Jean-Pierre Dedieu
Jean-Claude Yakoubsohn

SUITES NUMÉRIQUES : UNE INTRODUCTION

MIP, Département de Mathématiques
Université Paul Sabatier

31062 Toulouse cedex 04
dedieu@mip.ups-tlse.fr
yak@mip.ups-tlse.fr

Table des Matières

1. Nombres réels

Le résultat essentiel de ce chapitre est le suivant :

Théorème 1 *L'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$, est un corps commutatif, totalement ordonné, archimédien et satisfaisant à l'axiome de la borne supérieure.*

La suite consiste à fixer le vocabulaire et à expliquer chaque notion introduite dans ce théorème.

1.1 Structure algébrique.

On note

1- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ les entiers naturels,

2- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ les entiers relatifs,

3- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \,:\, p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N},\, q \neq 0\}$ les nombres rationnels.

ainsi que $\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*$ les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ privés de 0. On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Definition 1 $(\mathbb{R}, +, \times)$ *est un corps commutatif contenant* $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$. *C'est à dire que, pour tout* $a, b, c \in \mathbb{R}$, *on a :*

$$\begin{array}{cc}
(\mathbb{R}, +) \text{ groupe commutatif} & (\mathbb{R}^*, \times) \text{ groupe commutatif} \\
a + b = b + a & ab = ba \\
a + (b + c) = (a + b) + c & a(bc) = (ab)c \\
a + 0 = 0 + a = a & a \times 1 = 1 \times a = a \\
a + (-a) = (-a) + a = 0 & a \times a^{-1} = a^{-1}a = 1,\ (a \neq 0)
\end{array}$$

$$a(b + c) = ab + bc$$

1.2 Relation d'ordre.

Definition 2 $(\mathbb{R}, \leq)$ *est totalement ordonné : c'est à dire que, pour tout* $a, b, c \in \mathbb{R}$, *la relation* $\leq$ *vérifie:*

$$\begin{array}{cc} a \leq a, & \textit{réflexivité} \\ a \leq b \text{ et } b \leq a \Rightarrow a = b & \textit{antisymétrie} \\ a \leq b \text{ et } b \leq c \Rightarrow a \leq b & \textit{transitivité} \\ a \leq b \text{ ou } b \leq a & \textit{ordre total} \end{array}$$

et elle est compatible avec l'addition et la multiplication :

$$a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$$
$$a \leq b \text{ et } c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc.$$

Definition 3 *On appelle intervalle tout ensemble* I *tel que, pour tout* $x, y \in I$ *et pour tout* $z \in \mathbb{R}$

$$x \leq z \leq y \Rightarrow z \in I.$$

On appelle

1- Intervalles fermés : $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, a]$, $\mathbb{R}$, $\emptyset$.

2- Intervalles ouverts : $]a, b[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, a[$, $\mathbb{R}$, $\emptyset$.

3- $]a, b]$ *et* $[a, b[$ *ne sont ni ouverts, ni fermés.*

Exemples de nombres réels remarquables.

1- $\sqrt{2}$: rapport de la diagonale d'un carré à son coté.

2- $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$: nombre d'or, c'est la solution positive de $x^2 - x - 1 = 0$. C'était, dans la Grèce antique, le rapport idéal entre le grand côté et le petit côté d'un rectangle.

3- π : rapport du périmètre d'un cercle à son diamètre.

4- e : base des logarithmes népériens.

1.3 L'axiome de la borne supérieure.

Definition 4 *Soit* A *une partie de* $\mathbb{R}$ *et soit* $a \in \mathbb{R}$. *On dit que*

- a *est un* **majorant** *de* A *si pour tout* $x \in A$ *on a* $x \leq a$,
- a *est un* **minorant** *de* A *si pour tout* $x \in A$ *on a* $a \leq x$,
- A *est* **majoré** *s'il a un majorant,*

- *A est* **minoré** *s'il a un minorant,*
- *A est* **borné** *s'il est majoré et minoré.*

Exemple 1 *L'intervalle $]0,1]$ est borné : -2 est un minorant, 2 est un majorant.*

Proposition 1 *Lorsque A est majoré et non-vide, l'ensemble des majorants de A est un intervalle illimité à droite.*

Axiome 1 *Lorsque A est majoré et non-vide, l'ensemble des majorants de A est du type $[M,+\infty[$. On appelle M la* **borne supérieure** *de A. On la note $M = \sup(A)$.*

Proposition 2 *Lorsque A est minoré et non-vide, l'ensemble des minorants de A est du type $]-\infty, m]$. On appelle m la* **borne inférieure** *de A. On la note $m = \inf(A)$.*

Definition 5 *Si la borne supérieure M (resp. inférieure m) de A est dans A on l'appelle le* **maximum** *ou le* **plus grand élément** *de A (resp. le* **minimum** *ou le* **plus petit élément** *de A). On note alors $M = \max(A)$ (resp. $m = \min(A)$).*

Exemple 2 *L'ensemble des majorants de $]0,1[$ est l'intervalle $[1,+\infty[$. Ainsi, $\sup\,]0,1[= 1$ et $\max\,]0,1[$ n'existe pas. L'ensemble des majorants de $]0,1]$ est l'intervalle $[1,+\infty[$ mais cette fois-ci $\max\,]0,1] = 1$.*

Deux caractérisations de la borne supérieure sont données par les propositions suivantes.

Proposition 3 *Soit A une partie majorée et non vide de $\mathbb{R}$. Il y a équivalence entre*

1- $M = \sup A$.

2- M est le plus petit des majorants de A.

Proposition 4 *Soit A une partie majorée et non vide de $\mathbb{R}$. Il y a équivalence entre*

1- $M = \sup A$,

2- M est un majorant de A et, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $M - \epsilon < x$.

Preuve. Montrons que 1 implique 2. Supposons que $M = \sup A$. C'est donc un majorant de A. Supposons que pour un certain $\epsilon > 0$ il n'existe pas $x \in A$ tel que $M - \epsilon < x$. On a donc $x \leq M - \epsilon$ pour tout $x \in A$. Mais alors $M - \epsilon$ est un majorant de A strictement plus petit que M ce qui est impossible.

Montrons que 2 implique 1. Notons que M est un majorant de A et supposons que M ne soit pas la borne supérieure. Soit N cette borne supérieure. On a $N < M$. Prenons $\epsilon = M - N > 0$. Par hypothèse, il existe $x \in A$ tel que $M - \epsilon < x$. Ceci donne $M - \epsilon = M - (M - N) = N < x$ et N n'est pas un majorant de A : absurde, ce qui achève la preuve. □

On a une proposition similaire pour la borne inférieure.

Proposition 5 *Soit A une partie minorée et non vide de $\mathbb{R}$. Il y a équivalence entre*

1- $m = \inf\ A$

2- m est le plus grand des minorants de A,

2- m est un minorant de A et, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $m + \epsilon < x$.

1.4 $\mathbb{R}$ est archimédien.

Proposition 6 *$\mathbb{R}$ est archimédien, c'est à dire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x < n$.*

Preuve. Si $x \leq 0$ on prend $n = 1$. Supposons que $x > 0$. L'ensemble $A = \{k \in \mathbb{N} \,:\, k \leq x\}$ est majoré par x et contient 0. Nous pouvons donc considérer sa borne supérieure $M = \sup A$. Prenons $\epsilon = 1/2$. D'après la proposition 4 il existe $k \in A$ tel que $M - 1/2 < k \leq M$ de sorte que $M < M + 1/2 < k + 1$ et que $k + 1 \notin A$ (sans quoi M ne serait pas le supremum de A). Ainsi, $k + 1 > x$ et on prend $n = k + 1$. □

C'est l'existence d'une borne supérieure qui permet, dans la preuve précédente, la construction de n.

Corollaire 1 *Entre deux réels il y a toujours un rationnel : pour tout x et $y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$, il existe un rationnel p/q tel que $x < p/q < y$. On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Preuve. Par la proposition 6, il existe un entier $q > 0$ tel que $1/(y - x) < q$ ainsi qu'un entier $n > 0$ tel que $qx < n$. L'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N}^* \,:\, qx < n\}$ est minoré par 1 et non vide : il possède une borne inférieure $p = \inf\ A$. On a donc $p-1 \leq qx < p$ de sorte que $qx < p \leq qx+1$ et $x < p/q \leq x+1/q < y$ par la première inégalité. □

1.5 Partie entière, valeur absolue.

Definition 6 *On appelle partie entière de $x \in \mathbb{R}$ la quantité*

$$E(x) = \max\ \{n \in \mathbb{Z} \,:\, n \leq x\}.$$

Par exemple, $E(2.5) = 2$ et $E(-2.5) = -3$.

Definition 7 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $x_+ = \max\ (x, 0)$ et $x_- = \max\ (-x, 0)$. Notons que $x = x_+ - x_-$. On appelle valeur absolue de x la quantité*

$$|x| = x_+ + x_-.$$

Une définition équivalente est la suivante :

$$|x| = x \text{ si } x \geq 0 \text{ et } |x| = -x \text{ si } x \leq 0.$$

Proposition 7 *Pour tout x et $y \in \mathbb{R}$ on a :*

1- $|x| \geq 0$,

2- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

3- $|x + y| \leq |x| + |y|$,

4- $\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x + y|$,

5- $|xy| = |x|\,|y|$.

2. Suites numériques : définitions et exemples.

2.1 Définitions

Definition 8 *Une suite numérique est une application* $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Au lieu de $u(n)$ on note u_n l'image de n par l'application u et $u = (u_n)_{n\geq 0}$.

Remarque 1 *Toutes les suites n'ont pas* $\mathbb{N}$ *comme domaine de définition, ainsi la suite* $(1/n)_{n\geq 1}$. *Plus généralement on peut considérer* $u = (u_n)_{n\geq n_0}$. *Le fait de supposer* $n_0 = 0$ *n'est pas une perte de généralité: il suffit de considérer la suite* $v = (u_{n+n_0})_{n\geq 0}$.

Il y a plusieurs manières de définir une suite :

- explicitement : $u_n = 1/n$ pour $n > 1$.
- par récurrence : $u_0 = 1$, $u_n = u_{n-1} + 1$.
- par une propriété : u_n est le $n^{\text{ème}}$ nombre premier.

