

PROCESSUS STATIONNAIRES ISOTROPES ET LEURS MESURES ALÉATOIRES ASSOCIÉES

Alain BOUDOU & Sylvie VIGUIER-PLA

*Equipe de Stat. et Proba., Institut de Mathématiques de Toulouse, UMR5219,
Université Paul Sabatier, 118 Route de Narbonne, F-31062 Toulouse Cedex 9, France*

Abstract

Many natural phenomena can be modeled by isotropic stationary processes. Such processes have been the interest of numerous authors, as for example Yadrenko (1983), Crujeiras et al. (2008), Stein (2005), Adler (1981) and Cucala et al. (2006).

It is well-known that each stationary process can be associated with one and only one random measure, by the Fourier Transform. Then, any property of a process expressed in the time domain has its counterpart in the frequential domain. We will, in this presentation, focus our interest on the structure of a random measure associated with such a process, when it is isotropic. Indeed, the isotropic property allows the decomposition of the random measure as a tensor product of two random measures, one for the radius, and the other for the direction. We study the properties of this structure.

We then can define classes of isotropic processes. We give an example of family of isotropic processes, and we illustrate it by simulation.

Key-words. Stationary processes, Random measure, Tensor product, Isotropy, Spectral measure

AMS Classification. 60G57, 60G10, 60B15, 60H05

Résumé

Beaucoup de phénomènes naturels peuvent être modélisés par des processus stationnaires isotropes. De nombreux auteurs se sont penchés sur ces derniers. Mentionnons par exemple les travaux de Yadrenko (1983), Crujeiras et al. (2008), Stein (2005), Adler (1981) et Cucala et al. (2006).

On sait qu'à tout processus stationnaire, on peut associer une et une seule mesure aléatoire, dont il est la transformée de Fourier. Ainsi, toute propriété d'un processus exprimée dans le domaine temporel a son équivalent dans le domaine fréquentiel. On va s'intéresser dans cet exposé à la structure d'une mesure aléatoire associée à un processus stationnaire, lorsqu'il est isotrope. En effet, la propriété d'isotropie permet de décomposer la mesure aléatoire en un produit tensoriel de deux mesures aléatoires, l'une concernant le rayon, l'autre la direction. Nous étudions les propriétés d'une telle structure.

Nous pouvons ainsi définir des classes de processus isotropes. Nous donnons un exemple de famille de processus isotropes, et nous l'illustrons par simulation.

1 Prérequis

Une mesure aléatoire (m.a.) définie sur ξ , tribu de parties d'un ensemble E , à valeurs dans H , \mathbb{C} -espace de Hilbert séparable, est une mesure vectorielle Z telle que $\langle ZA, ZB \rangle = 0$ pour tout couple (A, B) d'éléments disjoints de ξ .

On montre alors que l'application $\mu_Z : A \in \xi \mapsto \|ZA\|^2 \in \mathbb{R}^+$ est une mesure bornée que nous appellerons mesure spectrale de Z .

L'intégrale stochastique, relativement à la m.a. Z , peut se définir comme l'unique isométrie de $L^2(E, \xi, \mu_Z)$ sur $H_Z = \overline{\text{vect}\{ZA; A \in \xi\}}$ qui à 1_A , associe ZA , pour tout A de ξ . L'image d'un élément φ par cette application est notée $\int \varphi dZ$.

Si (E', ξ') est un deuxième espace mesurable et f une application mesurable de E dans E' , alors l'application $f(Z) : A' \in \xi' \mapsto Z(f^{-1}(A')) \in H$ est une m.a., appelée image de Z par f . Sa mesure spectrale est l'image $f(\mu_Z)$ de la mesure bornée μ_Z par f . Si φ' est un élément de $L^2(E', \xi', \mu_{f(Z)})$, alors $\varphi' \circ f$ appartient à $L^2(E, \xi, \mu_Z)$ et $\int \varphi' \circ f dZ = \int \varphi' \circ df(Z)$.

