TD5 : Tests gaussiens

Exercice 1

Une usine fabrique des portes dont la hauteur, selon la norme, est de 2.5 mètres. Les machines n'étant pas parfaites, cette hauteur n'est pas toujours exactement respectée et il existe une certaine erreur de précision. Cette variabilité est modélisée par une loi gaussienne de moyenne m (valant 2.5 en principe) et de variance σ^2 inconnue. L'objectif va donc être de vérifier si la hauteur moyenne est bien de 2.5 mètres.

Pour cela, nous faisons mesurer $n = 101$ portes et nous notons $X_i(\omega)$ la hauteur de la $i^{\text{ème}}$ porte. On trouve les résultats suivants :

$$\overline{X}_n(\omega) = 2.4 \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}_n^2(\omega) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i(\omega) - \overline{X}_n(\omega)\right)^2 = 1.3 \times 10^{-4} \ .$$

1. Faire un test au niveau 5% de $\mathcal{H}_0 : m = 2.5$ contre $\mathcal{H}_1 : m \neq 2.5$.
2. L'usine a un contrat avec le fabriquant des machines qui assure que la précision est telle que $\sigma^2 \leqslant 10^{-4}$. Afin de vérifier ce contrat, tester l'hypothèse $\mathcal{H}_0 : \sigma^2 = 10^{-4}$ contre $\mathcal{H}_1 : \sigma^2 > 10^{-4}$ au niveau 5%.

Exercice 2

Nous nous intéressons à la charge de rupture d'un câble. En moyenne, cette charge inconnue vaut m et la variabilité autour de m peut être considérée comme étant gaussienne. Nous considérons donc un n-échantillon de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où m et σ^2 sont inconnues.

On observe indépendamment $n = 10$ câbles issus d'une fabrique et on obtient les charges de rupture suivantes :

$$100.51,\ 100.55,\ 101.45,\ 100.50,\ 100.05,\ 102.59,\ 101.45,\ 99.47,\ 101.35,\ 101.63\ .$$

Les normes de sécurité imposent que la charge de rupture soit supérieure ou égale à 103. Faire un test au niveau 5% de $\mathcal{H}_0 : m < 103$ contre $\mathcal{H}_1 : m \geqslant 103$. Les câbles de cette fabrique répondent-ils aux normes de sécurité ?

Des ingénieurs ont mis au point un nouveau procédé pour obtenir des câbles plus résistants que ceux de l'échantillon précédent. Nous avons observé les charges de rupture de 8 câbles fabriqués selon ce nouveau procédé :

$$102.94,\ 104.32,\ 101.70,\ 104.42,\ 103.59,\ 104.34,\ 102.07,\ 101.15\ .$$

1. Tester l'égalité des variances des deux échantillons au niveau 10%.
2. En supposant que les variances soient égales, tester au niveau 5% si le nouveau procédé est meilleur que l'ancien.

Exercice 3

Le bénéfice mensuel moyen d'une succursale d'une chaîne de magasins est égal à 50 000 euros. Afin d'augmenter les bénéfices, la direction de la chaîne met en place une nouvelle politique sur l'ensemble de ses succursales. On considère que la nouvelle politique est meilleure que l'ancienne si le bénéfice mensuel devient strictement supérieur à 50 000 euros. L'étude est menée sur 50 succursales pendant un an. On note X_i la variable aléatoire représentant le nouveau bénéfice mensuel moyen de la $i^{\text{ème}}$ succursale pendant cette année de test. On suppose les X_i indépendantes et de même loi mais pas nécessairement gaussienne. On obtient les résultats suivants :

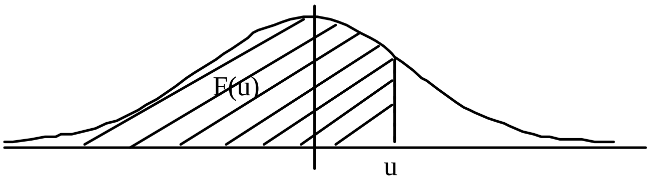
$$\overline{X}_n(\omega) = 52434 \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}_n^2(\omega) = 695 \ .$$

1. Si l'espérance des X_i vaut m, quelle est la loi asymptotique de

$$Z_n = \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - m}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2}} \ .$$

2. Tester au niveau asymptotique de 5% si la nouvelle politique est plus efficace que l'ancienne.

Variable NORMALE CENTREE REDUITE



$$U \approx N(0,1) \qquad P(\,U \approx u\,) = F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-x^2/2}\,dx$$

$F(-u) = 1 - F(u) \qquad P(|U| \leq u) = 2\,F(u) - 1$

TABLE de F(u) en fonction de u :

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

Table de la loi de Student

La table donne les valeurs des fractiles d'une loi de Fisher en fonction du nombre de degrés de liberté (1ère colonne) et pour différentes probabilités (1ère ligne).