Definition 9 *Deux suites* u *et* v *sont égales si* $u_n = v_n$ *pour tout* n.

On introduit différents types de suites.

Definition 10

- **Suite nulle :** $0 := (0)_{n\geq 0}$,
- **Suite unité :** $1 := (1)_{n\geq 0}$,
- **Suite constante :** *il existe* $a \in \mathbb{R}$ *tel que* $u_n = a$ *pour tout* n,
- **Suite stationnaire :** *il existe* $a \in \mathbb{R}$ *et* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $u_n = a$ *pour tout* $n \geq n_0$,
- **Suite majorée :** *il existe* $a \in \mathbb{R}$ *tel que* $u_n \leq a$ *pour tout* n,
- **Suite minorée :** *il existe* $a \in \mathbb{R}$ *tel que* $a \leq u_n$ *pour tout* n,
- **Suite bornée :** *suite majorée et minorée,*
- **Suite périodique :** *il existe un entier* m *tel que* $u_{m+n} = u_n$ *pour tout* n,

- **Suite croissante :** *pour tout* $n \geq 0$ *on a* $u_n \leq u_{n+1}$,

- **Suite décroissante :** *pour tout* $n \geq 0$ *on a* $u_{n+1} \leq u_n$,

- **Sous-suite :** *une suite* v *est une sous-suite d'une suite* u *si* $v = u \circ \sigma$ *où* σ *est une application strictement croissante de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$. *On note* $v = u_\sigma$ *et* $v_n = u_{\sigma(n)}$.

Exemples.

1- La suite $(1/n)_{n\geq 1}$ est majorée par 1 et minorée par 0.
2- La suite $(1/n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
3- La suite $(n^2)_{n\geq 0}$ est croissante.
4- La suite $(\sin \frac{2n\pi}{3})_{n\geq 0}$ est de période 3.
5- Les suites $(2n)_{n\geq 0}$ et $(2n+1)_{n\geq 0}$ sont des sous-suites de la suite $u = (n)_{n\geq 0}$. Ce sont respectivement $(u_{2n})_{n\geq 0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geq 0}$.
6- $(u_1, u_5, u_2, u_7, \ldots)$ n'est pas une sous-suite de u.

2.2 Opérations

Soient $u = (u_n)_{n\geq 0}$ et $v = (v_n)_{n\geq 0}$. On définit les opérations suivantes :

- somme : $u + v = (u_n + v_n)_{n\geq 0}$

- multiplication par un réel λ : $\lambda u = (\lambda u_n)_{n\geq 0}$

- produit : $uv = (u_n v_n)_{n\geq 0}$

- quotient : $u/v = (u_n/v_n)_{n\geq 0}$ sous la condition $v_n \neq 0$ pour tout n.

Théorème 2 *L'ensemble des suites numériques est une algèbre sur* $\mathbb{R}$ *c'est à dire que les opérations* $u + v$, λu *et* uv *vérifient :*

$$\begin{array}{ccc}
u+v=v+u & \lambda(\mu u)=(\lambda\mu)u & uv=vu \\
u+(v+w)=(u+v)+w & \lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v & u(vw)=(uv)w \\
u+0=u & (\lambda+\mu)u=\lambda u+\mu u & 1\,u=u \\
u+(-u)=0 & 1\,u=u & u(v+w)=uv+uw
\end{array}$$

où u, v, w *désignent des suites,* λ *et* μ *des nombres réels.*

Remarque 2 *Les axiomes de la première colonne sont ceux d'un groupe commutatif, ceux des deux premières colonnes caractérisent un espace vectoriel, les axiomes des colonnes 1 et 3 sont ceux d'un anneau commutatif.*

2.3 Le principe de récurrence

Ce principe fondamental repose sur la propriété suivante : *tout sous-ensemble non-vide de* $\mathbb{N}$ *possède un plus petit élément.* Cette propriété fondamentale de l'ensemble des entiers naturels est admise sans démonstration.

Théorème 3 *Soit* $P_0, \ldots, P_n, \ldots$ *une suite de propriétés. Si*

1- P_0 *est vraie,*

2- Pour tout $n \geq 0$, $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

alors, pour tout $n \geq 0$, P_n *est vraie.*

Preuve. Supposons que P_n soit fausse pour un certain entier $n > 0$. Introduisons $A = \{k \in \mathbb{N} : P_k\ est\ fausse\}$. L'ensemble A est non vide par hypothèse, il possède donc un plus petit élément $m > 0$. On sait que m est le plus petit entier pour lequel P_m est fausse, donc P_{m-1} est vraie. Par hypothèse P_{m-1} implique P_m de sorte que P_m est vraie ... et l'on aboutit à une contradiction. □

Remarque 3 *Il faut bien faire la différence entre le fait que* P_n *et* P_{n+1} *soient vraies et le fait que* $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ *est vraie. Par exemple* $(x = y) \Rightarrow (x + 1 = y + 1)$ *est vraie quels que soient les nombres réels* x *et* y*. En particulier* $(2 = 2) \Rightarrow (3 = 3)$ *mais aussi* $(2 = 4) \Rightarrow (3 = 5)$ *sont vraies toutes deux.*

Comment prouve-t-on qu'une implication $P \Rightarrow Q$ *est vraie ? On utilise la méthode de l'hypothèse auxilliaire ! Cela consiste à supposer que* P *est vraie et à prouver, à l'aide de cette hypothèse supplémentaire, que* Q *est vraie elle aussi.*

Exemple.

Soit a un nombre réel tel que $a > 0$. Montrons que

$$an < (1 + a)^n$$

pour tout $n \geq 0$. Pour $n = 0$ on a bien $0 < (1 + a)^0 = 1$. Notons aussi que

$$1 \leq (1 + a)^n.$$

Montrons que $an < (1 + a)^n$ implique $a(n + 1) < (1 + a)^{n+1}$. Puisque $an < (1 + a)^n$ on a

$$a(n + 1) = an + a < (1 + a)^n + a(1 + a)^n = (1 + a)^{n+1}.$$

2.4 Suites classiques

2.4.1 Suites arithmétiques

$$u_{n+1} = u_n + b,\ n \geq 0.$$

b est la raison et $u_n = u_0 + nb$.

2.4.2 Suites géométriques

$u_{n+1} = au_n$ d'où $u_n = a^n u_0$.

2.4.3 Suites arithmético-géométriques

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

On obtient par récurrence

$$u_n = a^n u_0 + b \sum_{i=0}^{n-1} a^i.$$

2.4.4 Séries géométriques.

$$S_0 = 1,\ S_n = S_{n-1} + a^n.$$

Si $a \neq 1$ alors

$$S_n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

et si $a = 1$ on a $S_n = n + 1$.

2.4.5 Suites linéaires d'ordre 2.

Pour a et $b \in \mathbb{R}$ donnés, on définit

$$u_0 = a,\ u_1 = b,\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,\ n \geq 0.$$

2.4.6 Itérations successives

Soit $f : I \to I$ avec $I \subset \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$ donné. On pose

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

pour tout $n \geq 0$.

3. Limite d'une suite.

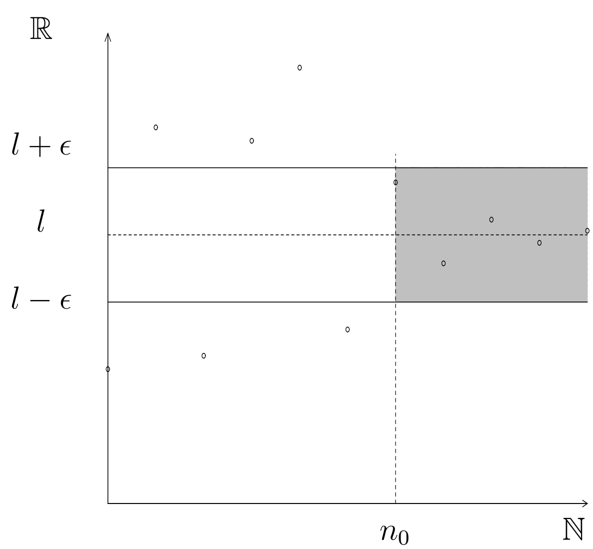
3.1 Définitions

Definition 11 *On dit que la suite* $u = (u_n)_{n\geq 0}$ *admet une limite* l *quand* n *tend vers l'infini si pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe un entier* $n_0 \geq 0$ *tel que pour tout* $n \geq n_0$ *on a*

$$|u_n - l| \leq \epsilon.$$

On dit aussi que la suite u *converge vers* l *ou encore que la suite* u *est convergente et on note*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$$



La convergence d'une suite se traduit graphiquement par l'appartenance des points de coordonnées (n, u_n) à la bande du plan hachurée sur la figure ci-dessus pour tout $n \geq n_0$.
En termes d'opérateurs logiques la limite d'une suite se définit ainsi:

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \Leftrightarrow (\forall\epsilon > 0)\ \ (\exists n_0 \geq 0)\ \ (\forall n \geq n_0)\ \ |u_n - l| \leq \epsilon.$$

Exemple. Montrons que la suite de terme général $u_n = \dfrac{n+1}{n}$ a pour limite 1. Soit $\epsilon > 0$. Montrons qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait

$$|u_n - 1| = \left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| = \frac{1}{n} \leq \epsilon.$$

Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe n_0 tel que $\frac{1}{\epsilon} \leq n_0$. Tout entier $n \geq n_0$ satisfait

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \epsilon.$$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

Remarque 4 *L'entier n_0 dépend de ϵ. Ainsi dans l'exemple précédent on peut prendre $n_0 = E(1/\epsilon) + 1$. Si $\epsilon = 0.1$ on peut choisir $n_0 = 10$, pour $\epsilon = 0.01$ l'entier $n_0 = 100$ convient.*

