

## Algèbre graduée associée à une valuation de $K[x]$

Michel Vaquié

### Abstract.

We extend to limit augmented valuations and limit key-polynomials some results on augmented valuations and key-polynomials. As any valuation  $\mu$  of  $K[x]$  is obtained as limit of an admissible family of valuations, we deduce a description of the graded algebra associated to  $\mu$ .

### §1. Valuation bien définie

Nous considérons un corps  $K$  muni d'une valuation  $\nu$ , nous supposons que le rang de la valuation  $\nu$  est fini, égal à  $r$ , et nous choisissons un plongement du groupe des valeurs  $\Gamma_\nu$  dans un groupe totalement ordonné  $\bar{\Gamma}$  isomorphe à  $(\mathbb{R}^s, +)_{\text{lex}}$ , avec  $s \geq r + 1$ . Toutes les valeurs finies  $\gamma$  que nous considérerons seront alors dans  $\bar{\Gamma}$ .

Nous appelons  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(K[x], \nu)$  l'ensemble des valuations ou pseudo-valuations de l'anneau des polynômes  $K[x]$  dont la restriction à  $K$  est égale à  $\nu$ , et nous appelons  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(K[x], \nu)$  l'ensemble des *familles admissibles* de valuations de  $K[x]$  appartenant à  $\mathcal{E}$ . Alors, à toute valuation ou pseudo-valuation  $\mu$  de  $\mathcal{E}$  nous pouvons associer une famille *admise*  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{F}$ , que nous notons  $\mathcal{A}(\mu)$ , nous rappelons que cette famille n'est pas unique mais définie à équivalence près. La famille  $\mathcal{A}$  est une famille admissible, c'est-à-dire est réunion de familles *admissibles simples*  $\mathcal{S}^{(j)}$ , pour  $j$  parcourant  $J$ , avec  $J = \{1, \dots, N\}$  ou  $J = \mathbb{N}^*$ , chaque famille simple  $\mathcal{S}^{(j)}$  étant constituée d'une partie *discrète*  $\mathcal{D}^{(j)}$  et d'une partie *continue*  $\mathcal{C}^{(j)}$ , la dernière famille continue  $\mathcal{C}^{(N)}$  pouvant être éventuellement vide.

Nous pouvons écrire la famille  $\mathcal{A}$  sous la forme  $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ , où  $I$  est un ensemble totalement ordonné, et nous disons que la famille  $\mathcal{A}$  est *complète* si l'ensemble  $I$  possède un plus grand élément  $\bar{i}$ , dans ce cas la

---

*Keywords.* valuations, local uniformization, resolution of singularities.

*2000 Mathematics Subject Classification.* 12J20, 13A18, 14B05, 14E15, 14J17.

valuation  $\mu$  est la valuation  $\mu_{\bar{\tau}}$ . Sinon, nous disons que la famille  $\mathcal{A}$  est *ouverte* et dans ce cas la valuation  $\mu$  n'appartient pas à la famille  $\mathcal{A}$ .

Nous rappelons que les valuations  $\mu_i$  de la famille  $\mathcal{A}$  sont définies comme *valuations augmentées* ou comme *valuations augmentées limites*. Dans le premier cas nous avons

$$\mu_i = [\mu_{i-1} ; \mu_i(\phi_i) = \gamma_i] ,$$

et  $\phi_i$  est un *polynôme-clé* définissant la valuation  $\mu_i$  à partir de la valuation  $\mu_{i-1}$ , et dans le deuxième cas nous avons

$$\mu_i = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu_i(\phi_i) = \gamma_i] ,$$

et  $\phi_i$  est un *polynôme-clé limite* définissant la valuation  $\mu_i$  à partir de la famille continue  $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ .

Nous renvoyons le lecteur aux articles [Va 1] et [Va 2] de l'auteur pour des définitions précises et pour les propriétés de ces valuations, de ces polynômes et de ces familles.

*Définition.* Si la famille  $\mathcal{A}$  associée à la valuation  $\mu$  est complète, nous disons que  $\mu$  est *bien définie*. Le polynôme-clé ou polynôme-clé limite  $\phi = \phi_{\bar{\tau}}$  définissant  $\mu$  comme valuation augmentée ou comme valuation augmentée limite est appelé le polynôme *définissant*  $\mu$ .

Soit  $\mu$  une valuation bien définie et soit  $\phi$  le polynôme qui la définit, nous pouvons alors écrire soit  $\mu = [\mu_0 ; \mu(\phi) = \gamma]$  si  $\mu$  est une valuation augmentée pour la valuation  $\mu_0$ , soit  $\mu = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu(\phi) = \gamma]$  si  $\mu$  est une valuation augmentée limite pour la famille continue  $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ . Dans le dernier cas, pour tout polynôme  $f$  tel que la famille de valeurs  $(\mu_\alpha(f))_{\alpha \in A}$  devient stationnaire, nous notons  $\mu_0(f) = \mu_A(f)$  la valeur limite de cette famille. Alors pour tout polynôme  $f$  de  $K[x]$ , si nous notons  $f = f_m \phi^m + \dots + f_0$  le développement de  $f$  selon les puissances de  $\phi$ , nous avons par définition:

$$\mu(f) = \text{Inf}(\mu_0(f_j) + j\gamma, 0 \leq j \leq m) ,$$

et de plus nous avons pour tout  $j$ ,  $\mu(f_j) = \mu_0(f_j)$ .

Nous avons alors la proposition suivante qui généralise les résultats de MacLane ([McL 1] Lemma 9.2 et [McL 2] Lemma 4.3).

**Proposition 1.1.** *Si  $\mu$  est une valuation bien définie, le polynôme  $\phi$  définissant  $\mu$  est un polynôme-clé pour la valuation  $\mu$ .*

*Preuve.* Soit  $f = f_m \phi^m + \dots + f_0$  le développement de  $f$  selon les puissances de  $\phi$ , alors nous avons:

$$\mu(f_0) \geq \mu(f) \quad \text{et} \quad \mu(f_0) > \mu(f) \iff \phi \underset{\mu}{|} f .$$

Nous en déduisons immédiatement que tout polynôme  $f$   $\mu$ -divisible par  $\phi$  est de degré supérieur ou égal au degré de  $\phi$ , c'est-à-dire que  $\phi$  est  $\mu$ -minimal.

