

## Agrégation. Épreuve de Modélisation : option Calcul scientifique

Suggestions d'illustrations de la notion de conditionnement sur les trois problèmes ci-dessous.

### 1- Résolution des systèmes linéaires.

- 1.1- Comment Maple calcule le conditionnement d'une matrice.
- 1.2- Idem avec Matlab.
- 1.3- Mettre en œuvre la méthode de la puissance voir par exemple L'ouvrage de N. J. Higham, Accuracy and Stability of Numerical Algorithm.
- 1.4- Montrer les variations du conditionnement avec la dimension sur des classes de matrices.

### 2- Calcul d'une racine simple d'un polynôme d'une variable

- 2.1- Comment Matlab calcule des racines de polynômes.
- 2.2- Illustrer le théorème de Rouché.

### 3- Problème des valeurs et vecteurs propres.

- 3.1 - Comment Matlab calcule des valeurs propre et des vecteurs propres.
- 3.2- Illustrer le théorème 5.1.

## Conditionnement : le problème des erreurs en analyse numérique.

### 1. Qu'est-ce qu'un problème.

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. L'ensemble  $E$  est l'ensemble des données et  $F$  l'ensemble des sorties. Un problème est un élément du sous ensemble  $G \subset E \times F$ .

On donne comme exemples les trois problèmes suivants

**1.1. Résolution des systèmes linéaires.** Ici  $E = \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n$  et  $F = \mathbb{C}^n$ . Un problème est défini par

$$G = \{(A, b, x) \in E \times F : Ax - b = 0\}.$$

**1.2. Racine d'un polynôme.** Ici  $E = \mathbb{C}_d[x]$  et  $F = \mathbb{C}$ . Un problème est défini par

$$G = \{(f, x) \in E \times F : f(x) = 0\}.$$

**1.3. Problèmes des valeurs propres et des vecteurs propres.** Ici  $E = \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C}^n)$  et  $F = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$ . Un problème est défini par  $G = \{(A, b, x, \lambda) \in E \times F : Ax - \lambda x, \|x\| = 1\}$ .

**1.4. Modélisation abstraite dans cadre vectoriel.** On se limite au cadre abstrait d'espace vectoriel de dimension finie. En fait dans les exemples ci-dessus,  $G$  est un ensemble qui est défini par :

$$G = \{(x, y) \in E \times F : f(x, y) = 0\}$$

où

$$f : (x, y) \in E \times F \rightarrow f(x, y) \in H.$$

Dans les trois exemples ci-dessus la fonction  $f$  est analytique et on supposera ceci dans la suite. On suppose que  $E, F$  et  $H$  sont des espaces hermitiens (euclidiens) de dimension finie:

$$m = \dim H = \dim F \leq n = \dim E.$$

Chaque espace est munie d'une norme. On notera indifféremment par  $\|x\|$  la norme d'un élément ou par  $\|A\|$  la norme d'un opérateur (multi-)linéaire. Le contexte est suffisamment clair pour éviter toute confusion.

### 2. ANALYSE DIRECTE DES ERREURS

Il s'agit du problème suivant : quelle perturbation sur la sortie  $y$  produit une perturbation de la donnée  $x$ ?

La réponse est donnée par le théorème des fonctions implicites.

**Théorème 2.1.** *Soit une application  $f$  analytique définie d'un ouvert  $O$  de  $E \times F$  dans  $G$ .*

*Soit  $(x_0, y_0) \in O$  tel que*

- 1-  $f(x_0, y_0) = 0$ ,
- 2-  $D_2f(x_0, y_0)$  soit un isomorphisme (rang de  $D_2f(x_0, y_0) = m$ .)