Théorème 4 *La limite d'une suite convergente est unique.*

Preuve. Supposons qu'une suite convergente u admette deux limites $l_1 \neq l_2$. Soit $\epsilon = \dfrac{|l_1 - l_2|}{4} > 0$. Il existe n_1 tel que

$$n \geq n_1 \Rightarrow |u_n - l_1| \leq \epsilon$$

et de façon similaire il existe n_2 tel que

$$n \geq n_2 \Rightarrow |u_n - l_2| \leq \epsilon.$$

Pour $n = \max\{n_1, n_2\}$ on a

$$|l_1 - l_2| = |(l_1 - n) - (l_2 - n)| \leq |l_1 - u_n| + |l_2 - u_n| \leq 2\epsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2}$$

ce qui n'est pas possible si $l_1 \neq l_2$. Donc $l_1 = l_2$. □

Théorème 5 *La convergence d'une suite et la valeur de sa limite ne dépendent pas des premiers termes de la suite.*

Preuve. Si $v_n = u_n$ pour tout $n \geq n_1$ et si $\lim u_n = l$ c'est à dire si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \geq 0,\ n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon$$

alors, pour tout $\epsilon > 0$, si l'on prend $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ on aura

$$|v_n - l| = |u_n - l| \leq \epsilon$$

et donc $\lim v_n = l$. □

Proposition 8 *Toute suite convergente est bornée.*

Preuve. Soit $\epsilon = 1$. Il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $|u_n - l_1| \leq 1$ de sorte que

$$l - 1 \leq u_n \leq l + 1.$$

Notons

$$a = \min_{0 \leq k \leq n_0 - 1} u_k \quad et \quad b = \max_{0 \leq k \leq n_0 - 1} u_k.$$

de sorte que, pour tout $k \geq n_0 - 1$,

$$a \leq u_k \leq b.$$

On réunit ces deux inégalités en

$$\min(a, l-1) \leq u_k \leq \max(l+1, b)$$

pour tout $k \geq 0$, et donc la suite u est bornée. □

Remarque 5 *Toute suite bornée n'est pas convergente. Il suffit de considérer $u_n = (-1)^n$. Mais on verra que toute suite bornée possède une sous-suite convergente.*

Terminons cette section en soulignant que les techniques de preuve reposent en grande partie sur l'encadrement

$$|x| - |y| \leq |\, x - y \,| \leq |x| + |y|$$

et l'équivalence de

$$|x - y| \leq a$$

et de

$$y - a \leq x \leq y + a.$$

3.2 Opérations et limites

Proposition 9 *Soient $u = (u_n)_{n \geq 0}$ et $v = (v_n)_{n \geq 0}$ deux suites convergentes. Alors,*

1- *La suite $u + v$ est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n + \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$,*

2- *La suite uv est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n v_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$,*

3- *Sous la condition $u_n \neq 0$ pour tout n et $\lim_{n \to +\infty} u_n \neq 0$, la suite $1/u$ est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n}$,*

4- *La suite λu est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda u_n = \lambda \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.*

5- La suite $|u|$ *est convergente et* $\lim_{n\to+\infty}|u_n| = \left|\lim_{n\to+\infty} u_n\right|$,

6- $\lim_{n\to+\infty}|u_n| = 0$ *si et seulement si* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Preuve. Soient $\epsilon, \epsilon_1, \epsilon_3$ trois nombres réels strictement positifs. Notons par l_1 et l_2 les limites des suites u et v respectivement. Notons n_1 et n_2 des entiers associés aux suites u et v pour lesquels

$$\begin{aligned} n \geq n_1 &\Rightarrow |u_n - l_1| \leq \epsilon_1, \\ n \geq n_2 &\Rightarrow |v_n - l_2| \leq \epsilon_2. \end{aligned}$$

1- Prenons $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon/2$ et soit $n \geq \max(n_1, n_2)$. Alors

$$\begin{aligned} |u_n + v_n - (l_1 + l_2)| &\leq |u_n - l_1| + |v_n - l_2| \\ &\leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \end{aligned}$$

d'où le 1.

2- Puisque v converge, v est bornée. Soit $a > 0$ tel que $|v_n| \leq a$ pour tout n. Soient $\epsilon_1 = \dfrac{\epsilon}{2a}$, $\epsilon_2 = \dfrac{\epsilon}{2\max(1, |l_1|)}$ et soit $n \geq \max(n_1, n_2)$. Alors

$$\begin{aligned} |u_n v_n - l_1 l_2| &= |(u_n - l_1)v_n + l_1(v_n - l_2)| \\ &\leq |u_n - l_1||v_n| + |v_n - l_2|\,|l_1| \\ &\leq |u_n - l_1|\,a + |v_n - l_2|\,\max(1, |l_1|) \\ &\leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \end{aligned}$$

d'où le 2.

3- Puisque u converge vers $l_1 \neq 0$, pour $\epsilon = |l_1|/2$, il existe $n_0 > 0$ tel que

$$|u_n - l_1| \leq |l_1|/2$$

pour tout $n \geq n_0$. On en déduit que

$$\frac{|l_1|}{2} \leq |u_n|$$

pour tout $n \geq n_0$. Soient $\epsilon > 0$ donné et $\epsilon_1 = \dfrac{\epsilon l_1^2}{2}$. Pour tout $n \geq \max(n_1, n_0)$ on a

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l_1}\right| = \frac{|u_n - l_1|}{|u_n|\,|l_1|} \leq \frac{2|u_n - l_1|}{l_1^2} \leq \frac{2\epsilon_1}{l_1^2} = \epsilon$$

d'où le 3.

4- Soient $\epsilon_1 = \dfrac{\epsilon}{\max(1, |\lambda|)}$ et $n \geq n_1$. Alors

$$|\lambda u_n - \lambda l| = |\lambda|\,|u_n - l| \leq |\lambda| \frac{\epsilon}{\max(1, |\lambda|)} \leq \epsilon$$

d'où le 4.

5- Soient $\epsilon_1 = \epsilon$ et $n \geq n_1$. Alors

$$\big|\,|u_n| - |l|\,\big| \leq |u_n - l| \leq \epsilon$$

d'où le 5.

6- C'est une conséquence du 5.

□

3.3 Limites et relation d'ordre

Proposition 10 *Si pour deux suites convergentes u et v on a $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq 0$ alors*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Preuve. Soient l_1 et l_2 les limites de u et v respectivement. Raisonnons par l'absurde et supposons que $l_1 > l_2$. Soit $2\epsilon < l_1 - l_2$, n_1 et n_2 les entiers pour lesquels

$$\begin{aligned} n \geq n_1 &\Rightarrow |u_n - l_1| \leq \epsilon, \\ n \geq n_2 &\Rightarrow |v_n - l_2| \leq \epsilon \end{aligned}$$

et soit $n \geq \max(n_1, n_2)$. On a

$$\begin{aligned} &l_1 - \epsilon \leq u_n \leq l_1 + \epsilon, \\ &l_2 - \epsilon \leq v_n \leq l_2 + \epsilon, \\ &u_n \leq v_n, \end{aligned}$$

mais puisque $2\epsilon < l_1 - l_2$ on obtient

$$v_n \leq l_2 + \epsilon < l_1 - \epsilon \leq u_n$$

ce qui contredit $u_n \leq v_n$. □

Remarque 6 *Cette propriété subsiste si l'inégalité $u_n \leq v_n$ n'est satisfaite que pour tout $n \geq n_0$.*
Les inégalités strictes ne passent pas à la limite. Par exemple $1/(2n) < 1/n$ pour tout $n > 0$ mais $\lim 1/(2n) = \lim 1/n = 0$.

Le théorème d'encadrement suivant se déduit du précédent :

Théorème 6 *Soient trois suites u, v et w et un entier n_0 tels que*

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

pour tout $n \geq n_0$. Si u et w convergent vers la même limite l, alors la suite v converge aussi vers l.

Preuve. Soit $\epsilon > 0$ et soient n_1 et n_2 des entiers pour lesquels

$$n \geq n_1 \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon,$$
$$n \geq n_2 \Rightarrow |w_n - l| \leq \epsilon.$$

Pour tout $n \geq \max(n_0, n_1, n_2)$, $u_n \leq v_n \leq w_n$ implique $u_n - l \leq v_n - l \leq w_n - l$ et les deux inégalités $-\epsilon \leq u_n - l \leq \epsilon$ et $-\epsilon \leq w_n - l \leq \epsilon$ donnent :

$$-\epsilon \leq u_n - l \leq v_n - l \leq w_n - l \leq \epsilon.$$

Donc $-\epsilon \leq v_n - l \leq \epsilon$ et $|v_n - l| \leq \epsilon$. $\square$

4. Limites infinies

4.1 La droite réelle achevée

On adjoint à $\mathbb{R}$ deux nouveaux éléments que l'on note $+\infty$ et $-\infty$.

Definition 12 *La droite réelle achevée est l'ensemble*

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}.$$

On prolonge les quatre opérations dans $\bar{\mathbb{R}}$ par :

$+$	$-\infty$	x	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	ND
y	$-\infty$	$x+y$	$+\infty$
$+\infty$	ND	$+\infty$	$+\infty$

$-$	$-\infty$	x	$+\infty$
$-\infty$	ND	$-\infty$	$-\infty$
y	$+\infty$	$y-x$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	ND

$\times$	$-\infty$	$u<0$	0	$v>0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	ND	$-\infty$	$-\infty$
$x<0$	$+\infty$	xu	0	xv	$-\infty$
0	ND	0	0	0	ND
$y>0$	$-\infty$	yu	0	yv	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	ND	$+\infty$	$+\infty$

$/$	$-\infty$	$u<0$	0	$v>0$	$+\infty$
$-\infty$	ND	$+\infty$	ND	$-\infty$	ND
$x<0$	0	x/u	ND	x/v	0
0	0	0	ND	0	0
$y>0$	0	y/u	ND	y/v	0
$+\infty$	ND	$-\infty$	ND	$+\infty$	ND

où ND signifie *non défini*. La relation d'ordre $\leq$ est prolongée par :

$$-\infty < x < +\infty \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Insistons sur le fait que les formes suivantes sont **indéterminées :**

1- $(+\infty) + (-\infty)$,

2- $(+\infty) - (+\infty)$,

3- $(-\infty) - (-\infty)$,

4- $0(+\infty)$ et $0(-\infty)$,

5- $x/0$ pour $x \in \bar{\mathbb{R}}$,

6- $\pm\infty / \pm\infty$.

