Chapitre 2 : applications.

1. Couples et produits cartésiens.

Nous avons défini au chapitre précédent l'ensemble $\{a, b\}$ appelé *paire* dont les seuls éléments sont a et b. Le **couple** (a, b) est un nouvel objet qui, à la différence de la paire $\{a, b\}$, fait jouer un rôle important à l'ordre dans lequel sont écrits a et b : (a, b) et (b, a) sont deux couples différents alors que $\{a, b\}$ et $\{b, a\}$ sont identiques. De plus (a, a) est un couple alors que $\{a, a\} = \{a\}$ est un singleton. La notion de couple se comprend mieux si l'on considère par exemple $(37, 60)$ où 37 est la température d'un objet et 60 son poids; $(60, 37)$ pourrait être le couple température-poids d'un autre objet et $(37, 37)$ celui d'un troisième.

La propriété essentielle du couple est la suivante :

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ et } b = b.$$

Etant donné deux ensembles E et F on appelle **produit cartésien** de E et F l'ensemble suivant :

$$E \times F \;=\; \{(x, y) : x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Plus généralement on introduit des n-**uplets** (triplets, quadruplets, quintuplets, sextuplets, heptuplets, octuplets, nonuplet, décuplets ...) $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avec la propriété

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \Leftrightarrow x_1 = y_1 \text{ et } x_2 = y_2 \;\ldots\; x_n = y_n$$

et le produit cartésien de n ensembles

$$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \;=\; \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \in E_1 \text{ et } x_2 \in E_2 \text{ et} \ldots \text{et } x_n \in E_n\}.$$

2. Applications.

Soient E et F deux ensembles. On appelle **application** de E dans F un triplet (E, F, f) où f est une partie de $E \times F$ et qui vérifie les deux propriétés suivantes :

(1) $(\forall x \in E)\,(\exists y \in F)\;\;(x, y) \in f,$

(2) $(\forall x \in E)\,(\forall y \in F)\,(\forall z \in F)\,((x, y) \in f \text{ et } (x, z) \in f) \Rightarrow y = z,$

autrement dit, pour tout $x \in E$ il existe un et un seul $y \in F$ tel que $(x, y) \in f$. On note de façon plus habituelle $y = f(x)$ au lieu de $(x, y) \in f$. Voici un peu de terminologie : E est l'ensemble de départ ou de définition de f, F est l'espace d'arrivée, $y = f(x)$ est l'image de x par f. Le terme de fonction est plutôt réservé aux applications à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une autre notation souvent utilisée est

$$f : E \to F.$$

Notons enfin que deux fonctions $f : E \to F$ et $f' : E' \to F'$ sont égales si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées : $E = E'$, $F = F'$ et $f(x) = f'(x)$ pour tout $x \in E$. Par exemple $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ et $f' : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f'(x) = |x|$ sont égales mais $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ et $f'' : [0, \infty[\to [0, \infty[$ définie par $f(x) = x$ ne le sont pas parce que les espaces d'arrivée sont différents.

Voici quelques exemples d'applications

(1) $id_E : E \to E$ définie par $id_E(x) = x$, c'est l'application **identité**,

(2) Soit $A \subset E$. L'application $i_A : A \to E$ définie par $i_A(x) = x$ est l'**injection canonique** de A dans E,
(3) Soit $A \subset E$. L'application $\chi_A : A \to \{0,1\}$ définie par $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$ est la **fonction indicatrice** de A.
(4) Soit $b \in F$. L'application $f : E \to F$ définie par $f(x) = b$ pour tout $x \in E$ est une **application constante**.

3. Composition des applications.

Soient E, F et G trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. La **composée** des applications f et g, notée $g \circ f$, est l'application

$$g \circ f : E \to G$$

définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ pour tout $x \in E$. Par exemple prenons $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ et $g : \mathbb{R} \to [-1,1]$, $g(x) = \sin(x)$. Ces applications peuvent être composées et vont donner

$$g \circ f : [-1,1] \to [-1,1],\ (g \circ f)(x) = \sin\left(\sqrt{1-x^2}\right)$$

alors que

$$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (f \circ g)(x) = \left(\sqrt{1-(\sin x)^2}\right) = |\cos(x)|\,.$$

Cet exemple montre que l'opération de composition n'est pas commutative. On a toutefois

Théorème 1. *Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : F \to G$ trois applications. Alors*
(1) $f \circ id_E = f$, $id_F \circ f = f$,
(2) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Une question que l'on va se poser est celle de l'inversion des applications c'est à dire, étant donné une application $f : E \to F$, trouver une application $g : F \to E$ telle que

$$f \circ g = \mathrm{id}_F \textit{ et } g \circ f = id_E.$$

Le paragraphe qui suit vise à traiter la question de l'existence d'un tel inverse.

4. Injections, surjections, bijections.

Soit $f : E \to F$. A tout $x \in E$ on peut associer $y \in F$ par $y = f(x)$. Réciproquement, si l'on se donne $y \in F$, on peut se demander s'il existe $x \in E$ vérifiant cette relation, autrement dit si $y \in F$ est donné l'équation

$$y = f(x)$$

possède des solutions $x \in E$ et s'il y a unicité. Ici x est l'inconnue du problème et y le "second membre". Ceci conduit naturellement aux définitions suivantes

Definition 1. *On dit que $f : E \to F$ est surjective lorsque*

$$(\forall y \in F)\,(\exists x \in E)\ \ y = f(x).$$

On dit que f est injective lorsque

$$(\forall x \in E)\,(\forall x' \in E)\ \ (f(x) = f(x')\ \Rightarrow\ x = x').$$

On dit que f est bijective lorsqu'elle est à la fois injective et surjective.