Si J est une application linéaire (resp. anti-linéaire) de H dans H' , qui conserve la norme, H' étant un second \mathbb{C} -espace de Hilbert séparable, alors

- a) $J \circ Z$ est une m.a., définie sur ξ à valeurs dans H' , de mesure spectrale μ_Z ;
- b) pour tout φ de $L^2(E, \xi, \mu_Z)$, on a $\int \varphi dJ \circ Z = J(\int \varphi dZ)$ (resp. $\int \varphi dJ \circ Z = J(\int \overline{\varphi} dZ)$).

2 Produit tensoriel de deux mesures spectrales

Soit donc Z (resp. Z') une m.a. définie sur ξ (resp. ξ'), tribu de parties de E (resp. E'), à valeurs dans le \mathbb{C} -espace de Hilbert séparable H (resp. H').

Lorsque φ est un élément de $L^2_H(E', \xi', \mu_{Z'})$, on peut affirmer que

- a) $\langle \varphi(\cdot), h \rangle$ appartient à $L^2(E', \xi', \mu_{Z'})$ pour tout h de H ;
- b) l'application $\int \varphi \otimes dZ' : h \in H \mapsto \int \langle \varphi(\cdot), h \rangle dZ'(\cdot) \in H'$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt appelé intégrale tensorielle de φ par rapport à la m.a. Z' ;
- c) l'application $\varphi \in L^2_H(E', \xi', \mu_{Z'}) \mapsto \int \varphi \otimes dZ' \in \sigma_2(H, H')$ est anti-linéaire et conserve la norme.

Lorsque ψ appartient à $L^2(E \times E', \xi \otimes \xi', \mu_Z \otimes \mu_{Z'})$, on peut vérifier que

- a) $\psi(\cdot, x')$ appartient à $L^2_H(E, \xi, \mu_Z)$, pour tout x' de E' ;
- b) l'application $\widehat{\psi} : x' \in E' \mapsto \int \psi(\cdot, x') dZ(\cdot) \in H$ est un élément de $L^2_H(E', \xi', \mu_{Z'})$;
- c) l'application $\psi \in L^2(\mu_Z \otimes \mu_{Z'}) \mapsto \widehat{\psi} \in L^2_H(E', \xi', \mu_{Z'})$ est linéaire et conserve le produit scalaire.

On peut donc considérer l'application $A \in \xi \otimes \xi' \mapsto \int \widehat{1}_A \otimes dZ' \in \sigma_2$. Compte-tenu de ce qui précède, on peut facilement établir que cette application, notée $Z \otimes Z'$, est une m.a. telle que

- a) $Z \otimes Z'(A \times A') = ZA \otimes Z'A'$, pour tout (A, A') de $\xi \times \xi'$;
- b) $\mu_{Z \otimes Z'} = \mu_Z \otimes \mu_{Z'}$;

c) $\int \psi dZ \otimes Z' = \int \widehat{\psi} \otimes dZ'$, pour tout ψ de $L^2(\mu_{Z \otimes Z'})$.

La m.a. $Z \otimes Z'$ présente une grande analogie avec le produit de deux mesures classiques, tant au niveau de la définition que des propriétés. En particulier, les règles d'intégration par rapport à une telle mesure évoquent le théorème de Fubini.

3 Application aux processus isotropes

Maintenant nous allons examiner comment la m.a. \mathcal{Z} associée à un processus stationnaire isotrope $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^k}$, à valeurs dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, c'est-à-dire l'unique m.a. dont il est la transformée de Fourier, est liée à une m.a. du type $Z \otimes Z'$. Pour cela, considérons les espaces $E = \mathbb{R}^k - \{0\}$ et $B = \{h \in \mathbb{R}^k; \|h\| = 1\}$. Par \mathcal{B}_E (resp. \mathcal{B}_B , resp. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}_+^*}$) nous désignerons la tribu de Borel de E (resp. B , resp. \mathbb{R}_+^*), par λ l'application continue $x \in E \mapsto \frac{x}{\|x\|} \in B$, et par n l'application continue $x \in E \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}_+^*$. L'application $D : x \in E \mapsto (\lambda x, nx) \in B \times \mathbb{R}_+^*$ et sa réciproque $T : (u, r) \in B \times \mathbb{R}_+^* \mapsto ru \in E$ réalisent un homéomorphisme entre les espaces topologiques E et $B \times \mathbb{R}_+^*$.