Notons que la *règle des signes* qui régit le signe d'un produit ou d'un quotient de deux nombres réels est respectée dans $\bar{\mathbb{R}}$. Une conséquence de l'axiome de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$ est la proposition suivante.

Proposition 11 *Toute partie non-vide $A \subset \mathbb{R}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\bar{\mathbb{R}}$. Cette borne supérieure (resp. inférieure) est dans $\mathbb{R}$ lorsque A est majoré (resp. minoré) et vaut $+\infty$ (resp. $-\infty$) sinon.*

4.2 Limites infinies

Definition 13 *On dit qu'une suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout $A > 0$ il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que $u_n \geq A$ pour tout $n \geq n_0$.*

On note alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

En utilisant des quantificateurs cette définition s'écrit

$$(\forall A > 0) \ \ (\exists n_0 \in \mathbb{N}) \ \ (\forall n \geq n_0) \ \ u_n \geq A.$$

Definition 14 *On dit qu'une suite u a pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout $A > 0$ il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que $u_n \leq -A$ pour tout $n \geq n_0$.*

Cela se note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty.$$

En utilisant des quantificateurs cette définition devient

$$(\forall A > 0) \ \ (\exists n_0 \in \mathbb{N}) \ \ (\forall n \geq n_0) \ \ u_n \leq -A.$$

Exemple. La suite $(n^2)_{n\geq 0}$ tend vers $+\infty$. Soit $A > 0$ donné. Alors pour tout $n \geq n_0 = E(\sqrt{A}) + 1$ on a $u_n \geq (E(\sqrt{A}) + 1)^2 \geq A$.

4.3 Opérations sur les limites.

Théorème 7 *Soient u et v deux suites convergentes, l_1 et l_2 leurs limites respectives dans $\bar{\mathbb{R}}$. Si les opérations envisagées sur l_1 et l_2 sont définies on a :*

1- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n + v_n = l_1 + l_2$,

2- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda l_1$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

3- si $v_n \neq 0$ pour tout n alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{l_1}{l_2}$.

Preuve. Montrons le 1 de ce théorème. La preuve doit considérer les cas suivants : l_1 et $l_2 \in \mathbb{R}$ (déjà traité au chapitre précédent), $l_1 \in \mathbb{R}$ et $l_2 = \pm\infty$, $l_1 = l_2 = \pm\infty$. Le cas $l_1 = +\infty$ et $l_2 = -\infty$ est indéterminé et n'a pas à être considéré.

1- $l_1 \in \mathbb{R}$ et $l_2 = +\infty$. La suite u est convergente donc elle est bornée (voir Chap. 3) : il existe M telle que $-M \leq u_n \leq M$ pour tout n. Puisque $l_2 = +\infty$

$$\forall A > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \ (n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A + M),$$

donc pour tout $n \geq n_0$ on a $u_n + v_n \geq -M + A + M = A$ d'où le second cas.

2- $l_1 = l_2 = +\infty$. Pour tout $A > 0$ il existe n_1 et n_2 tels que $n \geq n_1 \Rightarrow u_n \geq A/2$ et $n \geq n_2 \Rightarrow v_n \geq A/2$. Pour tout $n \geq \max(n_1, n_2)$ on obtient $u_n + v_n \geq A/2 + A/2 = A$ d'où le troisième cas.

Les autres cas se prouvent de la même façon. □

4.4 Ordre et limites infinies

Une conséquence immédiate de la définition d'une limite infinie est la suivante:

Proposition 12 *Étant donné deux suites u et v, si $\lim u_n = +\infty$ et si $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq 0$ alors $\lim u_n = +\infty$. De la même manière, si $\lim u_n = -\infty$ et si $v_n \leq u_n$ pour tout $n \geq 0$ alors $\lim v_n = -\infty$.*

Les inégalités se conservent à la limite :

Proposition 13 *Soient deux suites u et v, l_1 et l_2 leurs limites respectives dans $\bar{\mathbb{R}}$. On suppose que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq 0$. Alors*

$$l_1 \leq l_2.$$

Preuve. Le cas $l_1 = \mathbb{R}$ et $l_2 = \mathbb{R}$ a été étudié au chapitre 3. Les cas $l_1 = -\infty$ ou $l_2 = +\infty$ sont immédiats. Il reste à exclure les trois cas restants qui sont $l_1 \in \mathbb{R}$ et $l_2 = -\infty$, $l_1 = +\infty$ et $l_2 = -\infty$, $l_1 = +\infty$ et $l_2 \in \mathbb{R}$. Montrons qu'il est impossible d'avoir $l_1 = +\infty$ et $l_2 = -\infty$. Raisonnons par l'absurde. Si tel est le cas, pour tout $A > 0$ il existe n_1 et n_2 tels que $u_n \geq A$ pour tout $n \leq n_1$ et $v_n \leq -A$ pour tout $n \geq n_2$. Prenons $A = 1$ et $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$. On a $u_{n_3} \geq 1$ et $v_{n_3} \leq -1$. Ces inégalités contredisent l'hypothèse $u_n \leq v_n$ et la proposition est démontrée. □

On en déduit un "théorème des gendarmes" :

Théorème 8 *Soient trois suites u, v et w telles que :*

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

pour tout $n \geq 0$. Si $\lim u_n = \lim w_n = l$ avec $l \in \bar{R}$ on a aussi $\lim v_n = l$.

Nous ne démontrerons pas ce théorème.

1- Considérons $u_n = n^2 - n$. On a $\lim u_n = +\infty$ parce que $n(n-1) \geq n$ pour tout $n \geq 2$ et $\lim n = +\infty$.

2- Soit $w_n = (3 + \sin n)^{1/n}$. Prenons $u_n = 2^{1/n}$ et $v_n = 4^{1/n}$. On a $\lim u_n = \lim v_n = 1$ et $u_n \leq w_n \leq v_n$: ceci prouve que $\lim w_n = 1$.

4.5 Limites classiques.

Dans les exemples qui suivent on utilisera l'inégalité vue au chapitre 2 : pour tout $a \geq 0$

$$(1+a)^n \geq na.$$

1. $\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^a,\ a \in \mathbb{Z}}$

   1- Si $a = 0$ alors la suite est constante : $n^0 = 1$.

   2- Si $a \geq 1$ alors $n^a \geq n$ et $\lim n^a = +\infty$.

   3- Si $a \leq -1$ alors $n^a = 1/n^{-a}$. De ce qui précède et du théorème 3.1 on déduit que $\lim n^a = 0$.

2. $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)},\ P \text{ et } Q \text{ sont des polynômes}}$

   Supposons que
   $$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots a_d x^d$$
   avec $a_d \neq 0$ et que
   $$Q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots b_e x^e$$
   avec $b_e \neq 0$.

   - Si $d < e$ alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = 0$,
   - Si $e < d$ alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \pm\infty$, le signe étant celui de a_d/b_e,
   - Si $d = e$ alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_d}{b_d}$.

   Prouvons ce dernier cas. On a
   $$\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_0 + a_1 n + \ldots a_d n^d}{b_0 + b_1 n + \ldots b_d n^d}.$$
   En divisant haut et bas par n^d on obtient
   $$\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_0 n^{-d} + a_1^{1-d} + \ldots + a_{d-1}^{-1} + a_d}{b_0 n^{-d} + b_1^{1-d} + \ldots + b_{d-1}^{-1} + b_d}$$
   puis on utilise la limite précédente pour conclure.

3. $\boxed{\lim_{n\to+\infty} r^n,\ r \in \mathbb{R}}$

   1- Si $r \leq -1$ cette suite n'a pas de limite puisque $r^{2n} \geq 1$ et $r^{2n+1} \leq -1$.

2- Si $r > 1$ posons $r = 1 + a$ avec $a > 0$. Puisque $an < (1+a)^n$ et que $\lim na = +\infty$ on en déduit que $\lim r^n = +\infty$.

3- Si $-1 < r < 1$ posons $a = 1/r$. On a $|a| > 1$ et, par ce qui précède, $\lim |a|^n = +\infty$. On en déduit que $\lim |r^n| = \lim 1/|a|^n = 0$. Donc $\lim r^n = 0$.

4. $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a^{1/n} = 1,\ a > 0}$

1- Soit $a \geq 1$. On a $\ln a^{1/n} = (\ln a)/n \geq 0$ donc $a^{1/n} \geq 1$ de sorte que

$$a = (a^{1/n})^n = (1 + (a^{1/n} - 1))^n \geq n(a^{1/n} - 1).$$

Donc

$$0 \leq a^{1/n} - 1 \leq \frac{a}{n}.$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} a^{1/n} = 1$.

2- Soit $a < 1$. Donc $b = 1/a > 1$ et puisque $\lim_{n\to+\infty} b^{1/n} = 1$, le 3 du théorème 3.1 impliquent $\lim_{n\to+\infty} a^{1/n} = 1$.

5. $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^p} = +\infty, \qquad a > 1 \quad et \quad p \in \mathbb{N}^*}$

Puisque $a > 1$ on a $a^{1/p} > 1$. Soit $r > 0$ tel que $a^{1/p} = 1 + r$. Donc

$$(a^{1/p})^n = (1+r)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^k > \frac{n(n-1)}{2} r^2.$$

Il vient

$$\frac{(a^{1/p})^n}{n} > \frac{n-1}{2} r^2.$$

Finalement

$$\frac{(a)^n}{n^p} > \left(\frac{n-1}{2}\right)^p r^{2p}.$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{(a)^n}{n^p} = +\infty$. On dit que l'exponentielle l'emporte sur la puissance.

6. $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a^{-n} n^p = 0, \qquad a > 1 \quad et \quad p \in \mathbb{N}^*}$

C'est l'inverse de la limite précédente.

7. $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.}$

Puisque la suite $(1/n)$ a pour limite 0, il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que

$$\frac{|a|}{n} \leq 1$$

pour tout $n \geq n_0$. Mézalor

$$\frac{|a^n|}{n!} = \frac{|a|}{1} \times \ldots \times \frac{|a|}{n_0} \times \ldots \times \frac{|a|}{n} \leq \frac{|a|}{1} \times \ldots \times \frac{|a|}{n_0} \times \frac{|a|}{n} = \frac{K}{n}$$

où $K > 0$ est indépendant de n. Ceci prouve que la suite $(|a^n|/n!)$ a pour limite 0, on conclut avec la proposition 9-6 du chapitre précédent.

