Modèles convexes et algorithmes d'optimisation en imagerie.

Pierre Weiss.

April 18, 2011

II/ Le principe du Maximum A Posteriori (MAP) et son application en reconstruction d'images.

Problèmes inverses : mal position

Hypothèses : Les données $u_0 \in \mathbb{R}^n$ sont obtenues à partir du modèle

$$u_0 = \mathcal{B}(Au)$$

où :

- $u \in \mathcal{H}$ est la donnée exacte
  (dans ce cours, on supposera que $\mathcal{H} = \mathbb{R}^m$).
- A est un opérateur linéaire ou affine (déterministe).
- $\mathcal{B}$ modélise les pertubations aléatoires.

Problème Inverse : retrouver u à partir de u_0.
Mal position : l'opérateur A :

- n'est pas de rang plein.
- a de petites valeurs singulières.
- est compact (cadre Hilbertien).

Problèmes inverses : mal position

Un problème mal posé typique : la déconvolution

$$u_0 = h \star u + b$$

- $u \in \mathbb{R}^n$: donnée exacte.
- $u_0 \in \mathbb{R}^n$: donnée observée.
- h : noyau de convolution.
- b : bruit gaussien de variance σ^2.

La déconvolution sans régularisation : $\hat{u_0} = \hat{h} \cdot \hat{u} + \hat{b} \simeq \hat{h} \cdot \hat{u}$.

Raisonnement fallacieux : $\hat{u} \simeq \frac{\hat{u}_0}{\hat{h}} \Rightarrow u \simeq \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\hat{u}_0}{\hat{h}}\right)$

Problèmes inverses : mal position

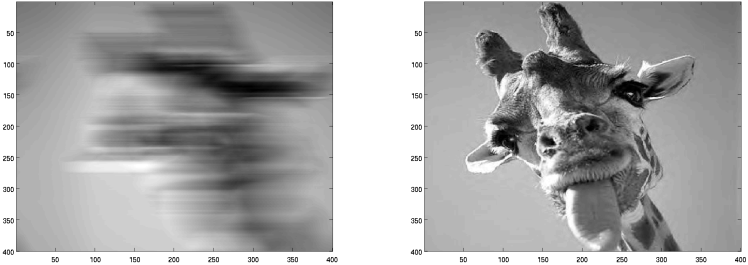


Figure: La déconvolution directe sans bruit.

Problèmes inverses : mal position

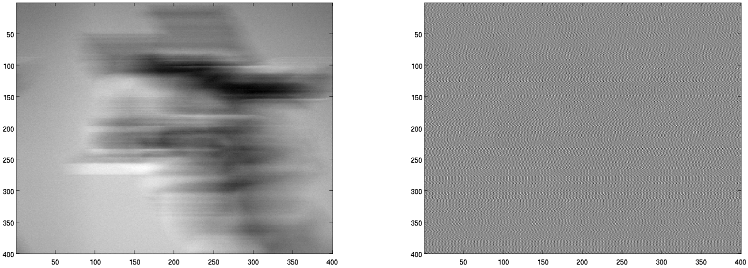


Figure: La déconvolution directe avec bruit.

Problème : si $|\hat{h}(\zeta)|$ est faible $\frac{\hat{b}(\zeta)}{|\hat{h}(\zeta)|}$ explose, et on amplifie fortement certaines fréquences.

Régularisation des problèmes inverses et MAP

L'idée du MAP :

On sait que :

$$u_0 = h \star u + b$$

Idée :

$$\text{Trouver} \quad u^* \in \arg\max_{u \in \mathbb{R}^n} P(u|u_0)$$

Loi de Bayes :

$$P(u|u_0) = \frac{P(u_0|u) \cdot P(u)}{P(u_0)}$$

Régularisation des problèmes inverses et MAP

Donc :

$$\begin{aligned}
& \arg\max_{u\in\mathbb{R}^n} P(u|u_0) & (1)\\
= \quad & \arg\max_{u\in\mathbb{R}^n} \frac{P(u_0|u)\cdot P(u)}{P(u_0)} & (2)\\
= \quad & \arg\min_{u\in\mathbb{R}^n} -\log\left(\frac{P(u_0|u)\cdot P(u)}{P(u_0)}\right) & (3)\\
= \quad & \arg\min_{u\in\mathbb{R}^n} -\log\left(P(u_0|u)\right) - \log\left(P(u)\right). & (4)
\end{aligned}$$

Que vaut $P(u_0|u)$?