Nous appellerons également \mathcal{Z} l'application $A \in \mathcal{B}_E \mapsto \mathcal{Z}A \in L^2(\mathcal{A})$, qui est en fait une restriction de la m.a. \mathcal{Z} et est également une m.a. (car tout élément de \mathcal{B}_E est, en tant que sous-ensemble de \mathbb{R}^k , un élément de la tribu de Borel de \mathbb{R}^k).

L'isotropie du processus stationnaire $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^k}$ peut se définir de plusieurs façons équivalentes. En particulier, elle peut se définir par l'invariance de la mesure spectrale $\mu_{\mathcal{Z}}$ par rotation. On montre alors que cette dernière est telle que

- $\lambda \mu_{\mathcal{Z}} = \mu_{\lambda \mathcal{Z}} = \mu$, mesure uniformément répartie sur B ;
- $D \mu_{\mathcal{Z}} = \mu \otimes n \mu_{\mathcal{Z}} = \mu \otimes \mu_{n \mathcal{Z}}$.

Comme les applications $\mathcal{I}_1 : \varphi \in L^2(B \times \mathbb{R}_+^*) \mapsto \int \varphi dDZ \in H_{DZ}$ et $\mathcal{I}_2 : \varphi \in L^2(B \times \mathbb{R}_+^*) \mapsto \int \varphi d\lambda \mathcal{Z} \otimes n \mathcal{Z} \in \sigma_2(H_{\lambda \mathcal{Z}}, H_{n \mathcal{Z}})$ sont des isométries. Il en est de même de $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \circ \mathcal{I}_2^{-1}$.

Pour tout (A_1, A_2) de $\mathcal{B}_B \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+^*}$, il vient alors $\mathcal{I}(\lambda \mathcal{Z} A_1 \otimes n \mathcal{Z} A_2) = D(\mathcal{Z})(A_1 \times A_2)$.

D'où les égalités : $DZ = \mathcal{I} \circ (\lambda \mathcal{Z} \otimes n \mathcal{Z})$ et $\mathcal{Z} = T(\mathcal{I} \circ (\lambda \mathcal{Z} \otimes n \mathcal{Z}))$.

Compte-tenu des règles d'intégration, pour tout t de \mathbb{R}^k , il vient $\int e^{i \langle \cdot, t \rangle} dZ = \int (e^{i \langle \cdot, t \rangle} \circ T) d\lambda \mathcal{Z} \otimes n \mathcal{Z}$.

Les différentes règles d'intégration, par rapport à la m.a. $\lambda \mathcal{Z} \otimes n \mathcal{Z}$, permettent d'obtenir différents types de décomposition de $\int e^{i \langle \cdot, t \rangle} dZ$, selon que l'on intègre d'abord par rapport à $\lambda \mathcal{Z}$ ou par rapport à $n \mathcal{Z}$.

Ainsi, si pour tout t de \mathbb{R}^k on pose $Y_t = \int e^{i \langle \cdot, t \rangle} d\lambda \mathcal{Z}(\cdot)$, et pour tout s de \mathbb{R} on pose $N_s = \int e^{i \cdot s} dn \mathcal{Z}(\cdot)$, on obtient $\int e^{i \langle \cdot, t \rangle} dZ = \mathcal{I}(\int Y_{-rt} \otimes dn \mathcal{Z}(r)) = \mathcal{I}(\int N_{\langle u, t \rangle} \otimes d\lambda \mathcal{Z}(u))^*$.

Bien entendu, la m.a. $\lambda \mathcal{Z}$ concerne la direction et la m.a. $n \mathcal{Z}$ le rayon.

Nous sommes alors en mesure de définir différents types de processus stationnaires isotropes et de les simuler.

Mots-clés. Mesures aléatoires, Processus stationnaires, Produits tensoriels, Isotropie, Mesures spectrales

4 Exemple simulé

On considère une suite $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de variables aléatoires (v.a.) réelles centrées indépendantes définies dans l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) . Dans notre simulation, les $(V_n)_{n \in \{-m, \dots, m\}}$ seront des réalisations indépendantes d'une v.a. Gaussienne $N(0, \sigma^2 = 0.5)$.