Ce sont les valeurs u telles que $P(X \leq u) = \int_{-\infty}^{u} f_X(x)dx = \gamma$ où X suit une loi de Fisher à n degrés de liberté, dont on rappelle ici l'expression de la densité :

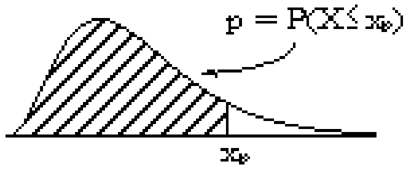
$$f_X(x) = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{n\ \pi}\ \Gamma(n/2)} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

La table donne donc les valeurs $F_n^{-1}(\gamma)$ où $F_n^{-1}(\gamma)$ est la fonction réciproque de la fonction de répartition d'une loi de Student à n degrés de liberté. Par exemple, on peut lire dans la table : $F_{10}^{-1}(0.95) = 1.812$.
Avec Excel, on utilise la fonction =LOI.STUDENT.INVERSE(2(1-γ); n) pour obtenir $F_n^{-1}(\gamma)$.
Avec R, la fonction : `qt(`γ, n`)` donne la valeur cherchée. Exemple : `qt(0.65,23)=0.390`.

n \ γ	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.999
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	63.656	318.289
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	9.925	22.328
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	5.841	10.214
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	4.604	7.173
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	4.032	5.894
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.707	5.208
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	3.499	4.785
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	3.355	4.501
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	3.250	4.297
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	3.169	4.144
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	3.106	4.025
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	3.055	3.930
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	3.012	3.852
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.977	3.787
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.947	3.733
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.921	3.686
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.898	3.646
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.878	3.610
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.861	3.579
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.845	3.552
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.831	3.527
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.819	3.505
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.807	3.485
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.797	3.467
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.787	3.450
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.779	3.435
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.771	3.421
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.763	3.408
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.756	3.396
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.750	3.385
32	0.255	0.530	0.853	1.309	1.694	2.037	2.738	3.365
34	0.255	0.529	0.852	1.307	1.691	2.032	2.728	3.348
36	0.255	0.529	0.852	1.306	1.688	2.028	2.719	3.333
38	0.255	0.529	0.851	1.304	1.686	2.024	2.712	3.319
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.704	3.307
42	0.255	0.528	0.850	1.302	1.682	2.018	2.698	3.296
44	0.255	0.528	0.850	1.301	1.680	2.015	2.692	3.286
46	0.255	0.528	0.850	1.300	1.679	2.013	2.687	3.277
48	0.255	0.528	0.849	1.299	1.677	2.011	2.682	3.269
50	0.255	0.528	0.849	1.299	1.676	2.009	2.678	3.261
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.660	3.232
70	0.254	0.527	0.847	1.294	1.667	1.994	2.648	3.211
80	0.254	0.526	0.846	1.292	1.664	1.990	2.639	3.195
90	0.254	0.526	0.846	1.291	1.662	1.987	2.632	3.183
100	0.254	0.526	0.845	1.290	1.660	1.984	2.626	3.174
200	0.254	0.525	0.843	1.286	1.653	1.972	2.601	3.131
500	0.253	0.525	0.842	1.283	1.648	1.965	2.586	3.107
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.576	3.091

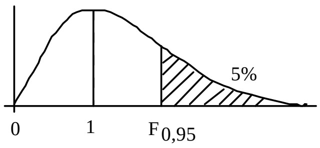
1 Table des quantiles de la v.a. Chi-Carré

