# TD1 : Rappels de probabilités

**Exercice 1**

Considérons $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{B}er(\theta)$ avec $\theta \in [0,1]$.

1) Calculer $\mathbb{E}[X_1]$ et $\mathrm{Var}(X_1)$.
2) Montrer que la loi de $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ est une $\mathcal{B}(n, \theta)$.
3) En déduire $\mathbb{E}[S_n]$ et $\mathrm{Var}(S_n)$.

**Exercice 2**

Considérons $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{P}(\theta)$ avec $\theta > 0$. On appelle transformée de Laplace d'une variable aléatoire $X$ la fonction

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \mathcal{L}_X(t) = \mathbb{E}[\exp(tX)]$$

et on admettra que cette fonction caractérise la loi de $X$.

1) Calculer $\mathbb{E}[X_1]$, $\mathrm{Var}(X_1)$ et $\mathcal{L}_{X_1}(t)$.
2) Calculer $\mathcal{L}_{S_n}(t)$ avec $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
3) En déduire la loi de $S_n$.

**Exercice 3 [Examen 2011]**

Une imprimerie vend des cartes de visite par paquet de 100. Une étude a conclu que la probabilité pour qu'une carte soit mal imprimée est $p = 0.015$. Nous notons $X$ la variable aléatoire correspondante au nombre de cartes mal imprimées dans un paquet.

1) Quelle est la loi de $X$ ? Calculer la probabilité $q = \mathbb{P}(X \geqslant 3)$ d'avoir au moins 3 cartes mal imprimées dans un paquet.

Cette imprimerie vend 250 paquets de cartes de visite par jour. Elle s'engage à donner suite à toute réclamation pour des paquets contenant au moins 3 cartes mal imprimées. Nous notons $Y$ la variable aléatoire correspondante au nombre de telles réclamations par jour.

2) Quelle est la loi de $Y$ ? En déduire le nombre moyen de réclamations par jour.

**Exercice 4**

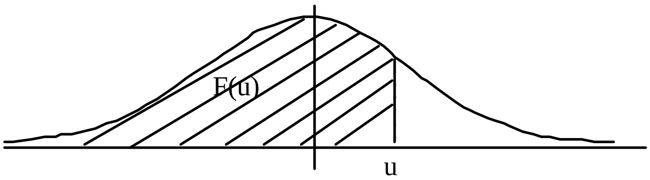
Une entreprise possède 10 usines en France. Pour chaque usine, on considère la production annuelle moyenne de l'année dernière que l'on note $p_i$ pour la $i^{\text{ème}}$ usine. On s'intéresse aux prévisions de l'année en cours pour chaque usine. Ainsi, on suppose que la production de la $i^{\text{ème}}$ usine pour la fin de l'année est une variable aléatoire $Y_i$ vérifiant

$$Y_i = p_i + \varepsilon_i$$

où $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ sont des *v.a.i.i.d.* de loi $\mathcal{N}(0, p_i^2/100)$.

1) Déterminer la loi de $Y_i$ et celle de $E_i = (Y_i - p_i)/p_i$.
2) Calculer la probabilité pour que l'erreur relative $|E_i|$ soit inférieure à 2%.
3) Soit $Z_T$ la variable aléatoire représentant la production totale des 10 usines. Donner la loi de $Z_T$ en fonction de $m_T = p_1 + \cdots + p_{10}$ et $\sigma_T^2 = p_1^2 + \cdots + p_{10}^2$.
4) On suppose que $\sigma_T^2/m_T^2 = 0.5$, quelle est la probabilité pour que l'erreur relative $F_T = |Z_T - m_T|/m_T$ soit inférieure à 5% ?

**Variable NORMALE CENTREE REDUITE**




$U \approx N(0,1)$ $\quad P(U \approx u) = F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-x^2/2} dx$

$F(-u) = 1 - F(u)$ $\quad P(|U| \leq u) = 2\,F(u) - 1$

TABLE de F(u) en fonction de u :

