Extension d'une valuation *

Michel Vaquié

Abstract

We want to determine all the extensions of a valuation ν of a field K to a cyclic extension L of K, i.e. $L = K(x)$ is the field of rational functions of x or $L = K(\theta)$ is the finite separable extension generated by a root θ of an irreducible polynomial $G(x)$. In two articles in 1936, Saunders MacLane has introduced the notions of *key polynomial* and of *augmented valuation* for a given valuation μ of $K[x]$, and has shown how we can recover any extension to L of a discrete rank one valuation ν of K by a countable sequence of augmented valuations $\left(\mu_i\right)_{i\in I}$, with $I \subset \mathbb{N}$. The valuation μ_i is defined by induction from the valuation μ_{i-1}, from a key polynomial ϕ_i and from the value $\gamma_i = \mu(\phi_i)$.

In this article we study some properties of the augmented valuations and we generalize the results of MacLane to the case of any valuation ν of K. For this we need to introduce *simple admissible families* of augmented valuations $\mathcal{A} = \left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$, where A is not necessarily a countable set, and to define *limit key polynomial* and *limit augmented valuation* for such families. Then, any extension μ to L of a valuation ν on K is again a limit of a family of augmented valuations.
We get also a "factorization" theorem which gives a description of the values $(\mu_\alpha(f))$ for any polynomial f in $K[x]$.

Introduction

Etant donné un corps K muni d'une valuation ν, nous voulons déterminer les prolongements de ν à toute extension L de K. Dans cet article, nous allons étudier le cas d'une extension monogène $L = K(\theta)$, c'est à dire soit le cas où $L = K(x)$ est le corps des fractions de l'anneau des polynômes à une variable $K[x]$, soit le cas où L est une extension algébrique de la forme $L = K[x]/(G)$, où G est un polynôme irréductible.

Dans deux articles de 1936 [McL 1] et [McL 2], Saunders MacLane introduit les notions de *polynôme-clé* et de *valuation augmentée.* Plus précisément, si μ est une valuation sur un anneau de polynômes $K[x]$ à une variable, il définit ce qu'est un polynôme-clé ϕ pour cette valuation et une valuation augmentée μ', dépendant de μ, de ϕ et d'une valeur $\gamma > \mu(\phi)$, μ' est une nouvelle valuation sur $K[x]$ vérifiant pour tout f dans $K[x]$ l'inégalité $\mu(f) \leq \mu'(f)$, avec égalité si $\deg f < \deg \phi$.
Grâce à ces constructions, il montre que si K est un corps muni d'une valuation ν *discrète de rang un*, toute valuation μ de l'anneau des polynômes $K[x]$ prolongeant ν, est obtenue comme "limite" d'une famille de valuations augmentées (μ_i), famille finie ou dénombrable, essentiellement unique. De même, si L est une extension algébrique monogène de K, toute valuation μ de L prolongeant la valuation ν est aussi obtenue comme "limite" d'une telle famille de valuations augmentées sur $K[x]$.

Dans une première partie, nous allons reformuler certains résultats de S. MacLane et montrer quelles conséquences nous pouvons en déduire, en particulier sur les algèbres graduées associées aux valuations considérées. Mais le but essentiel de cette partie est d'étudier ce qui se passe dans le cas d'une valuation quelconque, c'est à dire sans hypothèse sur le groupe des ordres.
Le phénomène important nouveau est l'apparition de familles de valuations augmentées $\mathcal{S} = \left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$, indexée par un ensemble totalement ordonné A, isomorphe à un sous-ensemble du groupe des ordres

*2000 Mathematics Subject Classification: 13A18 (12J10 14E15)

Γ, non nécessairement dénombrable. A une telle famille, sont associées la famille de polynômes-clé $(\phi_\alpha)_{\alpha\in A}$ dans $K[x]$ et la famille de valeurs $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in A}$ dans Γ. Ces familles de polynômes $(\phi_\alpha)_{\alpha\in A}$ peuvent être considérées comme des généralisations des familles *pseudo-convergentes* définies par Irving Kaplansky [Ka]. Nous pouvons alors énoncer un théorème de factorisation (Théorème 1.19) qui décrit pour tout polynôme f de $K[x]$ le comportement de la famille des valeurs $(\mu_\alpha(f))_{\alpha\in A}$.