Alors il existe un ouvert  $U_{x_0}$  et une seule application  $\varphi$  analytique définie sur un ouvert  $U_{x_0} \subset E$  dans un ouvert  $V_{y_0} \subset F$  vérifiant :

- 1-  $\varphi(x_0) = y_0$
- 2- Pour tout  $x \in U_{x_0}$  on a  $(x, \varphi(x)) \in U_{x_0} \times V_{y_0}$  et  $f(x, \varphi(x)) = 0$ .
- 3-  $\varphi'(x) = -D_2f(x, \varphi(x))^{-1}D_1f(x, \varphi(x))$ .

L'application de ce théorème pour quantifier l'influence d'une perturbation de la donnée  $x$  sur la sortie  $y$  est la suivante. On écrit

$$\begin{aligned} y - y_0 &= \varphi(x) - \varphi(x_0) = D\varphi(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \\ &= -D_2f(x_0, y_0)^{-1}D_1f(x_0, y_0)(x - x_0) + o(x - x_0). \end{aligned}$$

Au premier ordre on a

$$\|y - y_0\| \leq \|D_2f(x_0, y_0)^{-1}D_1f(x_0, y_0)\| \|x - x_0\| + o(\|x - x_0\|).$$

On peut maintenant préciser la notion de conditionnement d'un problème.

**Définition 2.2.** Soit  $G$  un problème et  $(x, y) \in G$ .

- 1- Un problème est dit bien posé si  $D_2f(x, y)^{-1}$  existe.
- 2- L'opérateur  $K(f; x, y) = -D_2f(x, y)^{-1}D_1f(x, y)$  est appelé l'opérateur de conditionnement.
- 3- Le conditionnement  $C(f; x, y)$  est la norme de  $K(f; x, y)$ .

Cette définition du conditionnement est celle de l'erreur absolue au premier ordre. Dans les applications, c'est la notion d'erreur relative qui est significative. Il s'agit dans ce cas de quantifier  $\frac{\|y - y_0\|}{\|y_0\|}$  à l'aide de  $\frac{\|x - x_0\|}{\|x_0\|}$ .

### 3. CONDITIONNEMENT DE LA RÉOLUTION DES SYSTÈMES LINÉAIRES

Soit  $f : (A, b, x) \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow Ax - b \in \mathbb{C}^n$ .

**Définition 3.1.** Le conditionnement d'une matrice est la quantité

$$K(A) = \|A\| \|A^{-1}\|.$$

On va voir que le conditionnement d'une matrice est relié à l'erreur relative d'un problème de résolution d'un système linéaire.

**Théorème 3.2.** Le problème de la résolution linéaire est bien posé si  $A$  est inversible. Supposons  $A$  inversible et considérons une matrice  $M$  telle que  $\|M - A\| \leq \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ .

- 1-  $M$  est inversible et  $\|M^{-1}A\| \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\| \|M - A\|}$ .

2- Soient  $(A, b, x)$  et  $(M, p, y)$  tels que  $Ax - b = My - p = 0$ . Alors

$$\frac{\|y - x\|}{\|x\|} \leq \frac{K(A)}{1 - K(A) \frac{\|M - A\|}{\|A\|}} \left( K(A) \frac{\|M - A\|}{\|A\|} + \frac{\|p - b\|}{\|b\|} \right).$$

**Preuve.** Le problème est bien posé si  $D_2f(A, b, x)$  est inversible. Or  $D_2f(A, b, x) = A$ .

Montrons que  $M$  est inversible. On a  $A^{-1}M = I + A^{-1}(M - A)$ . Donc  $\|A^{-1}M\| \geq 1 - \|A^{-1}\| \|M - A\| > 0$ . On en déduit le 1.