Soient  $f$  et  $g$  deux polynômes qui ne sont pas  $\mu$ -divisibles par  $\phi$ , alors nous avons d'après ce qui précède  $\mu(f_0) = \mu(f)$  et  $\mu(g_0) = \mu(g)$ , où nous notons  $f_0$  et  $g_0$  les restes de la division euclidienne respectivement de  $f$  et  $g$  par  $\phi$ . Nous avons alors  $f_0g_0 = h'\phi + h_0$ , avec  $h'$  et  $h_0$  de degré strictement inférieur au degré de  $\phi$  et  $h_0$  est le reste de la division de  $h = fg$  par  $\phi$ . Si nous montrons que nous avons  $\mu(f_0g_0) = \mu(h_0)$ , alors nous pourrions en déduire l'égalité  $\mu(h) = \mu(h_0)$ , donc que  $h = fg$  n'est pas  $\mu$ -divisible par  $\phi$ , cela nous donnera la  $\mu$ -irréductibilité de  $\phi$ .

Dans le cas où  $\mu$  est une valuation augmentée, comme  $\phi$  est un polynôme-clé pour la valuation  $\mu_0$ , le produit  $f_0g_0$  n'est pas  $\mu_0$ -divisible par  $\phi$ , donc n'est pas  $\mu$ -divisible par  $\phi$  car  $\mu_0(f_0) = \mu(f_0)$  et  $\mu_0(g_0) = \mu(g_0)$ , par conséquent nous avons bien  $\mu(f_0g_0) = \mu(h_0)$ .

Dans le cas où  $\mu$  est une valuation augmentée limite, il existe  $\alpha$  dans  $A$  tel que pour tout  $\beta$  dans  $A$  vérifiant  $\beta \geq \alpha$  nous avons les égalités  $\mu_\beta = \mu_0 = \mu$  pour  $f_0, g_0$  et  $h_0$ . Si nous avions l'inégalité stricte  $\mu(f_0g_0) > \mu(h_0)$ , alors pour tout  $\beta \geq \alpha$  nous aurions  $\mu_\beta(h_0) = \mu_\beta(h'\phi)$ , ce qui est impossible car la famille  $(\mu_\beta(\phi))$  est strictement croissante.

Nous avons sur l'ensemble  $\mathcal{E}$  des valuations ou pseudo-valuations de  $K[x]$  prolongeant  $\nu$  deux relations d'ordre partiel  $\leq$  et  $\ll$  définies de la manière suivante:

$$\mu \leq \mu' \quad \text{si et seulement si} \quad \mu(f) \leq \mu'(f) \quad \text{pour tout } f \text{ dans } K[x],$$

$$\mu \ll \mu' \quad \text{si et seulement si} \quad \mathcal{A}(\mu) \text{ est une sous-famille de } \mathcal{A}(\mu').$$

Nous avons alors l'implication  $\mu \ll \mu' \Rightarrow \mu \leq \mu'$ , et de plus si nous notons  $\mathcal{A}(\mu)^*$  la famille de valuations obtenue à partir de  $\mathcal{A}(\mu)$  en lui enlevant la dernière valuation  $\mu_{\bar{\tau}} = \mu$  si la famille est complète, et égale à  $\mathcal{A}(\mu)$  sinon, nous avons l'implication  $\mu \leq \mu' \Rightarrow \mathcal{A}(\mu)^* \subset \mathcal{A}(\mu')$  (cf [Va 2]).

Le résultat précédent nous montre en particulier que toute valuation bien définie admet un polynôme-clé, nous avons en fait le résultat plus précis suivant.

**Proposition 1.2.** *Les propositions suivantes sont équivalentes:*

- 1) *La valuation  $\mu$  est bien définie.*
- 2) *La valuation  $\mu$  n'est pas maximale pour la relation d'ordre  $\leq$ .*
- 3) *La valuation  $\mu$  admet un polynôme-clé.*

4) La valuation  $\mu$  peut être obtenue comme valuation augmentée

$$\mu = [\mu_0 ; \mu(\phi) = \gamma],$$

ou comme valuation augmentée limite

$$\mu = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu(\phi) = \gamma].$$

Nous allons d'abord rappeler le lemme suivant (cf. [Va 2] Lemme 2.8).

**Lemme 1.3.** Soient  $\mu_0, \mu$  et  $\mu'$  trois valuations de  $K[x]$  vérifiant  $\mu_0 < \mu \leq \mu'$ . Nous appelons  $\tilde{\Phi}$ , respectivement  $\tilde{\Phi}'$ , l'ensemble des polynômes  $f$  de  $K[x]$  vérifiant  $\mu_0(f) < \mu(f)$ , respectivement  $\mu_0(f) < \mu'(f)$ . Alors les ensembles  $\tilde{\Phi}$  et  $\tilde{\Phi}'$  sont égaux.

*Preuve.* Nous appelons  $\Phi$  l'ensemble des polynômes unitaires  $\phi$  de degré minimal vérifiant  $\mu_0(\phi) < \mu(\phi)$ . Alors si nous choisissons  $\phi$  dans  $\Phi$ , un polynôme  $f$  appartient à  $\tilde{\Phi}$  si et seulement si il est  $\mu_0$ -divisible par  $\phi$ . De même nous appelons  $\Phi'$  l'ensemble des polynômes unitaires  $\phi'$  de degré minimal vérifiant  $\mu_0(\phi') < \mu'(\phi')$ , et il faut alors de montrer que  $\Phi \cap \Phi'$  est non vide. Comme nous avons  $\tilde{\Phi} \subset \tilde{\Phi}'$ , il suffit de montrer que les polynômes de  $\Phi$  et de  $\Phi'$  ont même degré.