Dans une deuxième partie, nous étendons les résultats de [McL 1] et [McL 2], nous montrons comment toute valuation de l'anneau des polynômes $K[x]$, ou toute valuation d'une extension algébrique monogène L de K, prolongeant une valuation quelconque ν de K, peut encore être obtenue comme "limite" d'une famille *admise* $\mathcal{A}$ de valuations augmentées, la famille $\mathcal{A}$ étant une réunion dénombrable de familles *admissibles simples* $\mathcal{S}_i$ éventuellement non dénombrables (Théorèmes 2.4 et 2.5).

L'intérêt principal de la définition des familles admissibles est de construire des générateurs de l'algèbre graduée associée à une valuation de $K[x]$. Les générateurs de cette algèbre sont liés aux *racines approchées de Tschirnhausen* (cf. [A-M] ou [Po]) et aux *éléments de contact* (cf. [Sp]), et par conséquent jouent un rôle très important dans le problème de l'uniformisation locale (cf. [Sp] ou [Te]).

1 Valuations augmentées

Nous allons rappeler les définitions de polynômes-clés et de valuations augmentées définies dans [McL 1] et [McL 2], et leurs propriétes principales.
Dans la suite nous considérons un corps K et nous voulons étudier les valuations de l'anneau des polynômes $K[x]$, prolongeant éventuellement une valuation ν de K donnée.

1.1 Polynôme-clé et valuation augmentée

Soit L un corps muni d'une valuation μ de groupe des ordres $\Gamma = \Gamma_\mu$ et soit R un sous-anneau de L, nous supposerons que L est le corps des fractions de R.
Pour tout α appartenant à Γ nous pouvons définir les idéaux suivants:

$$\mathcal{P}_\alpha = \mathcal{P}_\alpha(R,\mu) = \{f \in R \ \mid \ \mu(f) \geq \alpha\}$$

$$\mathcal{P}_\alpha^+ = \mathcal{P}_\alpha^+(R,\mu) = \{f \in R \ \mid \ \mu(f) > \alpha\} \ .$$

Nous pouvons alors définir l'algèbre de la valuation ([Te]):

$$\mathcal{A}_\mu(R) = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} \mathcal{P}_\alpha(R,\mu) v^{-\alpha} \subset R\big[v^\Gamma\big] \ .$$

L'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\mu R$ de la valuation est par définition l'algèbre quotient de $\mathcal{A}_\mu(R)$ par l'idéal $\tilde{\mathcal{Q}} = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} \mathcal{P}_\alpha^+ v^{-\alpha}$, c'est à dire:

$$\mathrm{gr}_\mu R = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} \mathcal{P}_\alpha / \mathcal{P}_\alpha^+ \ .$$

Nous avons une application $H_\mu \colon R \longrightarrow \mathrm{gr}_\mu R$ qui à tout $f \in R$ associe sa forme initiale $H_\mu(f) = \mathrm{gr}_\mu f$ dans $\mathcal{P}_\alpha/\mathcal{P}_\alpha^+$, où $\alpha = \mu(f)$.

Ces constructions sont faites en général pour une valuation μ positive sur l'anneau R, c'est à dire si R est inclus dans l'anneau de la valuation R_μ. Dans ce cas les idéaux $\mathcal{P}_\alpha(R,\mu)$, pour $\alpha \leq 0$, et $\mathcal{P}_\alpha^+(R,\mu)$, pour $\alpha < 0$, sont égaux à l'anneau R tout entier.
Nous pouvons remarquer que la somme directe qui définit l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\mu R$ est en fait indexée par le semi-groupe $\Phi = \mu(R \setminus \{0\}) \subset \Gamma$.

Soit μ une valuation du corps $K(x)$, où x est algébriquement indépendant sur un corps K, et nous étudions la restriction de μ à l'anneau des polynômes $K[x]$. Nous disons que deux polynômes f et g de $K[x]$ sont μ-équivalents s'ils ont même image dans l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\mu K[x]$, c'est à dire si nous avons la relation $\mu(f-g) > \mu(f) = \mu(g)$, nous notons alors $f \underset{\mu}{\sim} g$.