Ca dépend des cas, mais en g{enéral, on peut le calculer.
Exemple : Bruit additif indépendant de u.

$$u_0 = Au + b$$

$$\begin{aligned} P(u_0|u) &= P(Au + b|u) && (5)\\ &= P(b). && (6) \end{aligned}$$

- Bruit blanc gaussien : $P(u_0|u) \propto \exp\left(-\frac{\|Au-u_0\|_2}{2\sigma^2}\right)$.
- Bruit blanc laplacien : $P(u_0|u) \propto \exp(-\lambda\|Au - u_0\|_1)$.
- Bruit blanc uniforme :
  $P(u_0|u) \propto \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \|Au - u_0\|_\infty \leq \alpha \\ 0 & \text{si } \|Au - u_0\|_\infty > \alpha \end{array} \right.$.

Que vaut $P(u)$? A priori sur les images naturelles.

Une question bien plus complexe !

1. Qu'est-ce qu'une image ?
2. Y'a-t-il un sens à définir une densité de probabilité sur l'espace des images ?
3. Doit-on se limiter a des classes d'images (e.g. les images de cerveau...) ?
4. Est-ce que les problèmes d'optimisation résultants peuvent être résolus ?

Que vaut $P(u)$? A priori sur les images naturelles.

Une question bien plus complexe !

1. Qu'est-ce qu'une image ?
2. Y'a-t-il un sens à définir une densité de probabilité sur l'espace des images ?
3. Doit-on se limiter a des classes d'images (e.g. les images de cerveau...) ?
4. Est-ce que les problèmes d'optimisation résultants peuvent être résolus ?

Dans cet exposé, on tranche hardiment, sans poésie :

1. Un tableau de pixels.
2. Peu importe puisqu'on vient de l'écrire !
3. Oui, des images "régulières" sur des ensembles à bords réguliers.
4. Bien sûr si $P(u) = \exp(-J(u))$ où J est convexe.

Que vaut $P(u)$? A priori sur les images naturelles.

Que vaut $P(u)$, la probabilité a priori des images?

Une longue histoire....
Mais deux types de probabilités a priori surnagent :

- Les a priori de parcimonie.
- Les a priori de régularité.

Modélisation des images : a priori de parcimonie

L'image $u \in \mathbb{R}^n$ s'écrit :

$$u = \sum_{i=1}^{m} y_i \underbrace{\psi_i}_{\text{“atome”}} = Ry$$

Avec

- $m \geq n$.
- $R = [\psi_1, \psi_2, ..., \psi_m]$ surjectif (notation Matlab).

La probabilité satisfait :

$$P(x) \propto \min_{y, Ry=x} ||y_i||_0$$

(Exemple de sinus + diracs).

Modélisation des images : a priori de parcimonie

N'a-t-on pas juste déplacé le problème?

Comment choisir R pour bien représenter les images ?

Modélisation des images : a priori de parcimonie

N'a-t-on pas juste déplacé le problème?
Comment choisir R pour bien représenter les images ?

- **Théorie de l'information :** La meilleure transformée pour représenter des fonctions C^2 par morceaux à bord C^2 est la transformée en **curvelets, bandlets...**
- **Expérimentalement :** choisir des transformées en ondelettes redondantes ou des unions de transformées harmoniques.

Modélisation des images : a priori de parcimonie

N'a-t-on pas juste déplacé le problème?
Comment choisir R pour bien représenter les images ?

- **Théorie de l'information :** La meilleure transformée pour représenter des fonctions C^2 par morceaux à bord C^2 est la transformée en **curvelets, bandlets...**
- **Expérimentalement :** choisir des transformées en ondelettes redondantes ou des unions de transformées harmoniques.

Ce sont des modèles assez grossiers!

Modélisation des images : a priori de parcimonie

Un exemple de MAP pour le débruitage :

$$\text{Trouver } \underset{y\in\mathbb{R}^n}{\arg\min} ||Ry - x^0||_2^2 + ||y||_0$$

Problème NP - complet.
$\Rightarrow$ **Relaxation convexe :**

$$\text{Trouver } \underset{y\in\mathbb{R}^n}{\arg\min} ||Ry - x^0||_2^2 + ||y||_1$$

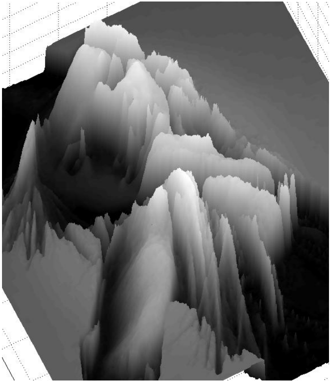
Problème d'optimisation convexe non lisse.