Majorons l'erreur relative. Puisque  $My - p = Ax - b = 0$  on a

$$\begin{aligned} 0 = My - p &= (A + M - A)(x + y - x) - b - (p - b) \\ &= Ax - b + (M - A)x - (p - b) + A(y - x) + (M - A)(y - x) \\ &= (M - A)x - (p - b) + M(y - x). \end{aligned}$$

Donc  $y - x = M^{-1}A A^{-1}((M - a)x - (p - b))$ . D'autre part  $Ax = b$  et  $\|A\| \|x\| \leq \|b\|$ . On a donc

$$\begin{aligned} \frac{\|y - x\|}{\|x\|} &\leq \|M^{-1}A\| \|A^{-1}\| \|A\| \left( \|M - A\| \|A^{-1}\| + \frac{\|p - b\|}{\|b\|} \right) \\ &\leq \frac{K(A)}{1 - K(A) \frac{\|M - A\|}{\|A\|}} \left( K(A) \frac{\|M - A\|}{\|A\|} + \frac{\|p - b\|}{\|b\|} \right). \end{aligned}$$

□

#### 4. CONDITIONNEMENT D'UNE RACINE D'UN POLYNÔME

Dans cette partie  $p$  et  $q$  désignent des polynômes de degré  $d$  et  $x$  et  $y$  des nombres complexes. On note  $|x|$  la norme de  $x$  et

$$|x|_1 = (1 + |x|^2)^{1/2}.$$

##### Lemme 4.1.

1- L'application

$$(p, q) \rightarrow \sum_{k=0}^d \binom{d}{k}^{-1} p_k \bar{q}_k$$

est un produit scalaire. On le note  $\langle p, q \rangle$ . Soit  $\|p\|$  la norme associée.

2- Pour tout  $k$  on a

$$\frac{p^{(k)}(x) - q^{(k)}(x)}{k!} = \binom{d}{k} \langle p - q, (1 + z\bar{x})^{d-k} \rangle.$$

3-  $\frac{|p^{(k)}(x) - q^{(k)}(x)|}{k!} \leq \binom{d}{k} \|p - q\| |x|_1^{d-k}$ .

Soit  $p = \sum_{k=0}^d p_k x^k$  un polynôme de  $\mathbb{C}_d[x]$  et

$$f : (p, x) \in \mathbb{C}_d[x] \times \mathbb{C} \rightarrow f(p, x) = \sum_{k=0}^d p_k x^k \in \mathbb{C}.$$

**Théorème 4.2.** *Soit  $p$  un polynôme de  $\mathbb{C}_d[x]$  et  $x$  une racine de  $p$ . Le problème  $(p, x)$  tel que  $f(p, x) = 0$  est bien posé si la racine  $x$  de  $p$  est simple. De plus*

$$C(p, x) = \frac{|x|_1^d}{|p'(x)|}.$$

**Preuve.** La dérivée  $D_2 f(p, x) = p'(x)$ . Donc le problème  $(p, x)$  est bien posé si  $f'(x) \neq 0$ , i.e. si  $x$  si une racine simple de  $p$ .

L'opérateur de conditionnement  $K(p, x)$  est égal à :

$$K(p, x)(q) = -D_2 f(p, x) D_1 f(p, x)(q) = -\frac{\sum_{k=0}^d q_k x^k}{p'(x)}.$$

Du lemme 4.1 on déduit

$$\begin{aligned} C(p, x) &= \max_{\|q\|=1} \frac{\left| \sum_{k=0}^d q_k x^k \right|}{|p'(x)|} \\ &= \frac{|x|_1^d}{|p'(x)|}. \end{aligned}$$

□

On montre également

**Théorème 4.3.** *On note par  $S^2$  la sphère de centre  $(0, 1/2)$  et de rayon  $1/2$ . Soit  $V_d = \max_{x_1, \dots, x_d \in S^2} \prod_{1 \leq i < j \leq d} \|x_i - x_j\|$ . on considère un polynôme de degré  $d$  ayant pour zéros  $(z_1, \dots, z_d)$  et  $\zeta$  l'un de ses zéros. On introduit*

$$\bar{z}_i = \frac{(z_i, 1)}{1 + \|z_i\|^2}.$$

Alors

$$C(f, \zeta) \leq \sqrt{d(d+1)} \frac{V_d}{\prod_{1 \leq i < j \leq d} \|\bar{x}_i - \bar{x}_j\|}.$$

**4.1. Majoration de l'erreur absolue.** Soient  $(p, x)$  et  $(q, y)$  tels que  $p(x) = q(y) = 0$ . Le but est d'obtenir une majoration de  $|y - x|$  quand  $q$  est proche de  $p$ .