On définit alors le processus aléatoire $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ comme suit : pour tout n de \mathbb{N}^* , $X_n = V_{2n} + iV_{2n+1}$, $X_{-n} = V_{2n} - iV_{2n+1}$, et $X_0 = \sqrt{2}V_0$.

On peut vérifier que $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc, et que, pour tout n de \mathbb{Z} , $\|X_n\| = 1$, et $X_n = (-1)^n \overline{X_{-n}}$.

Rappelons que, puisque $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une série stationnaire, il existe une m.a. et une seule, nommée \mathcal{Z} , définie sur la tribu de Borel \mathcal{B}_Π de $\Pi = [-\pi, \pi[$, telle que $X_n = \int e^{i \cdot n} d\mathcal{Z}$, pour tout n de \mathbb{Z} .

Soit v l'application $\theta \in \Pi \mapsto (\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{R}^2$, elle est continue et donc mesurable. Alors $v(\mathcal{Z})$ est une m.a. définie sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$, et nous pouvons considérer la fonction continue aléatoire stationnaire $X_{t_1, t_2} = (\int e^{i \cdot (t_1 + t_2)} dv(\mathcal{Z}))_{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2}$. Cette fonction est isotrope parce que :

$$\langle X_{t_1, t_2}, X_{0,0} \rangle = \int e^{i \cdot (t_1 + t_2)} d\mu_{v(\mathcal{Z})} = \int e^{i \cdot (t_1 + t_2)} \circ v d\mu_{\mathcal{Z}} = \int e^{i(t_1 \cos\theta + t_2 \sin\theta)} d\mu_{\mathcal{Z}}(\theta) = \int e^{i\sqrt{t_1^2 + t_2^2} \cos\theta} d\mu_{\mathcal{Z}}(\theta).$$

De plus, on peut montrer qu'elle est à valeurs réelles.

Examinons une approximation de cette fonction. Posons $X_{t_1, t_2}^{k, m}$ la v.a.

$$X_{t_1, t_2}^{k, m} = \sum_{n=-m}^m \sum_{q=0}^{k-1} e^{i(t_1 \cos(-\pi + q \frac{2\pi}{k}) + t_2 \sin(-\pi + q \frac{2\pi}{k}))} t_n^{k, q} X_n, \text{ où}$$

$$t_n^{k, q} = \frac{(-1)^n}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{k} e^{-i(2q+1) \frac{n\pi}{k}} = \langle \mathcal{Z}([-\pi + q \frac{2\pi}{k}, -\pi + (q+1) \frac{2\pi}{k}]), X_n \rangle, \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{Z}^*,$$

$$\text{et } t_0^{k, q} = \frac{1}{k} = \langle \mathcal{Z}([-\pi + q \frac{2\pi}{k}, -\pi + (q+1) \frac{2\pi}{k}]), X_0 \rangle.$$

On montre alors que $X_{t_1, t_2}^{k, m}$ "tend", quand k et m deviennent infiniment grands, vers X_{t_1, t_2} , grâce à l'inégalité :

$$\|X_{t_1, t_2} - X_{t_1, t_2}^{k, m}\| \leq \|X_{t_1, t_2} - X_{t_1, t_2}^k\| + \|X_{t_1, t_2}^k - X_{t_1, t_2}^{k, m}\| \leq \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \frac{2\pi}{k} + \frac{\sqrt{2k}}{\sqrt{m}}.$$

Prenant $\varepsilon > 0$, on peut choisir un entier k tel que $\sqrt{t_1^2 + t_2^2} \frac{2\pi}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$, et un entier m tel que $\frac{\sqrt{2k}}{\sqrt{m}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors nous avons :

$$\|X_{t_1, t_2} - X_{t_1, t_2}^{k, m}\| < \varepsilon.$$

Pour notre simulation, nous considérons plusieurs valeurs de m et k . Avec les inégalités précédentes, une précision $\varepsilon = 0.1$ est atteinte pour une valeur de m plus grande que 128000, et une valeur de k plus grande que 125. Cependant, empiriquement, la convergence vers une représentation stable de $X_{t_1, t_2}^{k, m}$ semble être atteinte pour de plus petites valeurs de m .