De même nous disons que le polynôme g est μ-divisible par le polynôme f, ou que f μ-divise g, si l'image $H_\mu(g)$ de g dans $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ est divisible par l'image $H_\mu(f)$ de f. C'est aussi équivalent à dire qu'il existe un polynôme h dans $K[x]$ tel que $g \underset{\mu}{\sim} fh$. Nous notons alors $f \underset{\mu}{|} g$.

Quand le polynôme g n'est pas μ-divisible par f, nous notons $f \underset{\mu}{\not|} g$.

Définition. ([McL 1]) Un polynôme ϕ de $K[x]$ est appelé un *polynôme-clé* pour la valuation μ s'il vérifie les propriétés suivantes:

- ϕ est μ-minimal, c'est à dire si tout polynôme f de $K[x]$ μ-divisible par ϕ est de degré supérieur ou égal au degré de ϕ: $\phi \underset{\mu}{|} f \Longrightarrow \deg f \geq \deg\phi$;

- ϕ est μ-irréductible, c'est à dire si l'image de ϕ dans l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ est irréductible: $\forall a, b \in K[x] \quad \phi \underset{\mu}{|} ab \Longrightarrow \phi \underset{\mu}{|} a$ ou $\phi \underset{\mu}{|} b$;

- ϕ est unitaire.

Remarque 1.1. Par définition la notion de polynôme-clé concerne les polynômes f de $K[x]$ à μ-équivalence près, c'est à dire semble adaptée à l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\mu K[x]$, mais une des propriétés fondamentales des polynômes-clés, conséquence de la μ-minimalité, est exprimée en considérant la division euclidienne dans $K[x]$.

Lemme 1.1. ([McL 1] Lemma 4.3) *Soient μ une valuation de $K[x]$ et ϕ un polynôme μ-minimal. Pour tout polynôme non nul f de $K[x]$ nous avons les inégalités suivantes, où $f = q\phi + r$ est la division euclidienne de f par ϕ dans $K[x]$:*

$$\mu(r) \geq \mu(f) \ ,$$

$$\mu(q\phi) \geq \mu(f) \ .$$

De plus nous avons l'inégalité stricte $\mu(r) > \mu(f)$ si et seulement si f est μ-divisible par ϕ.

Nous considérons maintenant une valuation μ de $K[x]$, de groupe des ordres Γ_μ, et un polynôme-clé ϕ pour μ de valuation $\delta = \mu(\phi) \in \Gamma_\mu$. Nous considérons un groupe ordonné Γ contenant Γ_μ comme sous-groupe ordonné, et un élément γ de Γ vérifiant $\gamma > \mu(\phi)$.
Tout polynôme f de $K[x]$ admet une écriture unique de la forme:

$$f = f_m\phi^m + f_{m-1}\phi^{m-1} + \ldots + f_0 \ ,$$

avec $\deg f_j < \deg\phi$ pour tout j, $0 \leq j \leq m$, que nous appelons le *développement de f selon les puissances de ϕ.*
Nous définissons alors $\mu'(f) \in \Gamma$ par:

$$\mu'(f) = \inf\bigl(\mu(f_j) + j\gamma \ ; \ 0 \leq j \leq m\bigr) \ .$$

Théorème 1.2. ([McL 1] Theorem 4.4) *Soient μ une valuation de $K[x]$, ϕ un polynôme-clé pour μ et $\gamma \in \Gamma$ vérifiant $\gamma > \mu(\phi)$, alors l'application μ' définie précédemment est une valuation de $K[x]$ à valeurs dans le sous-groupe de Γ engendré par Γ_μ et γ.*

Remarque 1.2. Si ϕ est un polynôme-clé pour une valuation μ, nous pouvons définir pour tout f dans $K[x]$ l'entier $D_\phi(f)$ comme le plus grand entier d tel que $\mu'(f)$ soit égal à $\mu(f_d)+d\gamma$, où $f_m\phi^m+\ldots+f_0$ est le développement de f selon les puissances de ϕ. Par définition nous avons alors $f \underset{\mu'}{\sim} f_d\phi^d+\ldots+f_0$, et $\mu'(f) = \mu'(f_d\phi^d)$.

Cet entier $D_\phi(f)$ ne dépend que de l'image $H_{\mu'}(f)$ dans l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_{\mu'}K[x]$, c'est à dire que si f et f' sont μ'-équivalents, nous avons $D_\phi(f) = D_\phi(f')$.
Nous pouvons déduire de la démonstration du théorème précédent que pour tout f et g dans $K[x]$ nous avons l'égalité $D_\phi(fg) = D_\phi(f) + D_\phi(g)$.

