TD3 : Estimation et intervalle de confiance I

Exercice 1

Considérons un n-échantillon $X_1, \dots, X_n$ de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où $m \in \mathbb{R}$ est inconnue et $\sigma^2 > 0$ est connue.

1. On se propose d'estimer m par $\overline{X}_n$. Cet estimateur est-il sans biais ? Est-il consistant ? Quelle est sa loi ?
2. Donner la loi de $\overline{X}_n - m$. En déduire un intervalle de confiance de la forme $]-\infty, Z]$ de niveau 1%.
3. Lors d'une expérience, nous avons observé les variables X_i pour $n = 10$. Une étude préalable nous a permis de considérer que $\sigma^2 = 1$. Voici les résultats obtenus :

$$495,\ 490,\ 492,\ 492,\ 494,\ 497,\ 499,\ 500,\ 502,\ 505\ .$$

   On nous dit que m doit être égal à 500, cette affirmation est-elle vraisemblable ?

Exercice 2

Considérons un n-échantillon $X_1, \dots, X_n$ de loi $\mathcal{N}(\theta, \theta(1-\theta))$ où $\theta \in]0,1[$ est inconnue.

1. Deux statisticiens se proposent d'estimer θ. Le premier utilise l'estimateur $\hat{\theta}_n = \overline{X}_n$ et le second $\tilde{\theta}_n = (\sum_{i=1}^n X_i^2)/n = (X_1^2 + \cdots + X_n^2)/n$. Ces deux estimateurs sont-ils sans biais ? Consistants ?
2. Montrer que ces deux estimateurs convergent en moyenne quadratique vers θ. On donne $\mathrm{Var}(X_1^2) = 2\theta^2(1-\theta)^2$.
3. Donner un intervalle de confiance asymptotique bilatère sur θ de niveau $1 - \alpha$.

Exercice 3

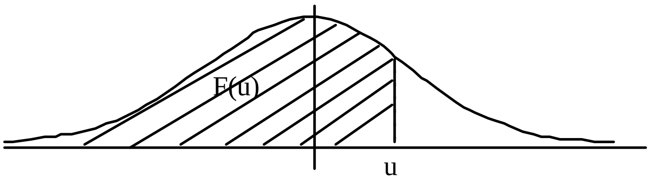
Considérons un n-échantillon $X_1, \dots, X_n$ de variables continues de densité

$$\forall x \in \mathbb{R},\ p_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{Kx^2}{\theta^3} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \theta\ , \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour un $\theta > 0$ inconnu.

1. Quelle doit être la valeur de K pour que p_θ soit une densité ?
2. Donner l'allure de la courbe de $x \mapsto p_\theta(x)$.
3. On pose
$$\hat{\theta}_n = \max_{i=1,\dots,n} X_i\ .$$
   $\hat{\theta}_n$ est-il un estimateur de θ ?
4. Calculer la fonction de répartition de $\hat{\theta}_n$. En déduire la densité de $\hat{\theta}_n$.
5. $\hat{\theta}_n$ est-il un estimateur sans biais de θ ? En déduire un estimateur sans biais de θ.

Variable NORMALE CENTREE REDUITE



$U \approx N(0,1)$ $\quad$ $P(U \approx u) = F(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{u} e^{-x^2/2} dx$

$F(-u) = 1 - F(u)$ $\quad$ $P(|U| \leq u) = 2\,F(u) - 1$

TABLE de F(u) en fonction de u :

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998