Modélisation des images : a priori de régularité

Une image est essentiellement "régulière"

Modélisation des images : a priori de régularité

Une image est essentiellement “régulière”



Modélisation des images : a priori de régularité

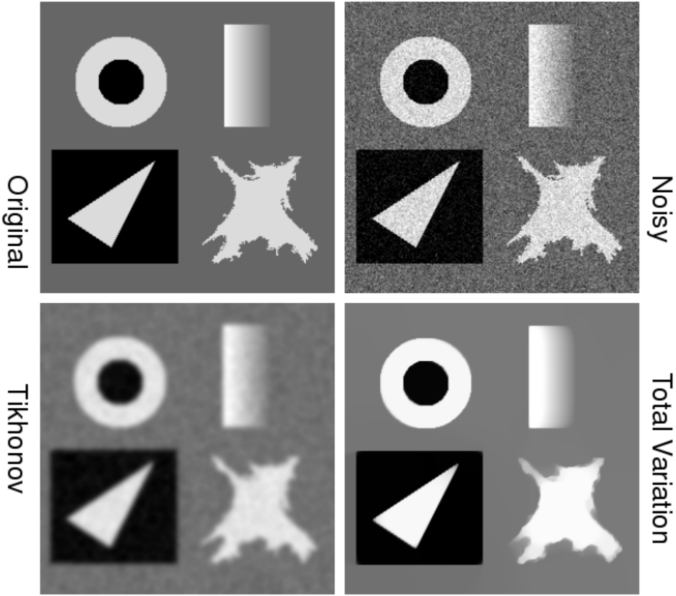
Si $P(x) = \exp(-J(x))$, alors le problème devient :

$$\operatorname*{arg\,min}_{x \in \mathcal{H}} ||Ax - x^0||_b + J(x)$$

Où J mesure la "régularité". Exemples :

$$\begin{array}{cc} \textbf{Continu} & \textbf{Discret} \\ J(x) = ||x||^2_{H^1(\Omega)} & J(x) = ||\nabla x||_2^2. \\ J(x) = TV(x) & J(x) = ||\nabla x||_1. \\ J(x) = ||x||_B (\text{Besov}) & J(x) = ||R^* x||_1 \end{array} \tag{7}$$

Modélisation des images : a priori de régularité



Modélisation des images : comparaison.

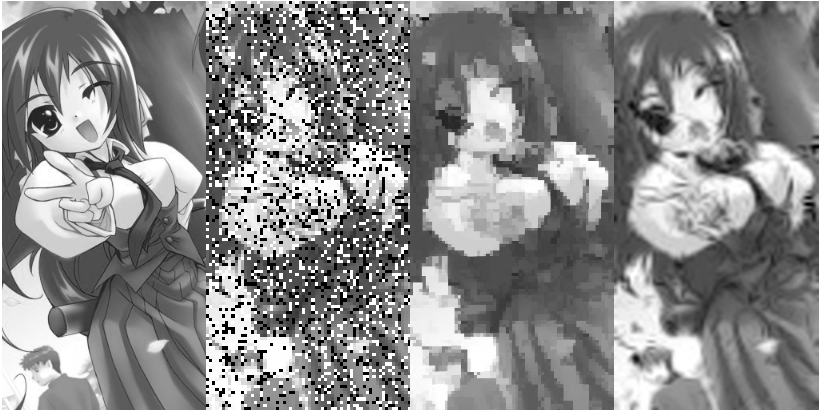


Figure: Comparaison a priori de régularité et a priori de parcimonie.

Modélisation des images : comparaison.

Résultat théorique : cas du débruitage

A priori de régularité :

$$\text{Soit } U = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\arg\min} ||x - x^0||_2^2 + ||Dx||_1$$

A priori de parcimonie :

$$\text{Soit } V = \underset{y \in \mathbb{R}^n}{\arg\min} ||Ry - x^0||_2^2 + ||y||_1$$

Théorème : *Pour tout D de rang plein, il existe R tel que pour tout x_0, $U = RV$.*

L'inverse n'est pas vrai !

Elad etal, Analysis versus synthesis in signal priors, Inverse Problems, vol. 23, n 3, p. 947-968, 2007.

Ecriture générale des problèmes inverses

$$\text{Trouver } \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\arg\min} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_i(A_i x - b_i)$$

Minimiser une somme de composées de fonction convexes avec des transformées affines... Ou

$$\text{Trouver } \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\arg\min} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_i(A_i x - b_i)$$

sous les contraintes :

$$\phi_k(B_k x - b_k) \leq \alpha_k \quad \forall k$$

(simplifie l'estimation de paramètres)

Analyse numérique : premières remarques

Difficultés numériques importantes

- Non différentiabilité.
- Dimensions gigantesques ($> 10^7$ inconnues).
- Contraintes de temps interactif/réel.

$\Rightarrow$

- Utilisation de méthodes de premier ordre.
- Obtenir des solutions de précision modérée.
- Obtenir des estimées de convergence