

TD6 : Test de Wilcoxon et fonction de répartition

Exercice 1

Une classe de 18 élèves a été séparée en deux groupes de 10 et 8 élèves respectivement. Chacun de ces groupes a suivi une formation particulière et, à l'examen final, nous obtenons les notes suivantes dans chacun des groupes :

Groupe 1 : 7.3, 8.1, 9.9, 8.0, 10.7, 2.5, 15.8, 12.6, 5.6, 12.8

Groupe 2 : 5.2, 15.4, 16.4, 14.8, 14.3, 15.3, 10.3, 11.6

Nous souhaitons comparer ces notes afin de déterminer si une formation est meilleure que l'autre.

1. Classer les observations et calculer les rangs.
2. Construire et appliquer un test de Wilcoxon de niveau 5% pour tester si les notes sont similaires contre le fait que le groupe 2 ait eu de meilleurs résultats que le groupe 1.
3. Même question en inversant les groupes.
4. Conclure.

Exercice 2

Nous rappelons que la fonction de répartition d'une variable aléatoire X est l'application $F_X : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}(X \leq t)$.

1. Calculer la fonction de répartition F_U d'une variable uniforme U sur $[0, 1]$.
2. Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$, sa densité est la fonction $p_\theta(x) = \theta e^{-\theta x}$ pour $x > 0$. Calculer la fonction de répartition F_X de X .
3. Quelles sont les fonctions de répartition respectives des variables $X' = -\ln(1 - U)/\theta$ et $U' = 1 - e^{-\theta X}$? En déduire les lois de X' et de U' .
4. Quelle est la fonction de répartition de $V = U^2$? En déduire sa loi en donnant sa densité.