Définition. Nous appelons la valuation μ' une *valuation augmentée* et nous la notons:

$$\mu' = [\mu \ ; \ \mu'(\phi) = \gamma] \ .$$

La valuation augmentée $\mu' = [\mu\ ;\ \mu'(\phi) = \gamma]$ définie à partir de la valuation μ et du polynôme-clé ϕ est une nouvelle valuation de $K[x]$, “plus fine” que la valuation initiale μ.

Proposition 1.3. ([McL 1] Theorem 5.1) *Pour tout polynôme f de $K[x]$ nous avons l'inégalité:*

$$\mu'(f) \geq \mu(f)\ .$$

De plus l'inégalité est stricte si et seulement si f est μ-divisible par le polynôme-clé ϕ. En particulier si $\mathrm{deg} f < \mathrm{deg}\phi$, nous avons $\mu'(f) = \mu(f)$.

Nous déduisons de cette proposition que pour calculer la valuation $\mu'(f)$ d'un polynôme f, nous n'avons pas besoin de connaître son développement selon les puissances de ϕ. Plus précisément nous avons le résultat suivant ([McL 1] Theorem 5.2).

Corollaire. *Si nous avons $f = f_m\phi^m + f_{m-1}\phi^{m-1} + \ldots + f_0$, où les f_j sont des polynômes non μ-divisibles par ϕ, alors la valuation $\mu'(f)$ est encore égale à $inf\big(\mu(f_j) + j\gamma\ ;\ 0 \leq j \leq m\big)$.*
De plus si $g = g_m\phi^m + g_{m-1}\phi^{m-1} + \ldots + g_0$, avec $f_j \underset{\mu}{\sim} g_j$ pour tout j, $0 \leq j \leq m$, alors $f \underset{\mu'}{\sim} g$.

Lemme 1.4. *Soit μ' la valuation définie à partir de la valuation μ, du polynôme-clé ϕ et de γ dans Γ, alors pour tout f dans $K[x]$ vérifiant $\mu'(f) = \mu(f)$, nous avons:*

(i) il existe f_0 dans $K[x]$ avec $\mathrm{deg} f_0 < \mathrm{deg}\phi$ tel que $f \underset{\mu'}{\sim} f_0$;

(ii) il existe g dans $K[x]$ avec $\mu'(g) = \mu(g)$ tel que $fg \underset{\mu'}{\sim} 1$.

Preuve. (i) Soit $f = q\phi + r$ la division euclidienne de f par ϕ, d'après le lemme 1.1 nous avons l'inégalité $\mu'(q\phi) > \mu(q\phi) \geq \mu(f) = \mu'(f)$, par conséquent f est μ'-équivalent à r.
(ii) Le polynôme-clé ϕ est un polynôme irréductible de $K[x]$ et par hypothèse f n'est pas divisible par ϕ, par conséquent il existe deux polynômes g et h de $K[x]$ avec deg $g <$ deg ϕ tels que $fg + h\phi = 1$, d'où $fg \underset{\mu'}{\sim} 1$ et $\mu'(g) = \mu(g)$.

Proposition 1.5. ([McL 1] Lemma 9.2, [McL 2] Lemma 4.3) *Soit μ' la valuation augmentée définie à partir d'une valuation μ et d'un polynôme-clé ϕ pour μ, $\mu' = [\mu\ ;\ \mu'(\phi) = \gamma]$, alors le polynôme ϕ est aussi un polynôme-clé pour la valuation μ'.*

Preuve. Nous allons montrer d'abord que pour tout polynôme f de $K[x]$, si $f = f_m\phi^m + f_{m-1}\phi^{m-1} + \ldots + f_0$ est le développement de f selon les puissances de ϕ, alors f est μ'-divisible par ϕ si et seulement si $\mu(f_0) = \mu'(f_0) > \mu'(f)$.
Si $\mu'(f_0) > \mu'(f)$, alors f est μ'-équivalent à $\phi\big(f_m\phi^{m-1} + \ldots + f_1\big)$, d'où $\phi \mid f$.
Réciproquement, si f est μ'-divisible par ϕ, il existe h dans $K[x]$ tel que f soit μ'-équivalent à ϕh. Le développement selon les puissances de ϕ de $g = f - \phi h$ a son terme de degré zéro g_0 égal à f_0, d'où l'inégalité $\mu(f_0) \geq \mu'(g) > \mu'(f)$.