Soient  $\phi$  et  $\phi'$  appartenant respectivement à  $\Phi$  et  $\Phi'$ , nous avons  $\phi$  appartient à  $\tilde{\Phi}'$  et  $\deg \phi \geq \deg \phi'$ . Soit  $\phi = \phi'q + r$  la division euclidienne de  $\phi$  par  $\phi'$ , alors comme  $\mu'(\phi) \geq \mu(\phi) > \mu_0(\phi)$  et comme  $\phi'$  est un polynôme-clé pour  $\mu_0$ , nous avons  $\phi$  qui est  $\mu_0$ -équivalent à  $\phi'q$ . Comme  $\phi$  est aussi un polynôme-clé pour  $\mu_0$  nous en déduisons  $\deg \phi \leq \deg \phi'$ , et par conséquent  $\phi$  appartient aussi à  $\Phi'$ .

*Preuve de la proposition.* Par définition nous avons 1) implique 4), et nous avons montré à la proposition 1.1 que 4) implique 3).

Les propriétés 2) et 3) sont équivalentes, en effet si la valuation  $\mu$  admet un polynôme-clé  $\phi$  pour toute valeur  $\gamma'$  strictement plus grande que  $\mu(\phi)$  nous pouvons définir la valuation augmentée  $\mu' = [\mu ; \mu'(\phi) = \gamma']$  qui vérifie  $\mu \leq \mu'$  et  $\mu \neq \mu'$ . Réciproquement si  $\mu'$  est une valuation avec  $\mu \leq \mu'$  et  $\mu \neq \mu'$ , nous pouvons en déduire l'existence d'un polynôme-clé  $\phi$  pour  $\mu$ , il suffit de choisir un polynôme unitaire de degré minimal vérifiant  $\mu'(\phi) > \mu(\phi)$ .

Montrons que 2) implique 1). Soit  $\mu$  une valuation qui n'est pas bien définie et nous supposons qu'il existe une valuation  $\mu'$  vérifiant  $\mu \leq \mu'$ . La famille admise  $\mathcal{A}(\mu)$  associée à  $\mu$  est alors une famille de la forme  $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$  où l'ensemble  $I$  n'a pas de plus grand élément, et pour tout  $i$  dans  $I$  nous avons  $\mu_i \leq \mu \leq \mu'$ . Pour tout polynôme  $f$  de  $K[x]$  il existe

$i_0$  dans  $I$  tel que pour tout  $i \geq i_0$  nous ayons  $\mu_{i_0}(f) = \mu_i(f) = \mu(f)$ , par conséquent si nous appelons comme précédemment  $\tilde{\Phi}(\mu_i)$ , respectivement  $\tilde{\Phi}'(\mu_i)$ , l'ensemble des polynômes  $f$  vérifiant  $\mu_i(f) < \mu(f)$ , respectivement  $\mu_i(f) < \mu'(f)$ , l'ensemble  $\bigcap_{i \in I} \tilde{\Phi}(\mu_i)$  est vide. Nous déduisons alors du lemme que l'ensemble  $\bigcap_{i \in I} \tilde{\Phi}'(\mu_i)$  est vide lui aussi, par conséquent la valuation  $\mu'$  est forcément égale à la valuation  $\mu$ .

*Remarque 1.1.* Nous déduisons de l'unicité, à équivalence près, de la famille admissible  $\mathcal{A}(\mu)$  associée à toute valuation  $\mu$  de  $K[x]$  et de la proposition précédente que si la valuation  $\mu$  peut être écrite comme valuation augmentée  $\mu = [\mu_0 ; \mu(\phi) = \gamma]$ , ou comme valuation augmentée limite  $\mu = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu(\phi) = \gamma]$ , alors la valuation  $\mu_0$ , ou la famille continue  $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ , apparaît dans la famille admissible  $\mathcal{A}(\mu)$  et est uniquement déterminée par  $\mu$ .

*Remarque 1.2.* Soit  $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$  une famille admissible continue de valuations de  $K[x]$ , et soient  $(\phi_\alpha)_{\alpha \in A}$  et  $(\gamma_\alpha)_{\alpha \in A}$  les familles respectivement de polynômes-clé et de valeurs associées à  $\mathcal{C}$ , et nous supposons que l'ensemble des valeurs  $\{\gamma_\alpha\}$  admet une borne supérieure  $\bar{\gamma}$  dans  $\bar{\Gamma}$ . Nous pouvons alors définir une valuation  $\mu = \text{Sup}\mu_\alpha$  par  $\mu(f) = \text{Sup}\mu_\alpha(f)$  pour tout  $f$  dans  $K[x]$ . Plus précisément, nous déduisons du théorème de factorisation ([Va 1] Théorème 1.19) qu'il existe un entier  $n \geq 0$ , une valeur  $\delta$  dans  $\bar{\Gamma}$  et  $\alpha_0$  dans  $A$  tels que pour tout  $\alpha \geq \alpha_0$  nous avons l'égalité  $\mu_\alpha(f) = \delta + n\gamma_\alpha$ . Par conséquent la valuation  $\mu = \text{Sup}\mu_\alpha$  existe si et seulement si l'ensemble  $\{\gamma_\alpha\}$  admet une borne supérieure et nous avons alors l'égalité  $\mu(f) = \delta + n\bar{\gamma}$ . Dans ce cas la valuation  $\mu = \text{Sup}\mu_\alpha$  est une valuation augmentée limite, associée à un polynôme-clé limite  $\phi$  et à la valeur  $\gamma = \text{Sup}\mu_\alpha(\phi)$  (cf. [Va 1] Proposition 1.28).

Par contre si nous avons une famille admissible discrète infinie  $\mathcal{D} = (\mu_i)_{i \in I}$  de valuations de  $K[x]$ , c'est-à-dire indexée par  $I = \mathbb{N}^*$ , nous pouvons encore définir la valuation limite  $\mu = \text{Sup}\mu_i$ . En effet pour tout polynôme  $f$  il existe  $i_0$  tel que la suite  $\mu_i(f)$  soit stationnaire pour  $i \geq i_0$ , il suffit d'avoir  $\deg f < \deg \phi_{i_0}$  où  $\phi_{i_0}$  est le polynôme-clé associé à la valuation  $\mu_{i_0}$ . Mais la valuation  $\mu$  construite ainsi n'est pas une valuation bien définie.