5. Théorèmes de convergence.

5.1 Monotonie et convergence

Rappelons qu'une suite $u = \{u_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ est croissante si $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elle est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 14 *Toute suite croissante et majorée admet une limite $l \in \mathbb{R}$ qui est la borne supérieure de l'ensemble des termes de la suite.*

Preuve. Soit u une suite croissante et majorée. L'ensemble

$$\{u_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$$

admet une borne supérieure l. Nous allons voir que c'est la limite de cette suite. Soit $\epsilon > 0$. D'après le théorème de caractérisation de la borne supérieure il existe un entier n_0 tel que :

$$l - \epsilon < u_{n_0} \leq l.$$

Puisque la suite u est croissante on a

$$l - \epsilon < u_{n_0} \leq u_n \leq l$$

pour tout $n \geq n_0$ de sorte que

$$|u_n - l| = l - u_n \leq \epsilon$$

pour tout $n \geq n_0$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$. □

Proposition 15 *Toute suite croissante et non majorée a pour limite $+\infty$.*

Preuve. Puisque u n'est pas majorée, pour tout $A > 0$ il existe un entier n_0 tel que $A \leq u_{n_0}$. Puisque u est croissante on a

$$A \leq u_{n_0} \leq u_n$$

pour tout $n \geq n_0$ ce qui prouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. □

En substituant $-u$ à u dans les deux propositions précédentes on obtient

Proposition 16

1- Toute suite décroissante et minorée admet une limite $l \in \mathbb{R}$ qui est la borne inférieure des termes de la suite.

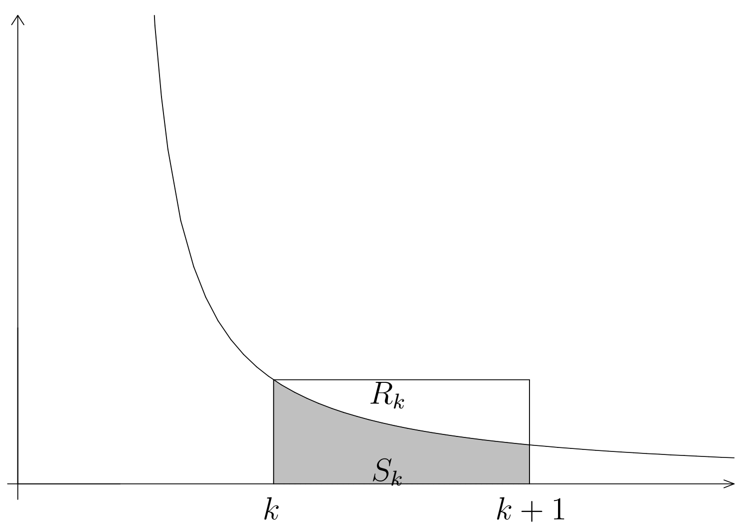
2- Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

Exemple 1 : La suite $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est convergente. Sa limite est le nombre e base des logarithmes népériens. Cette suite est croissante parce que $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!}$. Montrons qu'elle est majorée par 3. Pour $k \geq 1$, on montre facilement par récurrence que $k! \geq 2^{k-1}$ de sorte que $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$. Donc

$$u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2} = 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq 3.$$

Exemple 2 : La suite $u_n = \ln n$ a pour limite $+\infty$. Cette suite est croissante puisque la fonction ln est elle-même croissante. Elle n'est pas majorée puisque pour tout $A > 0$ on a $A < \ln n$ pour $n = E(A) + 1$.

Exemple 3 : La suite $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ tend vers $+\infty$. Cette suite est croissante parce que $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$. Montrons que $u_n > \log(n+1)$. Comme la suite $(\log(n+1))$ n'est pas majorée il en sera de même pour (u_n) d'où la limite infinie. Partons de l'observation suivante : soit S_k le domaine du plan compris entre le graphe de la fonction $y = 1/x$, l'axe des x et les deux droites verticales d'équations respectives $x = k$ et $x = k+1$.



Ce domaine S_k est contenu dans le rectangle R_k dont les sommets sont les points de coordonées $(k, 0)$, $(k+1, 0)$, $(k+1, 1/k)$ et $(k, 1/k)$. En prenant les aires de ces régions on obtient

$$aire(S_k) = \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \log(k+1) - \log k < \frac{1}{k} = aire(R_k)$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n} (\log(k+1) - \log k) = \log(n+1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

5.2 Suites adjacentes

Definition 15 *Deux suites u et v sont adjacentes si :*

1- u est croissante et v décroissante,

2- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Proposition 17 *Deux suites adjacentes convergent vers la même limite l. De plus,*

$$u_n \leq l \leq v_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve. Montrons que $u_n \leq v_n$. La suite $v - u$ est décroissante parce que u est croissante et v est décroissante. Puisqu'elle converge, sa limite 0 est aussi sa borne inférieure et donc $0 \leq v_n - u_n$ pour tout n. Ainsi

$$u_0 \leq \ldots \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq \ldots \leq v_0.$$

Ceci prouve que les suites u et v convergent respectivement vers l_1 et l_2 puisque l'une est croissante et majorée par v_0 et l'autre décroissante et minorée par u_0. De plus

$$u_n \leq l_1 \leq l_2 \leq v_n$$

pour tout n par passage à la limite dans l'inégalité $u_n \leq v_n$. On obtient $l_1 = l_2$ parce que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$. □

Exemple : Moyenne arithmético-géométrique de deux nombres réels $a > 0$ et $b > 0$. Définissons deux suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

pour tout $n \geq 0$.

1- Par récurrence on montre que $u_n > 0$ et $v_n > 0$ de sorte que les deux suites sont bien définies.

2- On a ensuite $u_{n+1} \leq v_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$: élever au carré puis vérifier que

$$u_n v_n \leq \left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)^2.$$

3- La suite v est décroissante puisque

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leq 0.$$

4- La suite u est croissante puisque

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n}\,(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) \geq 0.$$

5- Ces deux suites convergent vers la même limite. En effet, la suite u est croissante et majorée par v_1 donc elle converge vers l_1. De même, v décroissante et minorée par u_1 converge vers l_2. Par passage à la limite dans l' expression de v_{n+1} on obtient $l_2 = \frac{l_1+l_2}{2}$ donc $l_1 = l_2$.

Corollaire 2 Le théorème des intervalles emboités.
Etant donné une suite d'intervalles $[a_n, b_n]$ emboités :

$$\ldots \subset [a_n, b_n] \subset \ldots \subset [a_1, b_1] \subset [a_0, b_0]$$

et telle que $\lim b_n - a_n = 0$, l'intersection de ces intervalles $I = \cap_{n\geq 0}[a_n, b_n]$ est réduite à un point.

Preuve. Les deux suites a et b sont adjacentes. Soit l leur limite. Pour tout n on a $a_n \leq l \leq b_n$ de sorte que $l \in [a_n, b_n]$. Ceci prouve que $l \in I$. De plus, si $l^{'} \in I$ alors $l' \in [a_n, b_n]$ pour tout n c'est à dire $a_n \leq l^{'} \leq b_n$. Par passage à la limite $l \leq l^{'} \leq l$. Donc $I = \{l\}$. □

5.3 Le théorème de Bolzano-Weierstrass (hors programme).

Definition 16 *Une sous-suite ou suite extraite d'une suite u est une suite du type $u\,o\,\sigma$ où $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.*

Théorème 9 *Toute suite bornée possède une sous-suite convergente. :*

Preuve. On construit tout d'abord une suite d'intervalles emboités dont l'intersection est réduite à un point. Cette construction est la suivante: la suite u étant bornée, il existe a_0 et b_0 tels que

$$a_0 \leq u_n \leq b_0$$

pour tout n. Notons $[a_1, b_1]$ l'un des deux intervalles $[a_0, \dfrac{a_0+b_0}{2}]$ ou $[\dfrac{a_0+b_0}{2}, b_0]$ qui contient une infinité de termes de la suite. En répétant ce procédé, on construit une suite d'intervalles emboités $[a_n, b_n]$, chacun d'eux contenant une infinité de termes de la suite, dont l'intersection est réduite à un point noté l.

On construit une sous-suite $u\,o\,\sigma$ de u qui converge vers l de la façon suivante. Posons $\sigma(0) = 0$: on a $a_0 \leq u_{\sigma(0)} \leq b_0$. Supposons connus $\sigma(0), \ldots, \sigma(n)$ tels que

$$\forall k \leq n,\ a_k \leq u_{\sigma(k)} \leq b_k.$$

Pour déterminer $\sigma(n+1)$ on prend le rang d'un terme u_k de la suite u qui soit dans l'intervalle $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ et tel que $k > \sigma(n)$. Ceci est rendu possible par le fait que ce dernier intervalle contient une infinité de u_k. Du théorème des intervalles emboités la sous-suite $u\,o\,\sigma$ converge vers l. $\square$

6. Itérations successives.

Dans tout ce chapitre $x \in \bar{\mathbb{R}}$ et D est un intervalle du type :

- $D =]x - \epsilon, x + \epsilon[$ si $x \in \mathbb{R}$ avec $\epsilon > 0$,
- $D =]A, +\infty[$ si $x = +\infty$ où $A > 0$,
- $D =]-\infty, -A[$ si $x = -\infty$ où $A > 0$.

6.1 Image d'une suite par une fonction continue

Théorème 10 *Soient $x \in \bar{\mathbb{R}}$ et $f : D \to \mathbb{R}$. On suppose que $\lim_{u \to x} f(u) = y \in \bar{\mathbb{R}}$. Pour toute suite (u_n) telle que $\lim_{n \to +\infty} u_n = x$ on a*

$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = y.$$

Ce théorème admet de nombreux cas particuliers suivant que $x \in \mathbb{R}$, $x = +\infty$ ou $x = -\infty$. Idem pour y.