Il faut être précis avec ces questions : surjectivité et injectivité sont des notions relatives au contexte envisagé comme le montrent les exemples suivants:

Exemple 1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ n'est pas surjective puisque l'équation $f(x) = y$ avec $y = -1$, autrement dit $x^2 = -1$, n'a pas de solution $x \in \mathbb{R}$.

Exemple 2. $g : \mathbb{R} \to [0, \infty[$, $g(x) = x^2$ est surjective : l'équation $x^2 = y$ possède toujours une solution $x \in \mathbb{R}$ pour tout $y \in [0, \infty[$.

Exemple 3. $h : [0, \infty[\to [0, \infty[$, $h(x) = x^2$ est surjective : l'équation $x^2 = y$ possède toujours une solution $x \in [0, \infty[$ pour tout $y \in [0, \infty[$.

Exemple 4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ n'est pas injective puisque $f(2) = f(-2) = 4$ et que $2 \neq -2$: l'équation $f(x) = 4$ possède deux solutions distinctes. De même g n'est pas injective.

Exemple 5. $h : [0, \infty[\to [0, \infty[$, $h(x) = x^2$ est injective : pour tout $u, v \in [0, \infty[$ si $u^2 = v^2$ alors $u = v$. Cet exemple montre que h est bijective : l'équation $y = x^2$ possède une et une seule solution $x \geq 0$ pour tout $y \geq 0$. Cette unique solution est notée $\sqrt{y}$ et vérifie les deux propriétes suivantes : $\left(\sqrt{y}\right)^2 = y$ par construction, c'est à dire

$$h \circ \sqrt{\ } \ = \ id_{[0,\infty[}.$$

De plus, pour $y = x^2$ on obtient $\left(\sqrt{x^2}\right)^2 = x^2$ d'où, par injectivité, $\sqrt{x^2} = x$ c'est à dire

$$\sqrt{\ } \circ h = id_{[0,\infty[}.$$

On généralise cette approche dans la définition suivante

Théorème 2. *Soit $f : E \to F$ bijective. A tout $y \in F$ on associe l'unique solution de l'équation $f(x) = y$ que l'on note $f^{-1}(y)$. Ceci définit une application $f^{-1} : F \to E$ qui vérifie les deux propriétés suivantes*

$$f \circ f^{-1} = id_F \text{ et } f^{-1} \circ f = id_E.$$

On l'appelle la bijection (ou fonction) inverse de f ou bien la bijection (ou fonction) réciproque.

Preuve. La propriété $f \circ f^{-1} = id_F$ signifie que $f(f^{-1}(y)) = y$ pour tout $y \in F$ ce qui provient de la définition de f^{-1}. Si l'on applique cette propriété à $f(x)$ pour un $x \in E$ donné, on obtient $f(f^{-1}(f(x))) = f(x)$. Puisque f est injective on obtient $f^{-1}(f(x)) = x$ ou encore $f^{-1} \circ f = id_E$. □

Théorème 3. *Soit $f : E \to F$ et supposons qu'il existe une application $g : F \to E$ qui vérifie*

$$f \circ g = \mathrm{id}_F \text{ et } g \circ f = id_E.$$

Alors f est bijective et $g = f^{-1}$.

Preuve. Montrons que f est surjective. Soit $y \in F$ donné. Puisque $f \circ g = \mathrm{id}_F$ on a $f(g(y)) = y$ c'est à dire $f(x) = y$ pour $x = g(y)$. Montrons que f est injective. Supposons que $f(u) = f(v)$. En composant par g on a $g(f(u)) = g(f(v))$ d'où $u = v$ puisque $g \circ f = id_E$. On a enfin

$$g = g \circ \mathrm{id}_F = g \circ (f \circ f^{-1}) = (g \circ f) \circ f^{-1} = id_E \circ f^{-1} = f^{-1}.$$

□

Théorème 4. *Soit $f : E \to F$ bijective. Sa fonction inverse $f^{-1} : F \to E$ est aussi une bijection et $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Preuve. C'est une conséquence du théorème 2 :

$$f \circ f^{-1} = id_F \text{ et } f^{-1} \circ f = id_E$$

et du théorème 3 appliqué à f^{-1} au lieu de f et à f au lieu de g. □

Théorème 5. *L'application identité $id_E : E \to E$ est bijective. Elle est sa propre inverse.*

Preuve. C'est une conséquence du théorème 3 appliqué à $f = g = id_E$. □

Théorème 6. *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux bijections. La composée $g \circ f : E \to G$ est aussi une bijection et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Preuve. C'est une conséquence du théorème 3 :

$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ id_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = id_G$.

Par un argument identique on a

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = id_E.$$

L'unicité de l'inverse permet alors de conclure : $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. □

Une conséquence des théorèmes précédents, pour des applications $f : E \to E$ est la suivante

Théorème 7. *Notons $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des bijections $f : E \to E$. C'est un groupe pour la composition des applications dont l'identité est l'élément neutre : pour tout f, g et $h \in \mathcal{S}_E$ on a*

(1) $g \circ f \in \mathcal{S}_E$,
(2) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$,
(3) $f \circ id_E = id_E \circ f$,
(4) $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f == id_E$.

Ce groupe est appelé le groupe symétrique de E.