La proposition 1.1 énonce une propriété commune aux valuations augmentées et aux valuations augmentées limites. Nous allons étendre ce résultat et montrer que les valuations augmentées limites et les polynômes-clés limites ont d'autres propriétés équivalentes à celles des valuations augmentées et des polynômes-clés, telles qu'elles ont été données par MacLane ([McL 1] et [McL 2]).

Soit  $\mathcal{S}$  une famille admissible simple de valuations de  $K[x]$ , constituée de la partie discrète finie  $\mathcal{D} = (\mu_i)_{i \in I}$ , et de la partie continue  $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ . Les valuations  $\mu_\alpha$  sont des valuations augmentées de la forme  $\mu_\alpha = [\mu ; \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$ , où les polynômes-clés  $\phi_\alpha$  sont tous de même degré et où la famille de valeurs  $(\gamma_\alpha)_{\alpha \in A}$  est strictement croissante, de plus ces valuations ont même groupe des ordres  $\Gamma_{\mathbf{A}}$ .

Nous supposons que l'ensemble  $\tilde{\Phi}(A)$  des polynômes  $f$  vérifiant  $\mu_\alpha(f) < \mu_\beta(f)$  pour tout  $\alpha < \beta$  dans  $A$  est non vide. Rappelons que si un polynôme  $f$  n'appartient pas à  $\tilde{\Phi}(A)$ , c'est-à-dire s'il existe un couple  $\alpha < \beta$  dans  $A$  tel que  $\mu_\alpha(f) = \mu_\beta(f)$ , alors pour tout  $\alpha' \geq \alpha$  nous avons l'égalité  $\mu_{\alpha'}(f) = \mu_\alpha(f)$ , et nous notons  $\mu_A(f)$  cette valeur. Nous appelons  $d_A$  le degré minimal d'un polynôme de  $\tilde{\Phi}(A)$  et nous définissons l'ensemble  $\Phi(A)$  par:

$$\Phi(A) = \{ \phi \in K[x] \mid \mu_\alpha(\phi) < \mu_\beta(\phi) \forall \alpha < \beta \in A, \phi \text{ unitaire, } \deg \phi = d_A \}.$$

Alors tout polynôme  $\phi$  de  $\Phi(A)$  est un polynôme-clé limite pour la famille  $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ , et pour tout  $\gamma$  vérifiant  $\gamma > \mu_\alpha(\phi)$  pour tout  $\alpha$  dans  $A$ , nous pouvons définir la valuation, ou la pseudo-valuation dans le cas  $\gamma = +\infty$ , augmentée limite  $\mu'$  associée à  $\phi$  et à  $\gamma$ , que nous notons:

$$\mu' = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu'(\phi) = \gamma].$$

Dans la suite nous supposons que nous avons choisi un polynôme-clé limite  $\phi$  pour la famille  $\mathcal{C}$  et que nous avons défini une valuation augmentée limite  $\mu'$  associée à  $\phi$  et à une valeur  $\gamma$ .

*Remarque 1.3.* Pour tout polynôme  $f$  n'appartenant pas à  $\tilde{\Phi}(A)$ , par exemple pour  $f$  vérifiant  $\deg f < \deg \phi$ , il existe un polynôme  $g$ , avec  $\deg g < \deg \phi$ , tel que  $fg$  soit  $\mu'$ -équivalent à 1.

*Remarque 1.4.* Pour tout polynôme  $f$  nous pouvons définir, comme dans le cas d'un polynôme-clé et d'une valuation augmentée, le degré  $D_\phi(f)$  comme le plus grand entier  $d$ ,  $0 \leq d \leq m$ , tel que  $\mu'(f)$  soit égal à  $\mu_A(g_d) + d\gamma$ .

La démonstration que  $\mu'$  est une valuation nous donne que le degré est additif (cf. [Va 1] Proposition 1.22), c'est-à-dire vérifie:

$$D_\phi(fg) = D_\phi(f) + D_\phi(g).$$

**Proposition 1.4.** *Soit  $\phi'$  un polynôme unitaire de  $K[x]$  vérifiant  $\deg \phi' \geq \deg \phi$  et non  $\mu'$ -équivalent à  $\phi$ , et soit  $\phi' = f_m \phi^m + \dots + f_0$  son développement selon les puissances de  $\phi$ . Alors  $\phi'$  est un polynôme-clé pour la valuation  $\mu'$  si et seulement si*

- $\phi'$  est  $\mu'$ -irréductible,
- $f_m = 1$ , c'est-à-dire  $\phi' = \phi^m + \dots + f_0$ , et  $\mu'(\phi') = m\gamma = \mu_A(f_0)$ .

*Preuve.* La démonstration est identique à celle dans le cas où  $\mu'$  est une valuation augmentée associée à un polynôme-clé  $\phi$  (cf. [McL 1] Theorem 9.4, [Va 1] Théorème 1.11).

Soient  $\phi'$  un polynôme-clé pour une valuation  $\mu'$  de  $K[x]$  et  $\mu''$  une valuation augmentée associée au polynôme  $\phi'$  et à une valeur  $\gamma' > \mu'(\phi')$ ,  $\mu'' = [\mu' ; \mu''(\phi') = \gamma']$ , nous rappelons les hypothèses 1 et 2 introduites par MacLane (cf. [McL 1], [Va 1]).

*Hypothèse 1 pour la valuation  $\mu'$  et le polynôme  $\phi'$  :* Il existe  $q$  et  $q'$  dans  $K[x]$  vérifiant  $qq'$   $\mu'$ -équivalent à 1 et  $\mu'(q) = -\mu'(q') = \mu'(\phi')$ .

*Hypothèse 2 pour le couple de valuations  $(\mu', \mu'')$  :* Supposons que  $\gamma'$  appartienne à  $\Gamma_{\mu'} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  et appelons  $\tau$  le plus petit entier  $t > 0$  tel que  $t\gamma' \in \Gamma_{\mu'}$ , alors il existe  $p$  et  $p' = p'(\tau\gamma')$  dans  $K[x]$  vérifiant  $pp'$   $\mu''$ -équivalent à 1 et  $\mu''(p) = \mu'(p) = -\mu''(p') = -\mu'(p') = \tau\gamma'$ .

