) &= f^{-1}(A)\Delta f^{-1}(B) && (4)\\
f^{-1}(A-B) &= f^{-1}(A)-f^{-1}(B) && (5)
\end{aligned}$$

où A et $B \subset F$.

2) De même, est ce que

$$\begin{aligned}
f(A\cup B) &= f(A)\cup f(B) && (6)\\
f(A\cap B) &= f(A)\cap f(B) && (7)\\
f(\overline{A}) &= \overline{f(A)} && (8)\\
f(A\Delta B) &= f(A)\Delta f(B) && (9)\\
f(A-B) &= f(A)-f(B) && (10)
\end{aligned}$$

où A et $B \subset E$.

3) Tirer de cet exercice un *formulaire* à savoir par coeur.

4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin x$. Définir $f(\mathbb{R}),\ f([0,\pi]),\ f([-\pi/2,\pi/2]),$
$f^{-1}([2,+\infty)),\ f^{-1}([0,1]),\ f^{-1}([-6,0])$.