Le polynôme ϕ est μ'-minimal. En effet supposons maintenant que ϕ μ'-divise un polynôme f, alors nous avons $\mu'(f_0) > \mu'(f)$, par conséquent $f \neq f_0$ et $\mathrm{deg} f \geq \mathrm{deg}\phi$.

Le polynôme ϕ est μ'-irréductible. En effet supposons que ϕ ne μ'-divise ni f, ni g, alors nous avons les égalités $\mu(f_0) = \mu'(f)$ et $\mu(g_0) = \mu'(g)$. Le terme de degré zéro du développement selon les puissances de ϕ du produit fg est le reste r_0 de la division de f_0g_0 par ϕ. Comme ϕ est un polynôme-clé pour la valuation μ, le produit f_0g_0 n'est pas μ-divisible par ϕ, par conséquent d'après le lemme 1.1, $\mu(r_0) = \mu(f_0g_0)$, d'où $\mu'(r_0) = \mu'(fg)$, et ϕ ne μ'-divise pas fg.

Pour pouvoir étudier la valuation augmentée $\mu' = [\mu\ ;\ \mu'(\phi) = \gamma]$ à partir de la valuation μ, et en particulier pour pouvoir comparer les algèbres graduées $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ et $\mathrm{gr}_{\mu'} K[x]$, il est nécessaire de connaître la position de γ par rapport au groupe Γ_μ.
Si γ appartient au groupe $\Gamma_\mu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, c'est à dire si les valuations μ et μ' ont même rang rationnel, nous appelons τ le plus petit entier strictement positif tel que $\tau\gamma \in \Gamma_\mu$, sinon nous posons $\tau = \infty$.
Soit $f \in K[x]$ et soit $f = f_m\phi^m + \ldots + f_0$ son développement selon les puissances de ϕ. Si $\mu'(f) = \inf\big(\mu(f_j) + j\gamma\big)$ est atteint pour un indice t, $\mu'(f) = \mu'(f_t\phi^t) = \mu(f_t) + t\gamma$, alors $\mu'(f)$ ne peut être atteint que pour des indices j vérifiant $(j - t)\gamma \in \Gamma_\mu$.
Nous en déduisons le résultat suivant.

Lemme 1.6. *Dans le cas où γ n'appartient pas à $\Gamma_\mu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, il existe un unique indice t tel que $f \underset{\mu'}{\sim} f_t\phi^t$, et $H_{\mu'}(f)$ est égal à $H_{\mu'}(f_t)(H_{\mu'}(\phi))^t$, avec $\phi \underset{\mu}{\not|} f_t$.*

Dans le cas où γ appartient à $\Gamma_\mu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, il existe un entier t, $t \geq 0$, et un polynôme $h = h_n\phi^{n\tau} + h_{n-1}\phi^{(n-1)\tau} + \ldots + h_0$ avec h_n et h_0 non nuls, $\deg h_j < \deg\phi$ pour tout j, et vérifiant $\mu'(h) = \mu'(h_j\phi^{j\tau}) = \mu(h_j) + j\tau\gamma$ pour tout j tel que $h_j \neq 0$, tels que f soit μ'-équivalent à $h\phi^t$, d'où $H_{\mu'}(f) = H_{\mu'}(h)(H_{\mu'}(\phi))^t$.

Nous pouvons maintenant montrer la relation entre les algèbres graduées $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ et $\mathrm{gr}_{\mu'} K[x]$, où μ' est la valuation augmentée définie à partir de ϕ, polynôme-clé pour μ, et de $\gamma > \mu(\phi)$, $\mu' = [\mu\ ;\ \mu'(\phi) = \gamma]$. D'après la proposition 1.3 nous voyons que pour tout $\alpha \in \Gamma = \Gamma_\mu$ nous avons les inclusions

$$\mathcal{P}_\alpha(K[x], \mu) \subset \mathcal{P}_\alpha(K[x], \mu') \quad \text{et} \quad \mathcal{P}^+_\alpha(K[x], \mu) \subset \mathcal{P}^+_\alpha(K[x], \mu')\ .$$

Nous en déduisons un morphisme d'anneaux $g\colon \mathrm{gr}_\mu K[x] \to \mathrm{gr}_{\mu'} K[x]$.