**Corollaire.** Soit  $\mu'$  une valuation augmentée limite de  $K[x]$  définie à partir de  $\phi$ , polynôme-clé limite pour la famille continue  $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ , alors s'il existe  $\phi'$  polynôme-clé pour la valuation  $\mu'$  vérifiant  $\deg\phi' \geq \deg\phi$  et qui n'est pas  $\mu'$ -équivalent à  $\phi$ ,  $\gamma$  appartient au groupe  $\Gamma_{\mathbf{A}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  et l'hypothèse 1 est vérifiée pour la valuation  $\mu'$  et le polynôme  $\phi'$ .

De plus si pour tout  $\delta$  dans  $\Gamma_{\mathbf{A}}$ , il existe un polynôme  $g$  dans  $K[x]$  avec  $\deg g < \deg\phi_\alpha$  et  $\mu_A(g) = \delta$ , alors de même pour tout  $\delta'$  dans  $\Gamma_{\mu'}$ , il existe un polynôme  $g'$  dans  $K[x]$  avec  $\deg g' < \deg\phi'$  et  $\mu'(g') = \delta'$ .

*Preuve.* La première partie est une conséquence immédiate de la proposition 1.4 et de la remarque 1.3.

Pour la deuxième partie, il suffit de remarquer que tout  $\delta'$  dans  $\Gamma_{\mu'}$  peut s'écrire sous la forme  $\delta' = \delta + t\gamma$  avec  $\delta$  appartenant à  $\Gamma_{\mathbf{A}}$  et  $0 \leq t < \tau$ , et que nous avons  $\deg\phi' = m \deg\phi$  avec  $m \geq \tau$ .

Soit  $\mathcal{A}$  une famille admissible de valuations de  $K[x]$ , nous considérons deux valuations  $\mu$  et  $\mu'$  appartenant à la même sous-famille admissible simple  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{A}$  telle que  $\mu'$  est obtenue comme valuation augmentée  $\mu' = [\mu ; \mu'(\phi') = \gamma']$ . Cela correspond au cas  $\mu = \mu_i$  et  $\mu' = \mu_{i+1}$  deux valuations successives appartenant à la partie discrète  $\mathcal{D}$ , au cas  $\mu = \mu_n$  dernière valuation de la partie discrète  $\mathcal{D}$  et  $\mu' = \mu_\alpha$  une valuation quelconque de la partie continue  $\mathcal{C}$ , ou au cas de deux valuations  $\mu = \mu_\alpha$  et  $\mu' = \mu_\beta$  de la partie continue  $\mathcal{C}$  avec  $\alpha < \beta$ .

*Définition.* Nous appelons un couple de valuations  $(\mu, \mu')$  vérifiant la propriété précédente un couple de valuations successives de la famille admissible  $\mathcal{A}$ .

**Proposition 1.5.** *Soit  $\mathcal{A}$  une famille admissible de valuations de  $K[x]$ , alors pour tout couple  $(\mu, \mu')$  de valuations successives de  $\mathcal{A}$ , l'hypothèse 1 est vérifiée pour la valuation  $\mu$  et pour le polynôme-clé  $\phi'$  définissant  $\mu'$ , et si  $\mu'$  n'est pas la dernière valuation de la famille  $\mathcal{A}$  l'hypothèse 2 est vérifiée pour le couple  $(\mu, \mu')$ .*

*Preuve.* Nous savons que si  $(\mu_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une famille finie de valuations augmentées itérées associée à une famille  $(\phi_i)_{2 \leq i \leq n}$  de polynômes-clés et à une famille  $(\gamma_i)_{2 \leq i \leq n}$  de valeurs, telle que la valuation  $\mu_1$  vérifie la propriété suivante:

$$\forall \delta \in \Gamma_{\mu_1} \quad \exists g \in K[x] \text{ avec } \deg g < \deg \phi_2 \text{ tel que } \mu_1(g) = \delta ,$$

alors pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n - 1$ , l'hypothèse 1 est vérifiée pour la valuation  $\mu_i$  et le polynôme  $\phi_{i+1}$ , et pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq n - 2$ , l'hypothèse 2 est vérifiée pour le couple de valuations  $(\mu_i, \mu_{i+1})$  (cf. [McL 1] Theorem 12.1, [Va 1] Corollaire au Théorème 1.11).

Nous voyons en particulier que si  $\mathcal{S}$  est une sous-famille admissible simple de  $\mathcal{A}$  telle que la première valuation  $\mu_1$  de  $\mathcal{S}$  vérifie la propriété précédente, la proposition est vérifiée pour tout couple de valuations successives appartenant à  $\mathcal{S}$ . Si la famille  $\mathcal{S}$  est la première sous-famille simple de  $\mathcal{A}$  alors cette propriété est vérifiée car la valuation  $\mu_1$  est obtenue de manière similaire à une valuation augmentée à partir de la valuation  $\nu$  de  $K$  et d'un polynôme de degré un (cf. [McL 1], [Va 1]).

Si la famille  $\mathcal{S}$  n'est pas la première sous-famille simple de  $\mathcal{A}$ , alors la première valuation  $\mu_1$  de  $\mathcal{S}$  est une valuation augmentée limite et la propriété est vérifiée d'après le corollaire à la proposition 1.4.

## §2. Algèbre graduée

Pour toute valuation  $\mu$  de  $K[x]$ , nous notons  $\text{gr}_\mu K[x]$  l'algèbre graduée associée et nous notons  $\Delta_\mu$  sa composante  $(\text{gr}_\mu K[x])_0$  de degré 0. Rappelons que si  $\mu'$  est une valuation augmentée  $\mu' = [\mu ; \mu'(\phi) = \gamma]$  ou une valuation augmentée limite  $\mu' = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} ; \mu'(\phi) = \gamma]$ , nous pouvons déterminer l'algèbre graduée  $\text{gr}_{\mu'} K[x]$  associée à la valuation  $\mu'$  à partir de celle associée à la valuation  $\mu$ , ou à celles associées aux valuations  $\mu_\alpha$  ([Va 1] Théorème 1.7 et Théorème 1.26).