La figure 1 nous permet de nous faire une idée du comportement du processus simulé $X_{t_1, t_2}^{k, m}$ pour différentes valeurs de m et de k , dans le sous-ensemble $[-10, 10]^2$ de \mathbb{R}^2 .

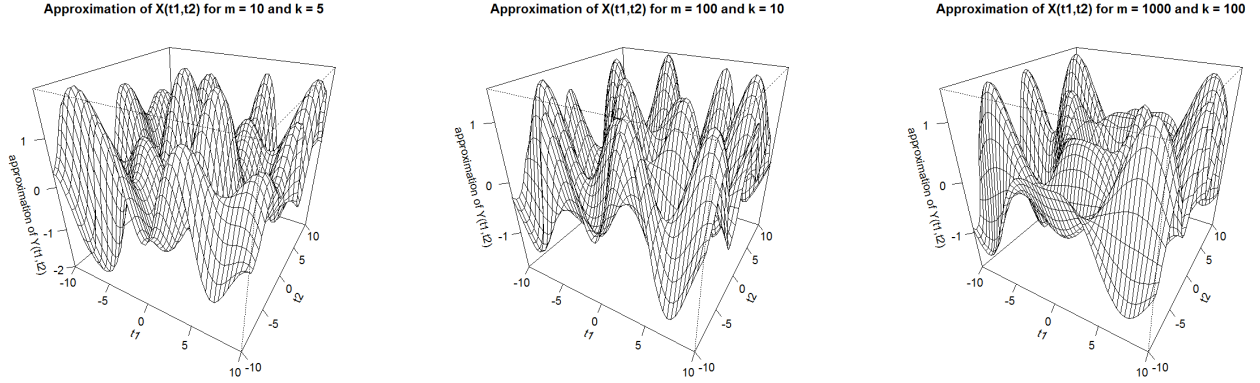


Figure 1 : Processus isotrope approché $X_{t_1, t_2}^{k, m}$ pour différentes valeurs de m et de k

Les graphes de la figure 2 montrent, pour un point arbitraire $(t_1, t_2) = (0.5, 0.5)$, comment les valeurs de $X_{t_1, t_2}^{k, m}$ convergent quand m grandit, k étant fixé, et de même, comment elles convergent quand k grandit, m étant fixé.

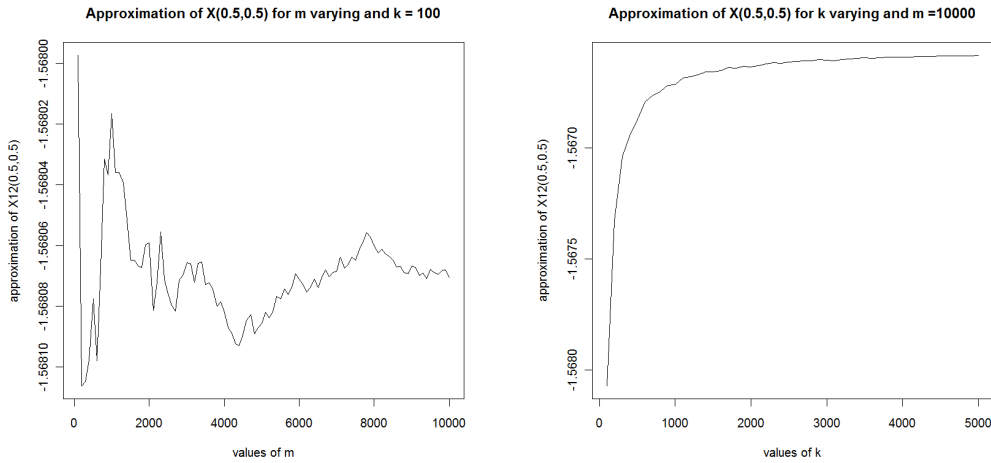


Figure 2 : Convergence du processus isotrope approché en un point de \mathbb{R}^2 .

La fonction de covariance, qui est uniquement une fonction du rayon, peut aussi être approchée. Plus précisément, $\langle X_{t_1, t_2}, X_{0,0} \rangle = \int e^{i\sqrt{t_1^2 + t_2^2} \cos \theta} d\mu_{\mathcal{Z}}(\theta)$ peut être approchée par $\sum_{q=0}^{k-1} \frac{2\pi}{k} e^{-i\sqrt{t_1^2 + t_2^2} \cos \frac{2\pi q}{k}}$, qui reste une fonction du rayon seulement (figure 3).