**Théorème 4.4.** Soit  $a = (1 + |x|_1)^d$ ,  $\epsilon = \frac{a\gamma}{|p'(x)|} \|q - p\|$  avec

$$\gamma := \sup_{k \geq 2} \left( \frac{|p^{(k)}(x)|}{|p'(x)|} \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Alors si  $\epsilon \leq 3 - 2\sqrt{2}$  on a :

$$|y - x| \leq \frac{1 + \epsilon - \sqrt{\epsilon^2 - 6\epsilon + 1}}{4\gamma}.$$

**Preuve.** On écrit  $0 = q(y) = (q - p)(y) + p(y)$ . La formule de Taylor en  $x$  montre que

$$y - x = - \sum_{k=0}^d \frac{p^{(k)}(x) - q^{(k)}(x)}{k! p'(x)} - \sum_{k=2}^d \frac{p^{(k)}(x)}{k!} (y - x)^k.$$

En utilisant le 3 du lemme 4.1 et les notations  $a, \epsilon$  et  $\gamma$  on obtient successivement :

$$\begin{aligned} \gamma |y - x| &\leq \frac{\gamma \|q - p\|}{|p'(x)|} \sum_{k=0}^d \binom{d}{k} |x|_1^{d-k} + \frac{\gamma^2 |y - x|^2}{1 - \gamma |y - x|} \\ &\leq \epsilon + \frac{\gamma^2 |y - x|^2}{1 - \gamma |y - x|}. \end{aligned}$$

Finalement  $u = \gamma |y - x|$  vérifie

$$2u^2 - (1 + \epsilon)u + \epsilon \geq 0.$$

La condition  $\epsilon \leq 3 - 2\sqrt{2}$  permet d'avoir la majoration

$$u \leq \frac{1 + \epsilon - \sqrt{\epsilon^2 - 6\epsilon + 1}}{4}.$$

□

Maintenant on étudie comment quantifier une perturbation  $q$  d'un polynôme  $p$  de telle sorte que  $q$  le même nombre de racine que  $p$  dans une boule donnée. Rappelons le théorème de Rouché.

**Théorème 4.5.** Soient  $p$  et  $q$  deux polynômes de  $\mathbb{C}[z]$ . Si

$$\forall x \in \partial B(x_0, r), \quad \|f(x) - g(x)\| < \|f(x)\|$$

alors les polynômes  $p$  et  $q$  ont le même nombre de racines chacune comptée avec sa multiplicité respective dans  $B(x_0, r)$ .

Le lemme suivant donne le rayon d'une boule qui sépare une racine simple d'un polynôme de ses autres racines.

**Lemme 4.6.** Soit  $x$  une racine simple de  $p$ . Alors  $x$  est l'unique racine de  $p$  dans la boule ouverte  $B\left(x, \frac{1}{2\gamma}\right)$ .

**Théorème 4.7.** Soient  $p$  un polynôme de  $\mathbb{C}_d[x]$  et  $x$  une racine simple de  $p$ . On considère  $r < \frac{1}{2\gamma}$ . Tout polynôme  $q$  vérifiant

$$\|p - q\|(1 + (|x| + r)^2)^d < |p'(x)| \left(1 - \frac{1}{2\gamma}\right)$$

a une unique racine dans la boule ouverte  $B(x, r)$

**Preuve.** Soit  $z$  tel que  $|z - x| = r$ . Du lemme 4.1 on a

$$|p(z) - q(z)| \leq \|p - q\| |z|_1^d \leq \|p - q\|(1 + (|x| + r)^2)^d.$$

D'autre part une minoration de la formule de Taylor de  $p$  en  $x$  donne

$$|p(z)| \geq |p'(x)| \left(1 - \sum_{k \geq 2} \gamma^{k-1} r^k\right) \geq |p'(x)| \frac{\gamma r^2}{1 - \gamma r} \geq |p'(x)| \left(1 - \frac{1}{2\gamma}\right).$$