Plus précisément si  $\mu'$  est une valuation augmentée pour  $\mu$  définie par le polynôme-clé  $\phi$ ,  $\mu' = [\mu ; \mu'(\phi) = \gamma]$ , l'application naturelle  $g$  de  $\text{gr}_\mu K[x]$  dans  $\text{gr}_{\mu'} K[x]$  induit un isomorphisme

$$G: (\text{gr}_\mu K[x]/(H_\mu(\phi)))[T] \longrightarrow \text{gr}_{\mu'} K[x] ,$$

qui envoie  $T$  sur  $G(T) = H_{\mu'}(\phi)$ .

Si nous supposons que l'hypothèse 1 est vérifiée pour la valuation  $\mu$  et le polynôme-clé  $\phi$ , alors le noyau de la composante de degré 0  $g_0: \Delta_\mu \rightarrow \Delta_{\mu'}$  est l'idéal engendré par  $\varphi = H_\mu(q'\phi)$ , et nous avons si  $\gamma$  n'appartient pas à  $\Gamma_\mu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$$\Delta_{\mu'} \simeq (\Delta_\mu/(\varphi)) ,$$

si  $\gamma$  appartient à  $\Gamma_\mu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  et si l'hypothèse 2 est vérifiée pour le couple  $(\mu, \mu')$

$$\Delta_{\mu'} \simeq (\Delta_\mu/(\varphi))[S] ,$$

avec  $S = H_{\mu'}(p'(\tau\gamma)\phi^\tau)$  (cf. [Va 1] Remarque 1.5).

Nous avons un résultat similaire pour une valuation augmentée limite  $\mu' = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu'(\phi) = \gamma]$ . Soit  $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$  une famille continue de valuations, et nous pouvons toujours supposer que  $A$  admet un plus petit élément  $\theta$ , ce qui permet d'écrire toute valuation  $\mu_\alpha$  de  $\mathcal{C}$  comme valuation augmentée  $\mu_\alpha = [\mu_\theta ; \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$ , où tous les polynômes-clés  $\phi_\alpha$  sont de même degré  $d$ . Tous les groupes de valuation  $\Gamma_{\mu_\alpha}$  sont égaux et nous notons ce groupe  $\mathbf{\Gamma}_A$ , de plus nous faisons l'hypothèse suivante.

*Hypothèse 3 pour la famille  $\mathcal{C}$*  : Pour tout  $\gamma$  dans  $\mathbf{\Gamma}_A$  il existe  $p$  et  $p' = p'(\gamma)$  dans  $K[x]$  vérifiant  $pp'(\gamma) \sim 1$  et  $\mu_\theta(p) = -\mu_\theta(p'(\gamma)) = \gamma$ .

Nous remarquons que pour tout  $\alpha$  dans  $A$ , l'image  $H_{\mu_\alpha}(\phi_\beta)$  du polynôme-clé  $\phi_\beta$  dans l'algèbre graduée  $\text{gr}_{\mu_\alpha} K[x]$  ne dépend pas de  $\beta > \alpha$ . De plus grâce à l'hypothèse 3 pour la famille  $\mathcal{C}$ , nous pouvons trouver  $p'(\gamma_\alpha)$  dans  $K[x]$  dont l'image dans  $\text{gr}_{\mu_\alpha} K[x]$  est inversible et de poids  $-\gamma_\alpha = -\mu_\alpha(\phi_\beta)$ . Nous notons  $\varphi_{\alpha+}$  l'image de  $p'(\gamma_\alpha)\phi_\beta$  dans  $\text{gr}_{\mu_\alpha} K[x]$ , c'est un élément de degré 0 qui engendre le même idéal que  $H_{\mu_\alpha}(\phi_\beta)$ .

Si nous posons:

$$\mathbf{gr}_A = \text{gr}_{\mu_\theta} K[x]/(\varphi_{\theta+}) ,$$

alors pour tout  $\alpha > \theta$ , l'algèbre  $\text{gr}_{\mu_\alpha} K[x]$  est isomorphe à l'anneau de polynômes  $\mathbf{gr}_A[T_\alpha]$  avec  $T_\alpha = H_{\mu_\alpha}(\phi_\alpha)$ .

Alors pour tout  $\alpha > \theta$  l'algèbre quotient  $\text{gr}_{\mu_\alpha} K[x]/(\varphi_{\alpha+})$  est aussi isomorphe à  $\mathbf{gr}_A$  et pour tout  $\beta > \alpha$ , le morphisme d'algèbres graduées  $\text{gr}_{\mu_\alpha} K[x] \rightarrow \text{gr}_{\mu_\beta} K[x]$  se factorise par:

$$\begin{array}{ccccc} \text{gr}_{\mu_\alpha} K[x] & \xrightarrow{U_\alpha} & \text{gr}_{\mu_\alpha} K[x]/(\varphi_{\alpha+}) & \xrightarrow{V_\beta} & \text{gr}_{\mu_\beta} K[x] \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \mathbf{gr}_A[T_\alpha] & \xrightarrow{u_\alpha} & \mathbf{gr}_A & \xrightarrow{v_\beta} & \mathbf{gr}_A[T_\beta] \end{array}$$

où  $v_\beta$  est le morphisme naturel mais où  $u_\alpha$  n'est pas un morphisme de  $\mathbf{gr}_A$ -algèbres, en particulier son noyau n'est pas  $(T_\alpha)$ . Mais nous pouvons remarquer que le morphisme composé  $U_\beta \circ V_\beta$  de  $\mathbf{gr}_{\mu_\alpha} K[x]/(\varphi_{\alpha+}) \simeq \mathbf{gr}_A$  dans  $\mathbf{gr}_{\mu_\beta} K[x]/(\varphi_{\beta+}) \simeq \mathbf{gr}_A$  est un isomorphisme.

En effet  $U_\beta \circ V_\beta$  est injectif car si nous avons l'égalité  $\mu_\alpha(f) = \mu_\beta(f)$  alors pour tout  $\beta' > \beta$  nous avons encore  $\mu_\beta(f) = \mu_{\beta'}(f)$ . Et  $U_\beta \circ V_\beta$  est surjectif car pour tout  $\beta' > \beta$ , le polynôme-clé  $\phi_{\beta'}$  est égal à  $\phi_\beta - h$  avec  $\deg h < \deg \phi_\beta$ , par conséquent  $T_\beta - H_{\mu_\beta}(h)$  appartient à l'idéal  $(\varphi_{\beta+})$ .