6.2 Itérations successives.

Dans ce paragraphe on étudie la suite des itérations successives : associée à une fonction $f : D \to D$ et à un point initial $u_0 \in D$. On appelle ainsi la suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$.

Notons $f^0 = I$ l'application identité, $f^1 = f$ et $f^n = f \circ f^{n-1}$. La suite (u_n) vérifie : $u_1 = f(u_0)$,

$$u_2 = f(u_1) = f \circ f(u_0) = f^2(u_0)$$

et enfin

$$x_n = f(x_{n-1}) = f \circ f^{n-1}(x_0) = f^n(x_0).$$

Théorème 11 *Soit $f : D \to D$ et soit $u_0 \in D$. Si la suite*

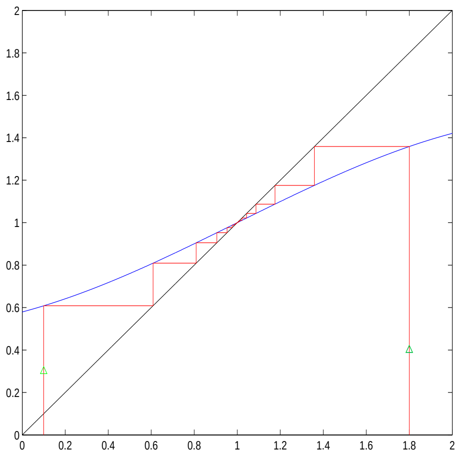
$$u_{n+1} = f(u_n), \quad n \geq 0,$$

converge vers $x \in D$ et si f est continue en x alors $f(x) = x$.

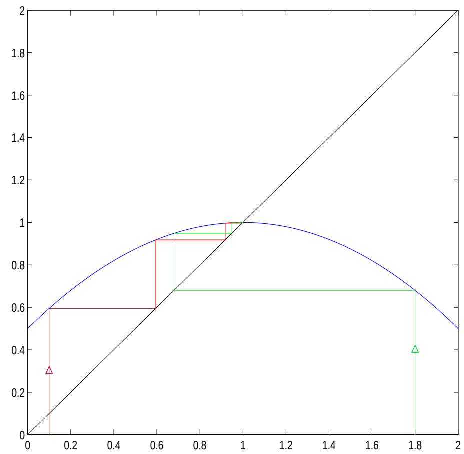
Un point qui vérifie $f(x) = x$ est un *point fixe* : de f. Les points fixes sont donnés par l'intersection du graphe de f et de la première bissectrice.

6.3 Aspects graphiques.

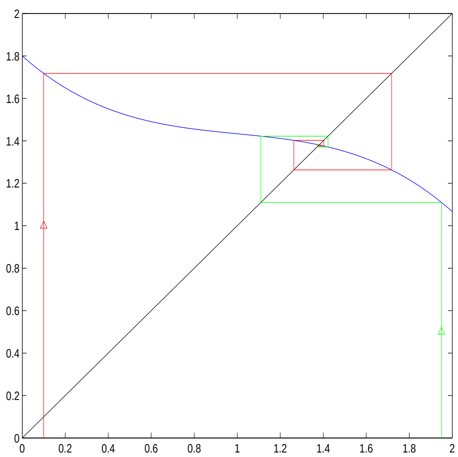
Etant donné un point fixe x de f, le comportement de la suite des itérations successives qui démarre en un point u_0 proche de x dépend de la valeur de la dérivée $f'(x)$. Voici tout d'abord quelques expériences graphiques.



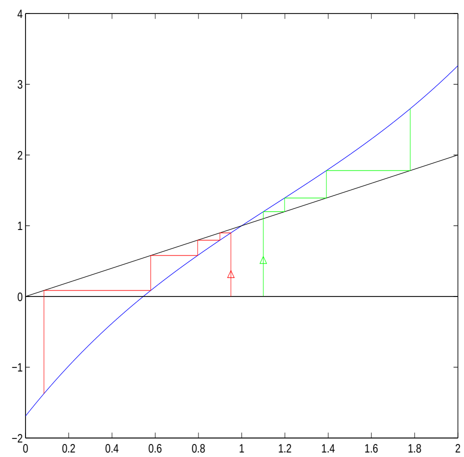
$0 < f'(x) < 1$: convergence



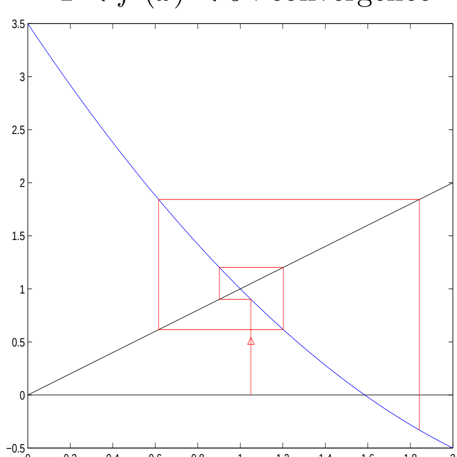
$f'(x) = 0$: convergence



$-1 < f'(x) < 0$: convergence



$f'(x) > 1$: divergence



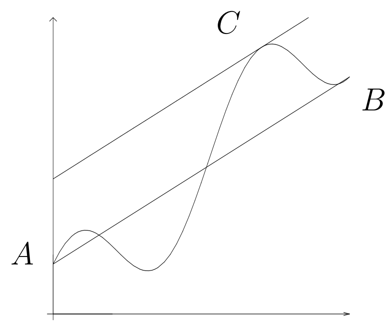
$f'(x) < -1$: divergence

6.4 Théorème de convergence.

6.4.1 Rappel. Le théorème des accroissements finis.

Théorème 12 *: Soit $f : [a,b] \subset \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Il existe $c \in]a,b[$ tel que*
$$f(b) = f(a) + f^{'}(c)(b-a).$$

Géométriquement, cela signifie qu'il existe au moins une tangente au graphe de la fonction f parallèle à la droite passant par les points $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$ (voir figure ci-dessous).



On en déduit l'inégalité des accroissements finis :

Corollaire 3 *Soit $f : [a,b] \subset \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et soient $0 \leq \lambda \leq \mu$ tels que :*
$$\forall u \in D, \quad \mu \leq |f^{'}(u)| \leq \lambda.$$
Alors, pour tout u et $v \in D$, on a :
$$\mu|u-v| \leq |f(u) - f(v)| \leq \lambda|u-v|$$

6.4.2 Théorèmes de convergence.

Théorème 13 *Soient $f : D \to D$ dérivable sur D, $x \in D$ un point fixe de f et soient $0 \leq \lambda \leq \mu$. Notons $I =]x-a, x+a[\subset D$ un intervalle ouvert de centre x et supposons que*
$$\forall u \in I, \quad \mu \leq |f^{'}(u)| \leq \lambda.$$
Alors

1- Si $\lambda < 1$, pour tout $u_0 \in I$ la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ reste dans I et converge vers x.

2- Si $\mu > 1$, pour tout $u_0 \in I$ la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ ne converge pas vers x.

Preuve. L'inégalité des accroissements finis appliquée à f dans I prouve que

$$\mu|u-v| \leq |f(u)-f(v)| \leq \lambda|u-v|$$

pour tout u, $v \in I$.

Lorsque $\lambda < 1$, soit $u_0 \in I$. On a

$$|u_1 - x| = |f(u_0) - f(x)| \leq \lambda|u_0 - x|.$$

Ceci prouve que $u_1 \in I$ puisque $\lambda|u_0 - x| < a$. Montrons par récurrence que

$$|u_n - x_0| \leq \lambda^n|u_0 - x|.$$

On a comme plus haut

$$|u_{n+1} - x| = |f(u_n) - f(x)| \leq \lambda|u_n - x| \leq \lambda\lambda^n|u_0 - x| = \lambda^{n+1}|u_0 - x|$$

ce qui prouve aussi que $u_{n+1} \in I$. Comme $0 \leq \lambda < 1$ la suite (λ^n) a pour limite 0 donc $\lim u_n = x$.

Si $\mu > 1$, soit $u_0 \in I$. On a ici

$$|u_1 - x| = |f(u_0) - f(x)| \geq \mu|u_0 - x|.$$

Ceci prouve que l'effet de f sur u_0 consiste à éloigner de x ce qui rend impossible la convergence vers x. □

Il faut remarquer que lorsque la dérivée de f est continue et lorsqu'elle vérifie $|f'(x)| < 1$ on aura aussi $|f'(u)| \leq \lambda < 1$ pour tout u dans un intervalle du type $]x-a, x+a[$ avec $a > 0$. On peut alors appliquer le théorème précédent. Ceci justifie les "preuves" graphiques de la section précédente.

6.5 Exemples

6.5.1 Approximation de $\sqrt{a}$, $\quad a > 0$.

Le procédé suivant, pour le calcul de la racine carrée d'un nombre réel $a > 0$ est attribué à Héron d'Alexandrie, grec, 1er siècle, également appelé Héron l'Ancien. Ce procédé était déjà connu des Babyloniens, 300 à 400 années avant, et il s'écrit au moyen des suites numériques de la façon suivante :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

La fonction f associée à cette suite est $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$ que nous ne considérerons que pour $x > 0$. L'équation $f(x) = x$ a pour seule solution positive $x = \sqrt{a}$.

1- Donnons nous $u_0 > 0$. On a par récurrence $u_n > 0$ pour tout n.

2- Un calcul simple montre que :

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n}.$$

Si $u_0 = \sqrt{a}$ la suite est constante égale à $\sqrt{a}$. Si $u_0 \neq \sqrt{a}$, pour tout $n \geq 1$, l'égalité précédente prouve que $u_n > \sqrt{a}$: cette suite est minorée par $\sqrt{a}$.

3- Comme $0 < \frac{u_n - \sqrt{a}}{2u_n} < \frac{1}{2}$ on obtient

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{u_n - \sqrt{a}}{2u_n}(u_n - \sqrt{a}) < \frac{u_n - \sqrt{a}}{2} < u_n - \sqrt{a},$$

cette suite est décroissante pour tout $n \geq 1$ et minorée par $\sqrt{a}$: elle est donc convergente. Sa limite est le seul point fixe positif possible : $\sqrt{a}$.