| u | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | 0,5199 | 0,5239 | 0,5279 | 0,5319 | 0,5359 |
| 0,1 | 0,5398 | 0,5438 | 0,5478 | 0,5517 | 0,5557 | 0,5596 | 0,5636 | 0,5675 | 0,5714 | 0,5753 |
| 0,2 | 0,5793 | 0,5832 | 0,5871 | 0,5910 | 0,5948 | 0,5987 | 0,6026 | 0,6064 | 0,6103 | 0,6141 |
| 0,3 | 0,6179 | 0,6217 | 0,6255 | 0,6293 | 0,6331 | 0,6368 | 0,6406 | 0,6443 | 0,6480 | 0,6517 |
| 0,4 | 0,6554 | 0,6591 | 0,6628 | 0,6664 | 0,6700 | 0,6736 | 0,6772 | 0,6808 | 0,6844 | 0,6879 |
| 0,5 | 0,6915 | 0,6950 | 0,6985 | 0,7019 | 0,7054 | 0,7088 | 0,7123 | 0,7157 | 0,7190 | 0,7224 |
| 0,6 | 0,7257 | 0,7291 | 0,7324 | 0,7357 | 0,7389 | 0,7422 | 0,7454 | 0,7486 | 0,7517 | 0,7549 |
| 0,7 | 0,7580 | 0,7611 | 0,7642 | 0,7673 | 0,7704 | 0,7734 | 0,7764 | 0,7794 | 0,7823 | 0,7852 |
| 0,8 | 0,7881 | 0,7910 | 0,7939 | 0,7967 | 0,7995 | 0,8023 | 0,8051 | 0,8078 | 0,8106 | 0,8133 |
| 0,9 | 0,8159 | 0,8186 | 0,8212 | 0,8238 | 0,8264 | 0,8289 | 0,8315 | 0,8340 | 0,8365 | 0,8389 |
| 1,0 | 0,8413 | 0,8438 | 0,8461 | 0,8485 | 0,8508 | 0,8531 | 0,8554 | 0,8577 | 0,8599 | 0,8621 |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | 0,8749 | 0,8770 | 0,8790 | 0,8810 | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | 0,8944 | 0,8962 | 0,8980 | 0,8997 | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | 0,9115 | 0,9131 | 0,9147 | 0,9162 | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | 0,9265 | 0,9279 | 0,9292 | 0,9306 | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | 0,9394 | 0,9406 | 0,9418 | 0,9429 | 0,9441 |
| 1,6 | 0,9452 | 0,9463 | 0,9474 | 0,9484 | 0,9495 | 0,9505 | 0,9515 | 0,9525 | 0,9535 | 0,9545 |
| 1,7 | 0,9554 | 0,9564 | 0,9573 | 0,9582 | 0,9591 | 0,9599 | 0,9608 | 0,9616 | 0,9625 | 0,9633 |
| 1,8 | 0,9641 | 0,9649 | 0,9656 | 0,9664 | 0,9671 | 0,9678 | 0,9686 | 0,9693 | 0,9699 | 0,9706 |
| 1,9 | 0,9713 | 0,9719 | 0,9726 | 0,9732 | 0,9738 | 0,9744 | 0,9750 | 0,9756 | 0,9761 | 0,9767 |
| 2,0 | 0,9772 | 0,9778 | 0,9783 | 0,9788 | 0,9793 | 0,9798 | 0,9803 | 0,9808 | 0,9812 | 0,9817 |
| 2,1 | 0,9821 | 0,9826 | 0,9830 | 0,9834 | 0,9838 | 0,9842 | 0,9846 | 0,9850 | 0,9854 | 0,9857 |
| 2,2 | 0,9861 | 0,9864 | 0,9868 | 0,9871 | 0,9875 | 0,9878 | 0,9881 | 0,9884 | 0,9887 | 0,9890 |
| 2,3 | 0,9893 | 0,9896 | 0,9898 | 0,9901 | 0,9904 | 0,9906 | 0,9909 | 0,9911 | 0,9913 | 0,9916 |
| 2,4 | 0,9918 | 0,9920 | 0,9922 | 0,9925 | 0,9927 | 0,9929 | 0,9931 | 0,9932 | 0,9934 | 0,9936 |
| 2,5 | 0,9938 | 0,9940 | 0,9941 | 0,9943 | 0,9945 | 0,9946 | 0,9948 | 0,9949 | 0,9951 | 0,9952 |
| 2,6 | 0,9953 | 0,9955 | 0,9956 | 0,9957 | 0,9959 | 0,9960 | 0,9961 | 0,9962 | 0,9963 | 0,9964 |
| 2,7 | 0,9965 | 0,9966 | 0,9967 | 0,9968 | 0,9969 | 0,9970 | 0,9971 | 0,9972 | 0,9973 | 0,9974 |
| 2,8 | 0,9974 | 0,9975 | 0,9976 | 0,9977 | 0,9977 | 0,9978 | 0,9979 | 0,9979 | 0,9980 | 0,9981 |
| 2,9 | 0,9981 | 0,9982 | 0,9982 | 0,9983 | 0,9984 | 0,9984 | 0,9985 | 0,9985 | 0,9986 | 0,9986 |
| 3,0 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9987 | 0,9988 | 0,9988 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9989 | 0,9990 | 0,9990 |
| 3,1 | 0,9990 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9991 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9992 | 0,9993 | 0,9993 |
| 3,2 | 0,9993 | 0,9993 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9994 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 |
| 3,3 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9995 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9996 | 0,9997 |
| 3,4 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9998 |