Nous appelons  $\Delta_A$  la partie homogène de degré 0 de  $\mathbf{gr}_A$ , alors comme  $\varphi_{\theta+}$  est de degré nul, nous avons:

$$\Delta_A \simeq \Delta_\theta / (\varphi_{\theta+}) ,$$

où nous notons comme précédemment  $\Delta_\theta$  la partie homogène de degré 0 de  $\mathbf{gr}_{\mu_\theta} K[x]$ .

En prenant les parties homogènes de degré 0 des algèbres du diagramme précédent nous trouvons le nouveau diagramme:

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_{\mu_\alpha} & \xrightarrow{(U_\alpha)_0} & \Delta_{\mu_\alpha}/(\varphi_{\alpha+}) & \xrightarrow{(V_\beta)_0} & \Delta_{\mu_\beta} \\ \uparrow \simeq & & \uparrow \simeq & & \uparrow \simeq \\ \Delta_A[S_\alpha] & \xrightarrow{(u_\alpha)_0} & \Delta_A & \xrightarrow{(v_\beta)_0} & \Delta_A[S_\beta] \end{array}$$

où  $S_\alpha = H_{\mu_\alpha}(p'(\gamma_\alpha)\phi_\alpha)$ , et nous avons encore le morphisme composé  $(U_\beta)_0 \circ (V_\beta)_0$  qui induit un isomorphisme de  $\Delta_A$  dans lui-même.

Si l'ensemble  $\tilde{\Phi}(A)$  est vide, c'est-à-dire si pour tout  $f$  dans  $K[x]$  il existe  $\alpha$  dans  $A$  tel que  $\mu_\alpha(f) = \mu_\beta(f)$  pour tout  $\beta \geq \alpha$ , nous définissons une valuation limite  $\mu_A$  de  $K[x]$  par  $\mu_A(f) = \sup_{\alpha \in A} (\mu_\alpha(f))$ . Dans ce cas la famille  $\mathcal{C}$  n'admet pas de valuation augmentée limite et la valuation  $\mu_A$  n'est pas une valuation bien définie.

**Proposition 2.1.** *Si  $\tilde{\Phi}(A)$  est vide et si  $\mu_A$  est la valuation limite de la famille continue  $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ , alors pour tout  $\alpha$  dans  $A$  le morphisme naturel de  $\mathbf{gr}_{\mu_\alpha} K[x]$  dans  $\mathbf{gr}_{\mu_A} K[x]$  induit un isomorphisme d'algèbres graduées:*

$$Q: \mathbf{gr}_A \xrightarrow{\sim} \mathbf{gr}_{\mu_A} K[x] .$$

*Cet isomorphisme induit un isomorphisme entre les parties homogènes de degré 0:*

$$Q_0: \Delta_A \xrightarrow{\sim} \Delta_{\mu_A} .$$

*Preuve.* Cf. [Va 1] Corollaire à la Proposition 1.25.

Si l'ensemble  $\tilde{\Phi}(A)$  n'est pas vide, pour  $\phi$  appartenant à  $\Phi(A)$  et pour  $\gamma$  vérifiant  $\gamma > \mu_\alpha(\phi)$  pour tout  $\alpha$  dans  $A$ , nous définissons une valuation augmentée limite  $\mu' = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu'(\phi) = \gamma]$ .

**Proposition 2.2.** *Soit  $\mu' = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu'(\phi) = \gamma]$  une valuation augmentée limite pour la famille continue  $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ , alors pour tout  $\alpha$  dans  $A$  le morphisme naturel de  $\text{gr}_{\mu_\alpha} K[x]$  dans  $\text{gr}_{\mu'} K[x]$  induit un isomorphisme d'algèbres graduées:*

$$Q: \mathbf{gr}_A[T] \xrightarrow{\sim} \text{gr}_{\mu'} K[x],$$

qui envoie  $T$  sur  $Q(T) = H_{\mu'}(\phi)$ .

Nous supposons de plus que la famille  $\mathcal{C}$  vérifie l'hypothèse 3, alors: - si  $\gamma$  n'appartient pas à  $\Gamma_A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ , ce morphisme induit un isomorphisme en degré 0:

$$Q_0: \Delta_A \xrightarrow{\sim} \Delta_{\mu'}.$$

- si  $\gamma$  appartient à  $\Gamma_A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ , nous appelons  $\tau$  le plus petit entier positif  $t$  tel que  $t\gamma$  appartienne à  $\Gamma_A$  et nous supposons qu'il existe  $p$  et  $p'(\tau\gamma) = p'$  dans  $K[x]$  tels que  $pp'$  soit  $\mu_\alpha$ -équivalent à 1 pour  $\alpha$  suffisamment grand et tels que  $\mu_\alpha(p') = -\tau\gamma$ , alors ce morphisme induit un isomorphisme en degré 0:

$$Q_0: \Delta_A[S] \xrightarrow{\sim} \Delta_{\mu'}.$$

qui envoie  $S$  sur  $H_{\mu'}(p'\phi^\tau)$ .

*Preuve.* L'existence de l'isomorphisme  $Q$  d'algèbres graduées entre  $\mathbf{gr}_A[T]$  et  $\text{gr}_{\mu_A} K[x]$  est démontrée dans [Va 1] Théorème 1.26.

La démonstration des résultats qui s'en déduisent pour les parties homogènes de degré 0 est identique au cas d'une valuation augmentée (cf. [Va 1] Corollaire au Théorème 1.7).

**Proposition 2.3.** *Soit  $\mu$  une valuation de l'anneau des polynômes  $K[x]$ , alors l'algèbre graduée associée  $\text{gr}_\mu K[x]$  est de la forme suivante:*

i) si la valuation  $\mu$  n'est pas bien définie

$$\text{gr}_\mu K[x] = \overline{G_0},$$

où  $\overline{G_0}$  est une algèbre graduée simple, c'est-à-dire telle que tout élément homogène non nul admette un inverse;

ii) si la valuation  $\mu$  est bien définie

$$\text{gr}_\mu K[x] = \overline{G_0}[T],$$

où  $\overline{G_0}$  est une algèbre graduée simple et  $T$  est l'image  $H_\mu(\phi)$  du polynôme  $\phi$  définissant la valuation  $\mu$ .