On sait que  $p$  a une seule racine dans la boule  $B(x, r)$ . Si pour tout  $z \in \partial B(x, r)$  on  $|p(z) - q(z)| < |p(z)|$  alors  $q$  a une seule racine dans  $B(x, r)$ . Ceci est réalisé si

$$\|p - q\|(1 + (|x| + r)^2)^d < |p'(x)| \left(1 - \frac{1}{2\gamma}\right).$$

□

## 5. CONDITIONNEMENT DU PROBLÈME DES VECTEURS PROPRES ET DES VALEURS PROPRES

Soit  $f : (A, \lambda, x) \in \mathcal{M}_{n,n} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \rightarrow (Ax - \lambda x, \|x\|^2/2 - 1) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ . Dans cette partie on note  $M^H$  la transposée conjuguée d'une matrice  $M$ .

**Théorème 5.1.** Le problème  $(A, \lambda, x)$  est bien posé si la valeur propre  $\lambda$  de la matrice  $A$  est simple. Le conditionnement  $C(A, \lambda, x)$  est égal à

$$C(A, \lambda, x) \leq 2\|I - AU_1R^{-1}U_1^H\| + \sqrt{2}\|U_1R^{-1}U_1^H\|,$$

où

- 1-  $U_1$  est une matrice de taille  $n \times n - 1$  telle que  $U = (x, U_1)$  soit une matrice unitaire vérifiant  $U_1^H x = 0$ .
- 2-  $R = U_1(A - \lambda I)U_1^H$ .

**Preuve.** La dérivée  $D_2 f(A, \lambda, x)$  est égale à

$$D_2 f(A, \lambda, x) = \begin{pmatrix} -x & A - \lambda I \\ 0 & x^H \end{pmatrix}$$

Soit  $U = (x, U_1)$  une matrice unitaire tel que  $U_1^H x = 0$ . Alors  $AU = (\lambda x, AU_1)$  et  $U^H(A - \lambda I)U = \begin{pmatrix} 0 & x^H AU_1 \\ 0 & U_1^H(A - \lambda I)U_1 \end{pmatrix}$ . Il s'ensuit

$$\begin{pmatrix} U^H & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D_2 f(A, \lambda, x) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ U & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x^H AU_1 & -1 \\ 0 & U_1^H(A - \lambda I)U_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice précédente est celui de la matrice  $U_1^H(A - \lambda I)U_1$ . Il est non nul si et seulement si  $\lambda$  est valeur propre simple de  $A$ .

Calculons l'inverse de  $D_2 f(A, \lambda, x)$ . Posons  $z = x^H AU_1$  et  $R = U_1^H(A - \lambda I)U_1$ . L'inverse de la matrice  $S = \begin{pmatrix} z & -1 \\ R & 0 \end{pmatrix}$  est égale à

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & R^{-1} \\ -1 & zR^{-1} \end{pmatrix}.$$

De plus  $\begin{pmatrix} 0 & S \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ S^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} D_2 f(A, b, \lambda, x) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ U & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ S^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^H & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & U_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & R^{-1} & 0 \\ -1 & zR^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^H & 0 \\ U_1^H & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x^H + zR^{-1}U_1^H & 0 \\ U_1 R^{-1}U_1^H & x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'opérateur de conditionnement est donc égal à :

$$-D_2 f(A, \lambda, x) D_1 f(A, \lambda, x)(B, \mu, y) = \begin{pmatrix} x^H(I - AU_1 R^{-1}U_1^H Bx) \\ U_1 R^{-1}U_1^H Bx \end{pmatrix}.$$