Loi de WILCOXON - Table des seuils
 $P(W(n1,n2) \leq w) \leq \alpha$

		$(\alpha \%)$						$(\alpha \%)$						$(\alpha \%)$									
n_1	n_2	5	2.5	1	0.5	n_1	n_2	5	2.5	1	0.5	n_1	n_2	5	2.5	1	0.5	n_1	n_2	5	2.5	1	0.5
1	1	0	0	0	0	1	9	0	0	0	0	1	13	0	0	0	0	1	16	0	0	0	0
1	2	0	0	0	0	2	9	4	3	2	2	2	13	5	4	3	2	2	16	6	4	3	2
2	2	2	2	2	2	3	9	10	8	7	6	3	13	12	10	8	7	3	16	14	12	9	8
1	3	0	0	0	0	4	9	16	14	13	11	4	13	20	18	15	13	4	16	24	21	17	15
2	3	2	2	2	2	5	9	24	22	20	18	5	13	30	27	24	22	5	16	34	30	27	24
3	3	6	5	5	5	6	9	33	31	28	26	6	13	40	37	33	31	6	16	46	42	37	34
1	4	0	0	0	0	7	9	43	40	37	35	7	13	52	48	44	41	7	16	58	54	49	46
2	4	2	2	2	2	8	9	54	51	47	45	8	13	64	60	56	53	8	16	72	67	62	58
3	4	6	5	5	5	9	9	66	62	59	56	9	13	78	73	68	65	9	16	87	82	76	72
4	4	11	10	9	9	10	10	82	78	74	71	10	13	92	88	82	79	10	16	103	97	91	86
1	5	0	0	0	0	1	10	0	0	0	0	11	13	108	103	97	93	11	16	120	113	107	102
2	5	3	2	2	2	2	10	4	3	2	2	12	13	125	119	113	109	12	16	138	131	124	119
3	5	7	6	5	5	3	10	10	9	7	6	13	13	142	136	130	125	13	16	156	150	142	136
4	5	12	11	10	9	4	10	17	15	13	12	1	14	0	0	0	0	14	16	176	169	161	155
5	5	19	17	16	15	5	10	26	23	21	19	2	14	6	4	3	2	15	16	197	190	181	175
1	6	0	0	0	0	6	10	35	32	29	27	3	14	13	11	8	7	16	16	219	211	202	196
2	6	3	2	2	2	7	10	45	42	39	37	4	14	21	19	16	14	1	17	0	0	0	0
3	6	8	7	5	5	8	10	56	53	49	47	5	14	31	28	25	22	2	17	6	5	3	2
4	6	13	12	11	10	9	10	69	65	61	58	6	14	42	38	34	32	3	17	15	12	10	8
5	6	20	18	17	16	10	10	82	78	74	71	7	14	54	50	45	43	4	17	25	21	18	16
6	6	28	26	24	23	11	11	0	0	0	0	8	14	67	62	58	54	5	17	35	32	28	25
1	7	0	0	0	0	12	11	4	3	2	2	9	14	81	76	71	67	6	17	47	43	39	36
2	7	3	2	2	2	13	11	11	9	7	6	10	14	96	91	86	81	7	17	61	56	51	47
3	7	8	7	6	5	14	11	18	16	14	12	11	14	112	106	100	96	8	17	75	70	64	60
4	7	14	13	11	10	15	11	27	24	22	20	12	14	129	123	116	112	9	17	90	84	78	74
5	7	21	20	18	16	16	11	37	34	30	28	13	14	147	141	134	129	10	17	106	100	93	89
6	7	29	27	25	24	17	11	47	44	40	38	14	14	166	160	152	147	11	17	123	117	110	105
7	7	39	36	34	32	18	11	59	55	51	49	1	15	0	0	0	0	12	17	142	135	127	122
1	8	0	0	0	0	19	11	72	68	63	61	2	15	6	4	3	2	13	17	161	154	146	140
2	8	4	3	2	2	20	11	86	81	77	73	3	15	13	11	9	8	14	17	182	174	165	159
3	8	9	8	6	5	21	11	100	96	91	87	4	15	22	20	17	15	15	17	203	195	186	180
4	8	15	14	12	11	22	12	0	0	0	0	5	15	33	29	26	23	16	17	225	217	207	201
5	8	23	21	19	17	23	12	5	4	2	2	6	15	44	40	36	33	17	17	249	240	230	223
6	8	31	29	27	25	24	12	11	10	8	7	7	15	56	52	47	44	1	18	0	0	0	0
7	8	41	38	35	34	25	12	19	17	15	13	8	15	69	65	60	56	2	18	7	5	3	2
8	8	51	49	45	43	26	12	28	26	23	21	9	15	84	79	73	69	3	18	15	13	10	8
1	9	0	0	0	0	27	12	38	35	32	30	10	15	99	94	88	84	4	18	26	22	19	16
2	9	6	5	4	4	28	12	49	46	42	40	11	15	116	110	103	99	5	18	37	33	29	26
3	9	15	14	12	11	29	12	62	58	53	51	12	15	133	127	120	115	6	18	49	45	40	37
4	9	25	23	21	20	30	12	75	71	66	63	13	15	152	145	138	133	7	18	63	58	52	49
5	9	37	34	30	28	31	12	89	84	79	76	14	15	171	164	156	151	8	18	77	72	66	62
6	9	51	49	45	43	32	12	104	99	94	90	15	15	192	184	176	171	9	18	93	87	81	76
7	9	67	64	60	58	33	12	120	115	109	105	10	18	219	211	202	196	10	18	110	103	96	92
8	9	85	82	78	76	34	12	147	141	134	129	11	18	249	240	230	223	11	18	127	121	113	108
9	9	106	103	97	93	35	12	178	171	163	155	12	18	280	270	259	252	12	18	146	139	131	125
10	9	131	127	120	115	36	12	219	211	202	196	13	18	311	300	288	280	13	18	166	158	150	144
11	9	159	154	146	140	37	12	271	260	248	236	14	18	343	331	318	306	14	18	187	179	170	163
12	9	191	185	176	169	38	12	334	322	309	296	15	18	376	363	349	336	15	18	208	200	190	184
13	9	227	220	210	202	39	12	387	374	360	346	16	18	411	397	382	367	16	18	231	222	212	206
14	9	267	259	248	236	40	12	449	435	420	405	17	18	447	432	416	401	17	18	255	246	235	228
15	9	303	294	282	270	41	12	524	509	493	477	18	18	484	468	451	435	18	18	280	270	259	252
16	9	347	337	324	311	42	12	617	601	584	567	19	18	533	516	498	481	19	18	311	300	288	280
17	9	399	388	374	359	43	12	730	713	695	677	20	18	594	576	557	539	20	18	343	331	318	306
18	9	459	447	432	416	44	12	865	847	828	809	21	18	667	648	628	609	21	18	376	363	349	336
19	9	527	514	498	481	45	12	1024	1005	985	965	22	18	753	733	712	691	22	18	411	397	382	367
20	9	603	589	572	554	46	12	1209	1189	1168	1147	23	18	854	833	811	789	23	18	447	432	416	401
21	9	689	674	656	637	47	12	1423	1402	1380	1358	24	18	971	949	926	903	24	18	484	468	451	435
22	9	787	771	752	732	48	12	1668	1646	1623	1600	25	18	1115	1092	1068	1044	25	18	533	516	498	481
23	9	899	882	862	841	49	12	1947	1924	1899	1874	26	18	1287	1263	1238	1213	26	18	594	576	557	539
24	9	1027	1009	988	966	50	12	2263	2239	2213	2187	27	18	1489	1464	1438	1412	27	18	667	648	628	609
25	9	1173	1154	1132	1109	51	12	2619	2594	2567	2540	28	18	1723	1697	1670	1643	28	18	753	733	712	691
26	9	1339	1319	1296	1272	52	12	3019	2993	2965	2937	29	18	1991	1964	1936	1908	29	18	854	833	811	789
27	9	1527	1506	1482	1457	53	12	3467	3440	3411	3382	30	18	2297	2269	2240	2211	30	18	971	949	926	903
28	9	1739	1717	1692	1666	54	12	3977	3949	3919	3888	31	18	2645	2616	2586	2555	31	18	1115	1092	1068	1044
29	9	2177	2154	2128	2101	55	12	4555	4526	4495	4463	32	18	3049	3019	2988	2956	32	18	1287	1263	1238	1213
30	9	2655	2631	2604	2576	56	12	5207	5177	5145	5112	33	18	3503	3472	3440	3407	33	18	1489	1464	1438	1412
31	9	3177	3152	3124	3095	57	12	5939	5908	5875	5841	34	18	4013	3981	3948	3914	34	18	1723	1697	1670	1643
32	9	3747	3721	3692	3662	58	12	6757	6725	6691	6656	35	18										