De plus un élément homogène  $\psi$  de  $\text{gr}_\mu K[x]$  est irréductible si et seulement si il existe  $f$  polynôme-clé pour la valuation  $\mu$  dans  $K[x]$  et  $\varepsilon$  élément homogène inversible de  $\text{gr}_\mu K[x]$  tels que  $\varepsilon\psi$  soit égal à l'image  $H_\mu(f)$  de  $f$  dans  $\text{gr}_\mu K[x]$ .

*Preuve.* Considérons d'abord le cas d'une valuation augmentée  $\mu = [\mu_0 ; \mu(\phi) = \gamma]$ , alors l'algèbre graduée  $\text{gr}_\mu K[x]$  est isomorphe à  $\overline{G_0}[T]$  avec  $\overline{G_0} = \text{gr}_{\mu_0} K[x]/(H_{\mu_0}(\phi))$ . Nous pouvons identifier  $\overline{G_0}$  à la sous-algèbre graduée engendrée par les éléments homogènes  $\psi$  de la forme  $H_\mu(f)$  avec  $f$  tels qu'il existe  $g$  dans  $K[x]$   $\mu$ -équivalent à  $f$  vérifiant  $\mu_0(g) = \mu(g)$ . Il existe alors  $g'$  dans  $K[x]$  vérifiant  $\mu_0(g') = \mu(g')$  tel que  $gg'$  soit  $\mu$ -équivalent à 1 ([Va 1] Lemme 1.4), par conséquent  $\psi' = H_\mu(g')$  est un inverse de  $\psi$  dans  $\overline{G_0}$ .

Supposons maintenant que nous avons une famille continue de valuations  $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ , et nous notons comme précédemment  $\mathbf{gr}_A$  l'algèbre graduée  $\text{gr}_{\mu_\theta} K[x]/(\varphi_{\theta+})$ . Nous déduisons de ce qui précède que  $\mathbf{gr}_A$  est aussi une algèbre graduée simple, et la première partie de la proposition est une conséquence des propositions 2.1 et 2.2.

Si  $f$  est un polynôme-clé pour une valuation  $\mu$  alors par définition il est  $\mu$ -irréductible, c'est-à-dire que son image  $H_\mu(f)$  est un élément irréductible de l'algèbre graduée  $\text{gr}_\mu K[x]$ .

Réciproquement soit  $\psi$  un élément homogène irréductible de l'algèbre graduée  $\text{gr}_\mu K[x]$ . Nous déduisons de la première partie de la proposition que la valuation  $\mu$  est bien définie, c'est-à-dire  $\mu$  est soit une valuation augmentée  $\mu = [\mu_0 ; \mu(\phi) = \gamma]$ , soit une valuation augmentée limite  $\mu = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu(\phi) = \gamma]$ . Nous choisissons  $f$  dans  $K[x]$  tel que  $H_\mu(f) = \psi$ , et nous écrivons le développement de  $f$  selon les puissances de  $\phi$ ,  $f = f_m\phi^m + \dots + f_0$ . Quitte à remplacer  $f$  par un polynôme  $\mu$ -équivalent nous pouvons supposer que nous avons  $\mu(f) = \mu_0(f_m) + m\gamma$ , et quitte à multiplier  $f$  par un polynôme  $h$  avec  $\deg h < \deg \phi$  nous pouvons supposer que  $f$  est  $\mu$ -équivalent à un polynôme de la forme  $\phi^m + \dots + f_0$  avec  $\mu(f) = m\gamma$ . Comme  $\psi$  est  $\mu$ -irréductible nous avons aussi  $\mu(f_0) = m\gamma$ , par conséquent nous déduisons de [McL 1] Theorem 9.4 ou de [Va 1] Théorème 1.11 dans le cas d'une valuation augmentée, et de la proposition 1.4 dans le cas d'une valuation augmentée limite, que  $f$  est un polynôme-clé pour  $\mu$ .

Nous disons qu'un polynôme  $e$  de  $K[x]$  est  $\mu$ -unitaire s'il existe un polynôme  $e'$  dans  $K[x]$  tel que  $ee'$  soit  $\mu$ -équivalent à 1, c'est-à-dire si son image  $H_\mu(e)$  dans  $\text{gr}_\mu K[x]$  est inversible. Nous déduisons alors de la

proposition précédente la généralisation suivante du résultat de MacLane ([McL 2] Theorem 4.2).

**Corollaire.** *Soit  $\mu$  une valuation de  $K[x]$ , alors pour tout polynôme  $f$  il existe un polynôme  $\mu$ -unitaire  $e$  et des polynômes-clés pour la valuation  $\mu$   $\phi_1, \dots, \phi_t$ ,  $t \geq 0$ , tels que nous ayons:*

$$f \underset{\mu}{\sim} e\phi_1 \dots \phi_t .$$

*De plus cette décomposition est unique à  $\mu$ -équivalence près.*

### References

- [McL 1] S. MacLane: A construction for absolute values in polynomial rings. Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 363-395.
- [McL 2] S. MacLane: A construction for prime ideals as absolute values of an algebraic field. Duke Math. J. **2** (1936), 492-510.
- [Va 1] M. Vaquié: Extension d'une valuation, [www.math.jussieu.fr/~vaquie/prepubli/extension.ps](http://www.math.jussieu.fr/~vaquie/prepubli/extension.ps)
- [Va 2] M. Vaquié: Famille admise associée à une valuation de  $K[x]$ , à paraître dans *Séminaires et Congrès*.
- [Va 3] M. Vaquié: Valuations, dans *Resolution of Singularities*, Progr. in math. 181, 2000.

©Michel Vaquié 2004

*Laboratoire Émile Picard  
UMR 5580 du CNRS  
Université Paul Sabatier , UFR MIG  
118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 4  
France  
[vaquie@picard.ups-tlse.fr](mailto:vaquie@picard.ups-tlse.fr)*