Le conditionnement  $C(A, \lambda, x)$  est la norme de l'opérateur précédent. Puisque  $\|x\|^2 = 2$ , il vient :

$$C(A, \lambda, x) \leq 2\|I - AU_1 R^{-1}U_1^H\| + \sqrt{2}\|U_1 R^{-1}U_1^H\|.$$

□

## 6. PROLONGEMENT : ANALYSE RETROGRADE DES ERREURS

Considérons un problème bien posé :  $(x_0, y_0) \in G$ . Soit  $y \in Y$  proche de  $y_0$ . La plupart du temps le cardinal de l'ensemble des  $x \in X$  qui satisfont  $(x, y) \in G$  est grand. Le problème est de choisir parmi ces  $x$  celui qui est le plus proche de  $x_0$ .

Précisons cette idée. L'outil pour traiter cette question est l'inverse de Moore-Penrose.

**Définition 6.1.** Soit un opérateur linéaire surjectif  $L$  défini de  $E$  dans  $F$ . L'inverse de Moore-Penrose de  $L$  est l'opérateur  $L^\dagger$  défini de  $F$  dans  $E$  par :

$$L^\dagger = (L|_{(Ker L)^\perp})^{-1}.$$

On montre que

**Proposition 6.2.** 1-  $LL^\dagger = id_F$ .  
2- Pour tout  $x \in (Ker L)^\perp$  on a  $L^\dagger L(x) = x$ .

L'analyse rétrograde des erreurs consiste à définir un opérateur  $\sigma$  dont la dérivée est l'inverse de Moore-Penrose de la dérivée  $K(x, y)$  de  $\varphi(x)$ .

**Théorème 6.3.** Si  $K(x_0, y_0)$  est surjectif il existe un opérateur  $\sigma$  défini de  $V_{y_0} \subset F$  dans  $E$  tel que pour tout  $y \in V_{y_0}$  on ait :

- 1-  $\sigma(y_0) = x_0$ .
- 2-  $\varphi(\sigma(y)) = y$ .
- 3-  $D\sigma(y) = K(x, y)^\dagger$ .

On appelle opérateur de conditionnement inverse du problème  $(x_0, y_0) \in G$  l'inverse de Moore-Penrose  $K(x_0, y_0)^\dagger$ .

La norme de cet opérateur est le conditionnement inverse. On le note

$$C(x_0, y_0)^\dagger = \sup_{y \in Y, \|y\|=1} \frac{\|K(x_0, y_0)^\dagger y\|}{\|y\|}.$$

On a

**Preuve.** La fonction implicite  $\varphi$  est définie sur un ouvert  $U_{x_0}$  dans  $U_{y_0}$ . La fonction  $\varphi_1(z) = \varphi(z + x_0) - y_0$ , définie sur un voisinage de 0, vérifie  $\varphi_1(0) = 0$  et  $D\varphi_1(0) = K(x_0, y_0)$ . Puisque cette dérivée est surjective,  $\varphi_1$  est une submersion. On sait alors qu'il existe un difféomorphisme  $h$  défini dans un voisinage de 0 de  $E$  tel que :

- 1-  $h(0) = 0$ ,
- 2-  $Dh(0) = id_E$ ,
- 3-  $\varphi_1 = K(x_0, y_0) \circ h$ .

L'application  $\sigma_1 = h^{-1} \circ K(x_0, y_0)^\dagger$  vérifie :

- 1-  $\sigma_1(0) = 0$ ,
- 2-  $\varphi_1(\sigma_1(w)) = w$  pour tout  $w$  dans un voisinage du zéro de  $F$ .
- 3-  $D\sigma_1(y_0) = K(x_0, y_0)^\dagger$ .