6.5.2 Suites homographiques.

: Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $c \neq 0$. On considère la suite

$$u_0 \in \mathbb{R}, \quad u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}, \quad n \geq 0.$$

La fonction associée est

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c(cx + d)}$$

Si $ad - bc = 0$ la suite est constante.
Supposons désormais que $\mathbf{ad - bc \neq 0}$. La fonction f est une bijection de $\mathbb{R} - \{-d/c\}$ dans $\mathbb{R} - \{a/c\}$ puisque

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \Leftrightarrow x = \frac{dy - b}{cy - a}.$$

Pour que la suite (u_n) soit définie pour tout n, il faut et il suffit que u_0 soit différent des termes de la suite définie par récurrence par

$$w_0 = -\frac{d}{c}, \quad w_{k+1} = \frac{dw_k - b}{cw_k - a}, \quad k \geq 0.$$

Si la suite a une limite, celle-ci est solution de l'équation $f(l) = l$ c'est à dire

$$cl^2 + (d - a)l - b = 0.$$

1- Si $(d - a)^2 + 4bc < 0$ cette équation n'a pas de racines réelles et la suite diverge.

2- Si $(d-a)^2+4bc>0$ cette équation admet deux racines réelles distinctes α et β. Si $u_0=\alpha$, la suite est constante égale à α. Sinon

$$\frac{u_{n+1}-\alpha}{u_{n+1}-\beta}=\frac{\frac{au_n+b}{cu_n+d}-\frac{a\beta+b}{c\beta+d}}{\frac{au_n+b}{cu_n+d}-\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}}=\frac{c\alpha+d}{c\beta+d}\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}.$$

Par le changement de variable $x_n=\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}$ et pour $k=\frac{c\alpha+d}{c\beta+d}\neq 1$ on obtient $x_{n+1}=kx_n$. La suite (x_n) a pour limite 0 si $|k|<1$. Dans ce cas $\lim u_n=\beta$. La suite $(|x_n|)$ a pour limite ∞ si $|k|>1$ ce qui donne $\lim u_n=\alpha$. Pour $k=-1$ la suite (u_n) diverge.

3- Si $(d-a)^2+4bc=0$ cette équation admet une seule racine réelle distinctes $\alpha=\frac{a-d}{2c}$. Si $u_0\neq\alpha$ on a

$$\frac{1}{u_{n+1}-\alpha}=\frac{\frac{au_n+b}{cu_n+d}-\frac{1}{a\beta+b}c\beta+d}{=}\frac{c\alpha+d}{ad-bc}\frac{cu_n+d}{u_n-\alpha}=\frac{2c}{a+d}+\frac{1}{u_n-\alpha}.$$

En posant $x_n=\frac{1}{u_n-\alpha}$ et pour $k=\frac{2c}{a+d}\neq 0$ on obtient $x_{n+1}=k+x_n$ d'où $x_n=x_0+nk$. Cette suite a une limite infinie et donc $\lim u_n=\alpha$.

7. Récurrences linéaires d'ordre 2.

7.1 Introduction

Etant donné deux nombres réels a, b avec $b \neq 0$, on souhaite calculer la suite u définie par :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \quad n \geq 0,$$

où u_0 et u_1 sont donnés. Ce type de suite est appelé récurrence linéaire d'ordre 2. Les deux exemples ci-dessous donnent une motivation à cette étude.

7.1.1 Suite de Fibonacci

Leonardo Pisano (1170-1240) dit Fibonacci a introduit en Europe les chiffres arabes et la numérotation de position décimale toujours en vigueur aujourd'hui. La suite de fibonacci est donnée par

$$\begin{aligned} &u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \\ &u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

7.1.2 Discrétisation d'une équation différentielle d'ordre 2.

On considère le problème différentiel :

$$u^{''}(t) + cu^{'}(t) + du(t) = 0, \quad t \in [0, 1],$$

$$u(0) = u_0,\ u'(0) = u'_0,$$

dont on veut calculer, de façon approchée, la solution; u_0 et u'_0 sont donnés, ce sont les conditions initiales du problème.

Afin de remplacer ce problème continu par un problème discret, on se donne un entier N donné, puis

- Au lieu du temps $t \in [0, 1]$, on ne considère que les instants $t_k = \dfrac{k}{N}$ pour $k = 0, \ldots, N$,
- Au lieu de la fonction $u(t)$ on introduit une suite (u_k),
- On approche pour chaque $k = 0, \ldots, N$:

1- $u(t_k)$ par u_k,

2- $u^{'}(t_k)$ par $u_k' = \dfrac{u_{k+1} - u_k}{t_{k+1} - t_k} = N(u_{k+1} - u_k)$,

3- $u^{''}(t_k)$ par $\dfrac{u_{k+1}' - u_k'}{t_{k+1} - t_k} = N^2(u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k)$.

- L'équation différentielle est remplacée par l'équation suivante :

$$N^2(u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k) + cN(u_{k+1} - u_k) + du_k = 0,$$

c'est à dire

$$u_{k+2} + \left(\frac{c}{N} - 2\right) u_{k+1} + \left(\frac{d}{N^2} - \frac{c}{N} + 1\right) u_k = 0$$

- La condition initiale du problème différentiel est remplacé par la donnée des deux premiers termes de la suite : on prend u_0 et $u_1 = u_0 + \dfrac{u_0'}{N}$.

7.2 L'espace vectoriel des récurrences

Notons

$$\mathcal{E}_{a,b} = \{u \ : \ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \ n \geq 0\}$$

l'ensemble des suites qui vérifient cette récurrence.

Proposition 18 *$\mathcal{E}_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites.*

Preuve. Rappelons les opérations définies sur l'espace vectoriel des suites :

1- Addition de deux suites $u + v$: $(u + v)_n := u_n + v_n$, $n \geq 0$.

2- Multiplication d'une suite par un scalaire λu : $(\lambda u)_n := \lambda u_n$, $n \geq 0$.

$\mathcal{E}_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel puisque :

1- La suite nulle $0 \in \mathcal{E}_{a,b}$: $0_{n+2} = a0_{n+1} + b0_n = 0$, $n \geq 0$.,

2- Toute combinaison linéaire de deux suites u et $v \in \mathcal{E}_{a,b}$ appartient à $\mathcal{E}_{a,b}$. En effet si $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ et $v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n$, on a pour tout λ et $\mu \in \mathbb{R}$:

$$\lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} =$$

$$\lambda(au_{n+1} + bu_n) + \mu(av_{n+1} + bv_n) =$$

$$a(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) + b(\lambda u_n + \mu v_n).$$

□

Proposition 19

$$\dim \mathcal{E}_{a,b} = 2.$$

Preuve. Soient e et f les deux suites :

1- $e_0 = 1$, $e_1 = 0$, $e_{n+2} = ae_{n+1} + be_n$, $n \geq 0$,

2- $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{n+2} = af_{n+1} + bf_n$, $n \geq 0$.

Ces deux suites sont indépendantes. En effet si $\lambda e + \mu f = 0$ alors

$$(\lambda e + \mu f)_0 = \lambda = 0 \text{ et } (\lambda e + \mu f)_1 = \mu = 0.$$

Montrons que ces deux suites sont génératrices. Soit $u \in \mathcal{E}_{a,b}$; nous allons prouver que

$$u = u_0 e + u_1 f.$$

C'est vrai pour les indices 0 et 1. Supposons que cette propriété soit vraie pour tous les indices plus petits ou égaux à $n+1$. On a :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n = a(u_0 e_{n+1} + u_1 f_{n+1}) + b(u_0 e_n + u_1 f_n) =$$
$$u_0(ae_{n+1} + be_n) + u_1(af_{n+1} + bf_n) = u_0 e_{n+2} + u_1 f_{n+2}.$$

□

7.3 Résolution

Résoudre une récurrence linéaire d'ordre 2 signifie exprimer u_n en fonction des nombres u_0, u_1, a, b et n.

Definition 17 *L'équation caractérisque de la récurrence est :*

$$x^2 = ax + b.$$

On note par α et β les racines de cette équation.

7.3.1 Les racines α et β sont réelles et distinctes

Proposition 20

$$\begin{aligned} &u_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n \\ &\lambda + \mu = u_0 \\ &\lambda\alpha + \mu\beta = u_1. \end{aligned}$$

Preuve. Les deux suites (α^n) et (β^n) vérifient la récurrence puisque

$$\alpha^{n+2} - a\alpha^{n+1} - b\alpha^n = \alpha^n(\alpha^2 - a\alpha - b) = 0.$$

Elles sont indépendantes : l'identité

$$\lambda(\alpha^n) + \mu(\beta^n) = 0$$

implique pour $n = 0$: $\lambda + \mu = 0$ et pour $n = 1$: $\lambda\alpha + \mu\beta = 0$. Donc $\lambda = \mu = 0$ puisque $\alpha \neq \beta$.

La dimension de $\mathcal{E}_{a,b}$ étant égale à 2, ces deux suites sont génératrices. Ainsi les deux suites (α^n) et (β^n) constituent une base de $\mathcal{E}_{a,b}$ et la suite u_n est une combinaison linéaire de ces deux suites. □

7.3.2 Les racines α et β sont distinctes et complexes conjuguées

Notons $r \pm is$ les deux racines de l'équation caractéristique et $r = \rho\cos\theta$, $s = \rho\sin\theta$ avec $\rho > 0$, $0 < \theta < 2\pi$ et $\theta \neq \pi$ puisque l'on doit avoir $s \neq 0$.

