

## Chapitre 2 : applications.

### 1. COUPLES ET PRODUITS CARTÉSIENS.

Nous avons défini au chapitre précédent l'ensemble  $\{a, b\}$  appelé *paire* dont les seuls éléments sont  $a$  et  $b$ . Le **couple**  $(a, b)$  est un nouvel objet qui, à la différence de la paire  $\{a, b\}$ , fait jouer un rôle important à l'ordre dans lequel sont écrits  $a$  et  $b$  :  $(a, b)$  et  $(b, a)$  sont deux couples différents alors que  $\{a, b\}$  et  $\{b, a\}$  sont identiques. De plus  $(a, a)$  est un couple alors que  $\{a, a\} = \{a\}$  est un singleton. La notion de couple se comprend mieux si l'on considère par exemple  $(37, 60)$  où 37 est la température d'un objet et 60 son poids;  $(60, 37)$  pourrait être le couple température-poids d'un autre objet et  $(37, 37)$  celui d'un troisième.

La propriété essentielle du couple est la suivante :

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ et } b = d.$$

Etant donné deux ensembles  $E$  et  $F$  on appelle **produit cartésien** de  $E$  et  $F$  l'ensemble suivant :

$$E \times F = \{(x, y) : x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Plus généralement on introduit des  **$n$ -uplets** (triplets, quadruplets, quintuplets, sextuplets, heptuplets, octuplets, nonuplet, décuplets ...)  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  avec la propriété

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \Leftrightarrow x_1 = y_1 \text{ et } x_2 = y_2 \dots x_n = y_n$$

et le produit cartésien de  $n$  ensembles

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 \in E_1 \text{ et } x_2 \in E_2 \text{ et } \dots \text{ et } x_n \in E_n\}.$$

### 2. APPLICATIONS.

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. On appelle **application** de  $E$  dans  $F$  un triplet  $(E, F, f)$  où  $f$  est une partie de  $E \times F$  et qui vérifie les deux propriétés suivantes :

$$(1) (\forall x \in E) (\exists y \in F) (x, y) \in f,$$

$$(2) (\forall x \in E) (\forall y \in F) (\forall z \in F) ((x, y) \in f \text{ et } (x, z) \in f) \Rightarrow y = z,$$

autrement dit, pour tout  $x \in E$  il existe un et un seul  $y \in F$  tel que  $(x, y) \in f$ . On note de façon plus habituelle  $y = f(x)$  au lieu de  $(x, y) \in f$ . Voici un peu de terminologie :  $E$  est l'ensemble de départ ou de définition de  $f$ ,  $F$  est l'espace d'arrivée,  $y = f(x)$  est l'image de  $x$  par  $f$ . Le terme de fonction est plutôt réservé aux applications à valeur dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Une autre notation souvent utilisée est

$$f : E \rightarrow F.$$

Notons enfin que deux fonctions  $f : E \rightarrow F$  et  $f' : E' \rightarrow F'$  sont égales si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :  $E = E'$ ,  $F = F'$  et  $f(x) = f'(x)$  pour tout  $x \in E$ . Par exemple  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x$  et  $f' : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f'(x) = |x|$  sont égales mais  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x$  et  $f'' : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  définie par  $f''(x) = x$  ne le sont pas parce que les espaces d'arrivée sont différents.

Voici quelques exemples d'applications

- (1)  $id_E : E \rightarrow E$  définie par  $id_E(x) = x$ , c'est l'application **identité**,

- (2) Soit  $A \subset E$ . L'application  $i_A : A \rightarrow E$  définie par  $i_A(x) = x$  est l'**injection canonique** de  $A$  dans  $E$ ,
- (3) Soit  $A \subset E$ . L'application  $\chi_A : A \rightarrow \{0, 1\}$  définie par  $\chi_A(x) = 1$  si  $x \in A$  et  $\chi_A(x) = 0$  si  $x \notin A$  est la **fonction indicatrice** de  $A$ .
- (4) Soit  $b \in F$ . L'application  $f : E \rightarrow F$  définie par  $f(x) = b$  pour tout  $x \in E$  est une **application constante**.