Maintenant la fonction  $\sigma(w + y_0) = x_0 + \sigma_1(w)$  est définie dans  $V_{y_0}$  et vérifie :

- 1-  $\sigma(y_0) = x_0$ ,
- 2-  $\varphi(\sigma(y)) = \varphi(\sigma(w + y_0)) = \varphi(x_0 + \sigma_1(w)) = y_0 + \varphi_1(\sigma_1(w)) = y_0 + w = y$  pour tout  $w$  dans un voisinage du zéro de  $F$ .
- 3-  $D\sigma(y_0) = D\sigma_1(y_0) = K(x_0, y_0)^\dagger$ .

□

**Théorème 6.4.** *Pour tout opérateur  $\delta$  défini sur  $V_{y_0}$  dans  $U_{x_0}$  vérifiant  $\delta(y_0) = x_0$  et  $\varphi(\delta(y)) = y$  pour tout  $y \in V_{y_0}$  on a :*

$$C(x_0, y_0)^\dagger = \|K(x_0, y_0)^\dagger\| \leq \|D\delta(y_0)\|.$$

**Preuve.** Pour tout  $w \in Y$  on a  $D\delta(y_0)w = (D\delta(y_0) - D\sigma(y_0))w + D\sigma(y_0)w$ . Si  $D\sigma(y_0)w \in \text{Ker } K(x_0, y_0)^\perp$  et  $(D\delta(y_0) - D\sigma(y_0))w \in \text{Ker } K(x_0, y_0)$  alors

$$\|D\delta(y_0)w\|^2 = \|(D\delta(y_0) - D\sigma(y_0))w\|^2 + \|D\sigma(y_0)w\|^2 \geq \|D\sigma(y_0)w\|^2.$$

Et le résultat suit.

Puisque  $D\sigma(y_0) = K(x_0, y_0)^\dagger$  on a  $D\sigma(y_0)w \in \text{Ker } K(x_0, y_0)^\perp$ .

Il reste à montrer que  $(D\delta(y_0) - D\sigma(y_0))w \in \text{Ker } K(x_0, y_0)$ . Pour tout  $y \in V_{y_0}$  on sait que :  $y = \phi(\delta(y)) = x_0 + K(x_0, y_0)(h(\delta(y) - x_0))$ . Donc  $id_Y = K(x_0, y_0) \circ Dh(0) \circ D\delta(y_0) = K(x_0, y_0) \circ D\delta(y_0)$ . Or  $K(x_0, y_0)D\sigma(y_0) = K(x_0, y_0) \circ K(x_0, y_0)^\dagger = id_Y$ . On en déduit  $K(x_0, y_0)(D\delta(y_0) - D\sigma(y_0))w = 0$ . Ce qui implique  $(D\delta(y_0) - D\sigma(y_0))w \in \text{Ker } K(x_0, y_0)$ .  $\square$

**Théorème 6.5.** *On suppose que  $E$  et  $F$  sont des espaces euclidiens. On note par  $u^T v$  le produit scalaire sur  $E$  ou  $F$  suivant le contexte. On considère pour  $y$  donné le problème d'optimisation :*

$$\min_{(x,y) \in G} \frac{1}{2} \|x - x_0\|^2$$

*Il existe une fonction  $\delta$  définie sur un voisinage de  $V_{y_0}$  dans  $E$  telle que :*

- 1-  $\delta(y_0) = x_0$ .
- 2-  $\delta(y)$  est solution du problème d'optimisation.
- 3-  $D\delta(y_0) = K(x_0, y_0)^\dagger$ .

**Preuve.** Considérons le lagrangien

$$L(x, \lambda) = \frac{1}{2} \|x - x_0\|^2 + (\varphi(x) - y)^T \lambda$$

Alors la solution  $x$  du problème d'optimisation est aussi solution du système :

$$\begin{aligned} \varphi(x) - y &= 0 \\ x - x_0 + D\varphi(x)^T \lambda &= 0. \end{aligned}$$

L'image de  $D\sigma(x)^T$  est égal à l'orthogonal du noyau de  $D\varphi(x)$ . Donc  $x - x_0 \in (\text{Ker } D\varphi(x))^\perp$   $\square$