Proposition 21

$$\begin{aligned}
&u_n = \rho^n(\lambda\cos n\theta + \mu\sin n\theta)\\
&\lambda = u_0\\
&\rho(\lambda\cos\theta + \mu\sin\theta) = u_1.
\end{aligned}$$

Preuve. Nous allons prouver que les deux suites $c = (\rho^n\cos n\theta)$ et $s = (\rho^n\sin n\theta)$ vérifient la récurrence et sont indépendantes. La suite u pourra donc s'écrire $u = \lambda c + \mu s$, les coefficients λ et μ vérifiant le système $u_0 = \lambda c_O + \mu s_0$ et $u_1 = \lambda c_1 + \mu s_1$ c'est à dire $u_0 = \lambda$ et $u_1 = \rho(\lambda\cos\theta + \mu\sin\theta)$. Notons que, par la formule de Moivre,

$$c_n + is_n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = \rho^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n,$$

ce qui donne

$$\begin{gathered}
c_{n+2} + is_{n+2} - a(c_{n+1} + is_{n+1}) - b(c_n + is_n) =\\
\rho^{n+2}(\cos\theta + i\sin\theta)^{n+2} - a\rho^{n+1}(\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1} - b\rho^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n =\\
\rho^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n((r+is)^2 - a(r+is) - b) = 0.
\end{gathered}$$

Les parties réelles et imaginaires de l'expression précédente sont donc nulles :

$$c_{n+2} - ac_{n+1} - bc_n = s_{n+2} - as_{n+1} - bs_n = 0$$

de sorte que c et s vérifient la récurrence. Elles sont indépendantes parce que, par le calcul ci-dessus, $\lambda c + \mu s = 0$ donne $\lambda = 0$ et $\rho(\lambda\cos\theta + \mu\sin\theta) = 0$ d'où $\lambda = \mu = 0$ puisque $\rho > 0$ et $\sin\theta \neq 0$. $\square$

7.3.3 Une racine double

Dans ce cas $a^2 - 4b = 0$ et $\alpha = \dfrac{a}{2}$.

Proposition 22

$$\begin{aligned}
&u_n = \lambda\alpha^n + \mu n\alpha^n\\
&\lambda = u_0\\
&(\lambda + \mu)\alpha = u_1.
\end{aligned}$$

Preuve. La suite $(n\alpha^n)$ vérifie la relation de récurrence. En effet :

$$(n+2)\alpha^{n+2} - a(n+1)\alpha^{n+1} - bn\alpha^n =$$

$$n\alpha^n(\alpha^2 - a\alpha - b) + \alpha^{n+1}(2\alpha - a) = 0.$$

Les suites (α^n) et $\mu(n\alpha^n)$ sont indépendantes puisque l'identité $\lambda(\alpha^n) + \mu(n\alpha^n) = 0$ implique $\lambda = 0$ pour $n = 0$ et $(\lambda + \mu)\alpha = 0$ pour $n = 1$. Puisque $0 \neq b = a^2/4$, on obtient $\alpha = a/2 \neq 0$, de sorte que $\lambda = \mu = 0$. $\square$

7.4 Exemples

7.4.1 Exemple 1

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1$$
$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, \quad n \geq 0.$$

L'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$ a pour solutions $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Alors,

$$\begin{aligned} u_n &= \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ \lambda + \mu &= 0 \\ \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) &+ \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1. \end{aligned}$$

de sorte que $\lambda = -\mu = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

7.4.2 Exemple 2.

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n, \quad n \geq 0.$$

L'équation caractéristique $x^2 - 4x + 4 = 0$ a pour solution $x = 2$. Donc

$$u_n = \lambda 2^n + \mu n 2^n.$$

7.4.3 Exemple 3.

$$u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n, \quad n \geq 0.$$

L'équation caractéristique $x^2 + x + 1 = 0$ a pour solutions

$$x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \pm \sin \frac{2\pi}{3}.$$

Donc

$$\begin{aligned} u_n &= \lambda \cos \frac{2\pi n}{3} + \mu \sin \frac{2\pi n}{3} \\ \lambda &= u_0 \\ \lambda \cos \frac{2\pi}{3} &+ \mu \sin \frac{2\pi}{3} = u_1. \end{aligned}$$

7.5 Récurrences linéaires et calcul matriciel

Une récurrence linéaire d'ordre 2 possède une écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

c'est à dire

$$U_{n+1} = AU_n$$

en notant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ et $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Remarquons l'analogie avec les suites géométriques $u_{n+1} = au_n$, $a \in \mathbb{R}$. Dans ce dernier cas, $u_n = a^n u_0$. Le cas matriciel est similaire :

$$U_n = A^n U_0$$

et la question est maintenant de calculer A^n. Supposons que les racines de l'équation caractéristique soient réelles et distinctes. La matrice A s'écrit alors $A = PDP^{-1}$ et de façon plus précise

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{\beta - \alpha} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Voyons pourquoi cette forme est intéressante pour le calcul de A^n.

Proposition 23

$$A^n = PD^nP^{-1} \ \textit{et}\ D^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}.$$

Preuve. Par récurrence. Pour $n = 1$ il n'y a rien à démontrer. Supposons que $A^n = P^{-1}D^nP$ alors

$$A^{n+1} = A^n A = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^{n+1}P^{-1}.$$

□

Il faut ensuite calculer A^n, on obtient :

$$A^n = \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \begin{pmatrix} \alpha^n\beta - \alpha\beta^n & \beta^n - \alpha^n \\ \alpha^{n+1}\beta - \alpha\beta^{n+1} & \beta^{n+1} - \alpha^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Revenons maintenant à la récurrence : $U_n = A^n U_0$ Un calcul facile montre que la première coordonnée u_n de U_n est donnée par

$$u_n = c\alpha^n + d\beta^n$$

pour des constantes c et d convenables.

8. Suites de Cauchy

Ce chapitre est hors programme.

Definition 18 *Une suite u est de Cauchy si*

$$(\forall \epsilon > 0)\ \ (\exists N \in \mathbb{N})\ \ (\forall n \geq N)\ \ (\forall m \geq N)\ \ |u_n - u_m| \leq \epsilon.$$

Remarque 7 *Il revient au même de dire que*

$$(\forall \epsilon > 0)\ \ (\exists N \in \mathbb{N})\ \ (\forall n \geq N)\ \ (\forall p \geq 0)\ \ |u_n - u_{n+p}| \leq \epsilon.$$

Cela revient à supposer que $m \geq n$ et à prendre $m = n + p$ dans la définition précédente.

Voici un exemple de suites de Cauchy :

Théorème 14 *Toute suite convergente est de Cauchy.*

Preuve. Soit u une suite convergente et soit $l \in \mathbb{R}$ sa limite. Nous savons que

$$(\forall \epsilon > 0)\ \ (\exists N(\epsilon) \in \mathbb{N})\ \ (\forall n \geq N(\epsilon))\ \ |u_n - l| \leq \epsilon.$$

On en déduit que, pour tout n et $m \geq N(\epsilon/2)$,

$$|u_n - u_m| = |u_n - l - (u_m - l)| \leq |u_n - l| + |u_m - l| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

ce qui prouve que u est de Cauchy. □

Le résultat suivant montre que l'exemple précédent est le seul possible :

Théorème 15 *Toute suite de Cauchy est convergente.*

Preuve. Soit u une suite de Cauchy. Notons $N(\epsilon)$ un entier tel que

$$(\forall n \geq N)\ \ (\forall m \geq N)\ \ |u_n - u_m| \leq \epsilon.$$

Cette suite est bornée. En effet,

$$|u_n| \leq \max\ \{|u_k|,\ 0 \leq k \leq N(1) - 1\}$$

pour tout $n \leq N(1) - 1$ et
$$|u_n - u_m| \leq 1$$
pour tout n et $m \geq N(1)$. On en déduit que
$$|u_n| \leq |u_n - u_{N(1)} + u_{N(1)}| \leq |u_n - u_{N(1)}| + |u_{N(1)}| \leq 1 + |u_{N(1)}|$$
pour tout $n \geq N(1)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a toujours
$$|u_n| \leq \max\{|u_0|, \ldots, |u_{N(1)-1}|,\ 1 + |u_{N(1)}|\}.$$
En vertu du théorème de Bolzano-Weirstrass, il existe une sous-suite de u qui est convergente : il existe une suite strictement croissante d'entiers $k = (k_n)$ telle que $\lim_{n\to\infty} u_{k_n} = l$ autrement dit, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier $M(\epsilon)$ tel que, pour tout $k_n \geq M(\epsilon)$ on a $|u_{k_n} - l| \leq \epsilon$.

Montrons que u a pour limite l. Donnons nous $\epsilon > 0$ ainsi qu'un terme de la sous-suite u_{k_p} avec $k_p \geq M(\epsilon/2)$ et $k_p \geq N(\epsilon/2)$. Un tel entier existe puisque $\lim k_n = \infty$. Pour tout $n \geq N(\epsilon/2)$ on a
$$|u_n - l| = |(u_n - u_{k_p}) + (u_{k_p} - l)| \leq |u_n - u_{k_p}| + |u_{k_p} - l| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$
et le théorème est prouvé. □

Remarque 8 *1. On qualifie de* **complet** *un espace dans lequel toute suite de Cauchy est convergente : $\mathbb{R}$ est complet.*

2. *L'ensemble $\mathbb{Q}$ n'est pas complet. En effet, considérons la suite $q = (q_n)$ des approximations décimales de $\sqrt{2}$: $q_0 = 1$, $q_1 = 1.1$, $q_2 = 1.14$, $q_4 = 1.414$ et ainsi de suite. C'est une suite de rationnels qui converge vers $\sqrt{2}$. Pour cette raison cette suite est de Cauchy. Par contre sa limite n'est pas un rationnel, elle est de Cauchy mais n'est pas convergente dans $\mathbb{Q}$ ce qui fait que cet espace n'est pas complet.*

3. *Le critère de Cauchy permet de prouver la convergence d'une suite sans avoir à invoquer sa limite.*

Exemple 3 *Soit b un entier $b \geq 2$. Pour tout $n \geq 1$ on se donne un entier $x_n \in \{1-b, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, b-1\}$. Nous allons voir que la suite*
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{b^k}$$
est convergente. On a
$$|s_n - s_{n+p}| \leq \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x_k}{b^k}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \left|\frac{x_k}{b^k}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{b-1}{b^k} = \frac{b-1}{b^{n+1}} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{b^k} < \frac{1}{b^n}.$$
Cette inégalité prouve que la suite s est de Cauchy puisque l'on a $|s_n - s_{n+p}| \leq \epsilon$ pour tout $n \geq -\ln(\epsilon)/\ln(b)$ et pour tout $p \geq 0$.

Index