### 3. COMPOSITION DES APPLICATIONS.

Soient  $E, F$  et  $G$  trois ensembles,  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications. La **composée** des applications  $f$  et  $g$ , notée  $g \circ f$ , est l'application

$$g \circ f : E \rightarrow G$$

définie par  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$  pour tout  $x \in E$ . Par exemple prenons  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ ,  $g(x) = \sin(x)$ . Ces applications peuvent être composées et vont donner

$$g \circ f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1], (g \circ f)(x) = \sin\left(\sqrt{1 - x^2}\right)$$

alors que

$$f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (f \circ g)(x) = \left(\sqrt{1 - (\sin x)^2}\right) = |\cos(x)|.$$

Cet exemple montre que l'opération de composition n'est pas commutative. On a toutefois

**Théorème 1.** Soient  $f : E \rightarrow F$ ,  $g : F \rightarrow G$  et  $h : F \rightarrow G$  trois applications. Alors

- (1)  $f \circ id_E = f$ ,  $id_F \circ f = f$ ,  
 (2)  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .

Une question que l'on va se poser est celle de l'inversion des applications c'est à dire, étant donné une application  $f : E \rightarrow F$ , trouver une application  $g : F \rightarrow E$  telle que

$$f \circ g = id_F \text{ et } g \circ f = id_E.$$

Le paragraphe qui suit vise à traiter la question de l'existence d'un tel inverse.

### 4. INJECTIONS, SURJECTIONS, BIJECTIONS.

Soit  $f : E \rightarrow F$ . A tout  $x \in E$  on peut associer  $y \in F$  par  $y = f(x)$ . Réciproquement, si l'on se donne  $y \in F$ , on peut se demander s'il existe  $x \in E$  vérifiant cette relation, autrement dit si  $y \in F$  est donné l'équation

$$y = f(x)$$

possède des solutions  $x \in E$  et s'il y a unicité. Ici  $x$  est l'inconnue du problème et  $y$  le "second membre". Ceci conduit naturellement aux définitions suivantes

**Définition 1.** On dit que  $f : E \rightarrow F$  est surjective lorsque

$$(\forall y \in F) (\exists x \in E) y = f(x).$$

On dit que  $f$  est injective lorsque

$$(\forall x \in E) (\forall x' \in E) (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x').$$

On dit que  $f$  est bijective lorsqu'elle est à la fois injective et surjective.

Il faut être précis avec ces questions : surjectivité et injectivité sont des notions relatives au contexte envisagé comme le montrent les exemples suivants:

Exemple 1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  n'est pas surjective puisque l'équation  $f(x) = y$  avec  $y = -1$ , autrement dit  $x^2 = -1$ , n'a pas de solution  $x \in \mathbb{R}$ .

Exemple 2.  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$ ,  $g(x) = x^2$  est surjective : l'équation  $x^2 = y$  possède toujours une solution  $x \in \mathbb{R}$  pour tout  $y \in [0, \infty[$ .

Exemple 3.  $h : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$ ,  $h(x) = x^2$  est surjective : l'équation  $x^2 = y$  possède toujours une solution  $x \in [0, \infty[$  pour tout  $y \in [0, \infty[$ .

Exemple 4.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  n'est pas injective puisque  $f(2) = f(-2) = 4$  et que  $2 \neq -2$  : l'équation  $f(x) = 4$  possède deux solutions distinctes. De même  $g$  n'est pas injective.

Exemple 5.  $h : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$ ,  $h(x) = x^2$  est injective : pour tout  $u, v \in [0, \infty[$  si  $u^2 = v^2$  alors  $u = v$ . Cet exemple montre que  $h$  est bijective : l'équation  $y = x^2$  possède une et une seule solution  $x \geq 0$  pour tout  $y \geq 0$ . Cette unique solution est notée  $\sqrt{y}$  et vérifie les deux propriétés suivantes :  $(\sqrt{y})^2 = y$  par construction, c'est à dire

$$h \circ \sqrt{\phantom{x}} = id_{[0, \infty[}.$$

De plus, pour  $y = x^2$  on obtient  $(\sqrt{x^2})^2 = x^2$  d'où, par injectivité,  $\sqrt{x^2} = x$  c'est à dire