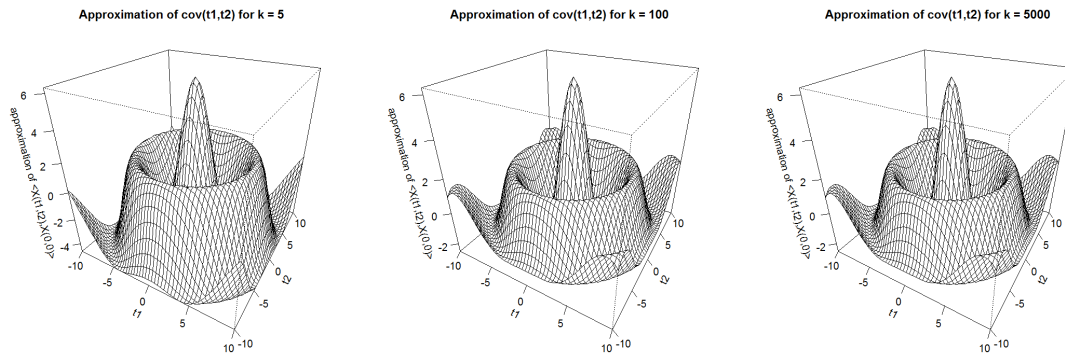


Figure 3 : Fonction de covariance approchée pour différentes valeurs de k

D'autres formes de processus isotropes peuvent ainsi être simulées, en remplaçant les v.a. de loi Gaussienne par n'importe quelle autre v.a., à condition que celle-ci admette un moment d'ordre 2, et que sa variance égale 0.5.

Bibliographie

- [1] Adler, R. J. (1981). *The geometry of random fields*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley and Sons, Ltd., Chichester.
- [2] Azencott, R. and Dacunha-Castelle, D. (1984). *Séries d'observations irrégulières*. Masson, Paris
- [3] Boudou, A. and Romain, Y. (2010). On the integral with respect to the tensor product of two random measures. *J. Multivariate Anal.* **2** 385-394.
- [4] Choquet, (1969). *Outils topologiques et métriques de l'Analyse mathématique*. Cours rédigé par Claude Meyer, C.D.U., Paris
- [5] Crujeiras, R. M., Fernández-Casal, R., González-Manteiga, W. (2008). An L_2 L_2 -test for comparing spatial spectral densities. *Statist. Probab. Lett.* **78** no. 15, 2543-2551.
- [6] Cucala, L., Thomas-Agnan, C. (2006). Spacings-based tests for spatial randomness and coordinate-invariant procedures. *Ann. I.S.U.P.* **50** no. 1-2, 31-45
- [7] Dacunha-Castelle, D. and Duflo, M. (1982). *Probabilités et Statistiques*. Masson.
- [8] Dehay, D. and Monsan, V. (2007) Discrete Periodic Sampling with Jitter and Almost Periodically Correlated Processes. *Stat. Infer. Stoch. Process.* **10** 223-253.
- [9] Letac, G. (1982) *Intégration et probabilités. Analyse de Fourier et analyse spectrale. Exercices*. Masson, Paris.
- [10] Matilla, P. (1995). *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces*. Cambridge, University press.
- [11] Rozanov, Yu. A. (1967). *Stationary Random Processes*. Holden-Day, Inc, San Francisco.

- [12] Schaefer, H. H. (1974). *Banach lattices and Positive Operators*. Springer-Verlag, New-York.
- [13] Shumway, R. H. and Stoffer, Da. S. (2006). *Stationary Time Series Analysis and its Applications*. Springer, New-York.
- [14] Stein, M. L. (2005). Space-time covariance functions. *J. Amer. Statist. Assoc.* **100** no. 469, 310-321.
- [15] Yadrenko, M. I (1983). *Spectral theory of random fields*. Translated from the Russian. Translation Series in Mathematics and Engineering. Optimization Software, Inc., Publications Division, New York.