Université Paul Sabatier. Premier semestre scientifique. Section B.
Deuxième contrôle de mathématique, 8 décembre 2003.
Documents et calculettes interdits à l'exception de la calculatrice UPS.
Durée de l'épreuve : 1 heure. Total sur 7 points.

Premier exercice, 1 point. Soit $u = (u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels et soit $l \in \mathbb{R}$. Quand dit-on que $\lim_{n\to\infty} u_n = l$? Quand dit-on que $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$?

Deuxième exercice, 2.5 points. Soit
$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + 2y + z = 0\}.$$
(1) Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
(2) Montrer que $v_1 = (-2, 1, 0)$ et $v_2 = (-1, 0, 1)$ constituent une base de P.
(3) Donner l'expression d'un vecteur $v_3 = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\{v_1, v_2, v_3\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Troisième exercice, 3.5 points. Etant donné deux nombres réels $0 < a \leq b$ on définit deux suites par
$$u_0 = a, \ v_0 = b, \ u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}, \ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$$
(1) Montrer que, quels que soient $x > 0$ et $y > 0$ on a
$$\frac{2xy}{x^2 + y^2} \leq 1.$$
(2) Montrer que, pour tout $n \geq 0$,
  (a) $0 < u_n$ et $0 < v_n$,
  (b) $u_n \leq v_n$,
  (c) $u_n \leq u_{n+1}$,
  (d) $v_{n+1} \leq v_n$.
(3) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent.
(4) Montrer que leurs limites sont égales.

Correction du contrôle 2.

Premier exercice.

1- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon.$

2- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow A \leq u_n.$

Deuxième exercice.

1- Il suffit de montrer que $\mathbf{0} = (0,0,0) \in P$ et que toute combinaison linéaire de deux éléments de P appartient à P.

1.1- $\mathbf{0} \in P$ car $1\times 0 + 2\times 0 + 1\times 0 = 0$.

2.1- Soient $u = (r,s,t) \in P$ et $v = (x,y,z) \in P$. Pour tous réels λ et μ on a $\lambda u + \mu v = (\lambda r + \mu x, \lambda s + \mu y, \lambda t + \mu z)$. Un calcul direct montre que $\lambda u + \mu v \in P$. En effet :

$$(\lambda r + \mu x) + 2(\lambda s + \mu y) + (\lambda t + \mu z) = \lambda(r + 2s + t) + \mu(x + 2y + z) = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0.$$

2- Pour montrer que v_1 et v_2 constituent une base de P, il faut montrer les trois propriétés suivantes : a) $v_1 \in P$ et $v_2 \in P$, b) v_1 et v_2 sont indépendants, c) tout vecteur de P est combinaison linéaire de v_1 et v_2.

a) Puisque $-2 + 2\times 1 + 0 = 0$ et $-1 + 2\times 0 + 1 = 0$, alors $v_1 \in P$ et $v_2 \in P$.

b) Montrons que $\lambda v_1 + \mu v_2 = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 0$. Or $\lambda v_1 + \mu v_2 = (-2\lambda - \mu, \lambda, \mu)$. Ce vecteur est nul si et seulement si $-2\lambda - \mu = 0, \quad \lambda = 0, \quad \mu = 0$. Donc $\lambda = \mu = 0$ et le système de vecteurs $\{v_1, v_2\}$ est libre.

c) Soit un vecteur $u = (x,y,z) \in P$. La relation $x + 2y + z = 0$ implique $x = -2y - z$. Donc $u = (-2y - z, y, z) = (-2y, y, 0) + (-z, 0, z) = yv_1 + zv_2$. Donc le système de vecteurs $\{v_1, v_2\}$ est un système générateur de P.

3- Le vecteur $v_3 = (1,0,0) \notin P$ car $1 + 2\times 2 + 1 \neq 0$. Pour montrer que le système de vecteurs $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ il suffit de montrer que ce système est libre. Or $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = (-2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1, \lambda_2)$. Si $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ alors $-2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$. Donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Troisième exercice.

1- L'inégalité provient des inégalités $x > 0$, $y > 0$ et $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$.

2- a) $u_0 = a > 0$ et $v_0 = b > 0$. Si $u_n > 0$ et $v_n > 0$ alors par définition de u_{n+1} et v_{n+1} on a $u_{n+1} > 0$ et $v_{n+1} > 0$. Donc pour tout $n \geq 0$, on a $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

b) On a $u_0 \leq a \leq v_0 = b$. Montrons $u_n \leq v_n \Rightarrow u_{n+1} \leq v_{n+1}$. De la question précédente on a $\dfrac{2\sqrt{u_n}\sqrt{v_n}}{u_n + v_n} \leq 1$ avec $x = \sqrt{u_n}$ et $y = \sqrt{v_n}$. En multipliant les deux membres de cette inégalité par $\sqrt{u_n}\sqrt{v_n}$ on obtient directement $u_{n+1} \leq v_{n+1}$. Donc pour tout $n \geq 0$, on a $u_n \leq v_n$.

c) On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - u_n = \frac{u_n(v_n - u_n)}{u_n + v_n}.$$

Le a) et le b) impliquent $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

d) On a

$$v_{n+1} - v_n = \sqrt{u_n v_n} - v_n = \sqrt{v_n}(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}).$$

Le a) et le b) impliquent $v_{n+1} - v_n \leq 0$.

3- La question 2 montre que

$$a = u_0 \leq u_1 \leq \ldots \leq u_n \leq v_n \leq \ldots \leq v_1 \leq v_0 = b.$$

La suite u, croissante et majorée, converge. Soit l_1 sa limite. De même la suite v, décroissante et minorée, converge. Soit l_2 sa limite. Alors $0 < a \leq l_1 \leq l_2 \leq b$.

4- Ces deux limites vérifient $l_2 = \sqrt{l_1 l_2}$. Donc $l_2^2 = l_1 l_2$. Puisque $l_2 > 0$ il vient $l_1 = l_2$.