$$\sqrt{\phantom{x}} \circ h = id_{[0, \infty[}.$$

On généralise cette approche dans la définition suivante

**Théorème 2.** Soit  $f : E \rightarrow F$  bijective. A tout  $y \in F$  on associe l'unique solution de l'équation  $f(x) = y$  que l'on note  $f^{-1}(y)$ . Ceci définit une application  $f^{-1} : F \rightarrow E$  qui vérifie les deux propriétés suivantes

$$f \circ f^{-1} = id_F \text{ et } f^{-1} \circ f = id_E.$$

On l'appelle la bijection (ou fonction) inverse de  $f$  ou bien la bijection (ou fonction) réciproque.

**Preuve.** La propriété  $f \circ f^{-1} = id_F$  signifie que  $f(f^{-1}(y)) = y$  pour tout  $y \in F$  ce qui provient de la définition de  $f^{-1}$ . Si l'on applique cette propriété à  $f(x)$  pour un  $x \in E$  donné, on obtient  $f(f^{-1}(f(x))) = f(x)$ . Puisque  $f$  est injective on obtient  $f^{-1}(f(x)) = x$  ou encore  $f^{-1} \circ f = id_E$ .  $\square$

**Théorème 3.** Soit  $f : E \rightarrow F$  et supposons qu'il existe une application  $g : F \rightarrow E$  qui vérifie

$$f \circ g = \text{id}_F \text{ et } g \circ f = \text{id}_E.$$

Alors  $f$  est bijective et  $g = f^{-1}$ .

**Preuve.** Montrons que  $f$  est surjective. Soit  $y \in F$  donné. Puisque  $f \circ g = \text{id}_F$  on a  $f(g(y)) = y$  c'est à dire  $f(x) = y$  pour  $x = g(y)$ . Montrons que  $f$  est injective. Supposons que  $f(u) = f(v)$ . En composant par  $g$  on a  $g(f(u)) = g(f(v))$  d'où  $u = v$  puisque  $g \circ f = \text{id}_E$ . On a enfin

$$g = g \circ \text{id}_F = g \circ (f \circ f^{-1}) = (g \circ f) \circ f^{-1} = \text{id}_E \circ f^{-1} = f^{-1}.$$

□

**Théorème 4.** Soit  $f : E \rightarrow F$  bijective. Sa fonction inverse  $f^{-1} : F \rightarrow E$  est aussi une bijection et  $(f^{-1})^{-1} = f$ .

**Preuve.** C'est une conséquence du théorème ?? :

$$f \circ f^{-1} = \text{id}_F \text{ et } f^{-1} \circ f = \text{id}_E$$

et du théorème ?? appliqué à  $f^{-1}$  au lieu de  $f$  et à  $f$  au lieu de  $g$ . □

**Théorème 5.** L'application identité  $\text{id}_E : E \rightarrow E$  est bijective. Elle est sa propre inverse.

**Preuve.** C'est une conséquence du théorème ?? appliqué à  $f = g = \text{id}_E$ . □

**Théorème 6.** Soient  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux bijections. La composée  $g \circ f : E \rightarrow G$  est aussi une bijection et  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ .

**Preuve.** C'est une conséquence du théorème ?? :

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \text{id}_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \text{id}_G.$$

Par un argument identique on a

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \text{id}_E.$$

L'unicité de l'inverse permet alors de conclure :  $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ . □

Une conséquence des théorèmes précédents, pour des applications  $f : E \rightarrow E$  est la suivante

**Théorème 7.** Notons  $\mathcal{S}_E$  l'ensemble des bijections  $f : E \rightarrow E$ . C'est un groupe pour la composition des applications dont l'identité est l'élément neutre : pour tout  $f, g$  et  $h \in \mathcal{S}_E$  on a

- (1)  $g \circ f \in \mathcal{S}_E$ ,
- (2)  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ ,
- (3)  $f \circ \text{id}_E = \text{id}_E \circ f$ ,
- (4)  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{id}_E$ .

Ce groupe est appelé le groupe symétrique de  $E$ .