Fournit les quantiles x_p tels que
$P(X \leq x_p) = p$
pour $X \sim \chi^2_n$



n / p	0,005	0,010	0,025	0,050	0,100	0,250	0,500	0,750	0,900	0,95	0,975	0,990	0,995
n													
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,10	0,45	1,32	2,71	3,84	5,02	6,64	7,88
2	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	0,58	1,39	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,07	0,11	0,22	0,35	0,58	1,21	2,37	4,11	6,25	7,82	9,35	11,35	12,84
4	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	1,92	3,36	5,39	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	2,67	4,35	6,63	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	3,45	5,35	7,84	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	4,25	6,35	9,04	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	5,07	7,34	10,22	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95
9	1,74	2,09	2,70	3,33	4,17	5,90	8,34	11,39	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,74	9,34	12,55	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,58	5,58	7,58	10,34	13,70	17,28	19,68	21,92	24,72	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	8,44	11,34	14,85	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	9,30	12,34	15,98	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,08	4,66	5,63	6,57	7,79	10,17	13,34	17,12	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	11,04	14,34	18,25	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,91	15,34	19,37	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	12,79	16,34	20,49	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,27	7,02	8,23	9,39	10,87	13,68	17,34	21,61	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	14,56	18,34	22,72	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	15,45	19,34	23,83	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	8,03	8,90	10,28	11,59	13,24	16,34	20,34	24,94	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	8,64	9,54	10,98	12,34	14,04	17,24	21,34	26,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	9,26	10,20	11,69	13,09	14,85	18,14	22,34	27,14	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
24	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	19,04	23,34	28,24	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	19,94	24,34	29,34	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93
26	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	20,84	25,34	30,43	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29
27	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	21,75	26,34	31,53	36,74	40,11	43,19	46,96	49,64
28	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	22,66	27,34	32,62	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99
29	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	23,57	28,34	33,71	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	24,48	29,34	34,80	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
40	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	33,66	39,34	45,62	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
50	27,99	29,71	32,36	34,76	37,69	42,94	49,33	56,33	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49
60	35,53	37,48	40,48	43,19	46,46	52,29	59,33	66,98	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
70	43,28	45,44	48,76	51,74	55,33	61,70	69,33	77,58	85,53	90,53	95,02	100,4	104,2
80	51,17	53,54	57,15	60,39	64,28	71,14	79,33	88,13	96,58	101,9	106,6	112,3	116,3
90	59,20	61,75	65,65	69,13	73,29	80,62	89,33	98,65	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	67,33	70,06	74,22	77,93	82,36	90,13	99,33	109,1	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

Variable de FISHER : F ≈F(n_1, n_2)



$$F = \frac{Y_1/n_1}{Y_2/n_2}$$ **où $Y_1 \approx \chi^2(n_1)$ et $Y_2 \approx \chi^2(n_2)$ indépendants**

Table du quantile $F_{0,95}$ en fonction de n_1 et n_2 : $P(F > F_{0,95}) = 5\%$

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16	20	24	30	40	50	100	200	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,43	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,69	8,66	8,64	8,62	8,59	8,58	8,56	8,54	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,84	5,80	5,77	5,75	5,72	5,70	5,66	5,65	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,60	4,56	4,53	4,50	4,46	4,44	4,40	4,38	4,37
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,92	3,87	3,84	3,81	3,77	3,75	3,71	3,69	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,49	3,44	3,41	3,38	3,34	3,32	3,28	3,25	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,20	3,15	3,12	3,08	3,04	3,03	2,98	2,96	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	2,98	2,94	2,90	2,86	2,83	2,80	2,76	2,73	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,82	2,77	2,74	2,70	2,66	2,64	2,59	2,56	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,70	2,65	2,61	2,57	2,53	2,50	2,45	2,42	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,60	2,54	2,51	2,47	2,43	2,40	2,35	2,32	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,51	2,46	2,42	2,38	2,34	2,32	2,26	2,24	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,44	2,39	2,35	2,31	2,27	2,24	2,19	2,16	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,39	2,33	2,29	2,25	2,20	2,18	2,12	2,10	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,33	2,28	2,24	2,19	2,15	2,13	2,07	2,04	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,29	2,23	2,19	2,15	2,10	2,08	2,02	1,99	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,25	2,19	2,15	2,11	2,06	2,04	1,98	1,95	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,21	2,16	2,11	2,07	2,03	2,00	1,94	1,91	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,18	2,12	2,08	2,04	1,99	1,96	1,90	1,87	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,15	2,10	2,05	2,01	1,96	1,93	1,87	1,84	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,13	2,07	2,03	1,98	1,94	1,91	1,84	1,81	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,10	2,05	2,01	1,96	1,91	1,88	1,82	1,79	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,09	2,03	1,98	1,94	1,89	1,86	1,80	1,76	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,06	2,01	1,96	1,92	1,87	1,84	1,77	1,74	1,71
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	1,99	1,93	1,89	1,84	1,79	1,76	1,69	1,66	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,90	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,59	1,55	1,51
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,02	1,95	1,85	1,78	1,74	1,69	1,63	1,60	1,52	1,48	1,44
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,10	2,03	1,97	1,92	1,85	1,75	1,68	1,63	1,57	1,51	1,48	1,39	1,34	1,28
200	3,89	3,04	2,65	2,41	2,26	2,14	2,05	1,98	1,92	1,87	1,80	1,69	1,62	1,57	1,52	1,45	1,42	1,32	1,26	1,19
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,64	1,57	1,52	1,46	1,40	1,35	1,24	1,17	1,00