Théorème 1.7. *Soit $\big(H_\mu(\phi)\big)$ l'idéal de $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ engendré par la partie initiale du polynôme-clé ϕ et soit $\big(\mathrm{gr}_\mu K[x]/(H_\mu(\phi))\big)[T]$ l'anneau des polynômes en une variable T sur l'anneau quotient de $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ par $(H_\mu(\phi))$.*
Alors le morphisme $g\colon \mathrm{gr}_\mu K[x] \to \mathrm{gr}_{\mu'} K[x]$ induit un isomorphisme

$$G\colon \big(\mathrm{gr}_\mu K[x]/(H_\mu(\phi))\big)[T] \longrightarrow \mathrm{gr}_{\mu'} K[x]\ ,$$

qui envoie T sur $G(T) = H_{\mu'}(\phi)$.

Preuve. Soit $f \in K[x]$ de valuation $\mu(f) = \alpha$, alors sa forme initiale $H_\mu(f)$ appartient à $\mathcal{P}_\alpha(\mu)/\mathcal{P}^+_\alpha(\mu)$. Si $\mu'(f) = \alpha$ alors nous avons $g(H_\mu(f)) = H_{\mu'}(f)$ et si $\mu'(f) > \alpha$ alors $g(H_\mu(f)) = 0$. Par conséquent le noyau de g est formé des $H_\mu(f)$ pour f vérifiant $\mu'(f) > \mu(f)$, c'est à dire d'après la proposition précédente des f μ-divisibles par le polynôme-clé ϕ, d'où $\mathrm{Ker} g = \big(H_\mu(\phi)\big)$.
Ainsi le morphisme g permet d'identifier $\big(\mathrm{gr}_\mu K[x]/(H_\mu(\phi))\big)$ avec le sous-anneau de $\mathrm{gr}_{\mu'} K[x]$ formé des $H_{\mu'}(f)$ pour $f \in K[x]$ vérifiant $\mu(f) = \mu'(f)$.

Pour montrer que G est injective, il faut montrer que $H_{\mu'}(\phi)$ est algébriquement indépendant sur $\big(\mathrm{gr}_\mu K[x]/(H_\mu(\phi))\big)$. Supposons que ce n'est pas le cas et qu'il existe $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ dans $\big(\mathrm{gr}_\mu K[x]/(H_\mu(\phi))\big)$, avec $a_n \neq 0$, tels que $a_n(H_{\mu'}(\phi))^n + a_{n-1}(H_{\mu'}(\phi))^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$ dans $\mathrm{gr}_{\mu'} K[x]$. Soient $f_n, f_{n-1}, \ldots, f_0 \in K[x]$ d'images $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$, alors par hypothèse $\phi \underset{\mu}{\not|} f_j$ pour $a_j \neq 0$ et $\mu'\big(f_n\phi^n + f_{n-1}\phi^{n-1} + \ldots + f_0\big) > \inf\big(\mu(f_j) + j\gamma\big)$, ce qui est impossible d'après le corollaire à la proposition 1.3.

Pour montrer que G est surjective, il faut montrer que pour tout $f \in K[x]$ de valuation $\mu'(f) = \alpha$, $H_{\mu'}(f)$ peut s'écrire comme somme de termes $H_{\mu'}(h)(H_{\mu'}(\phi))^t$ avec $h \in K[x]$ de valuation $\mu'(h) = \alpha - t\gamma$ et non μ-divisible par ϕ, c'est à dire vérifiant $\mu(h) = \mu'(h)$.

Dans le cas où γ n'appartient pas à $\Gamma_\mu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, nous avons vu que tout polynôme $f \in K[x]$ est μ'-équivalent à un produit $h\phi^t$, avec $\deg h < \deg\phi$. Par conséquent nous avons bien $H_{\mu'}(f) = (H_{\mu'}(h))(H_{\mu'}(\phi))^t$, avec $\phi \underset{\mu}{\not|} h$.

Dans le cas où γ appartient à $\Gamma_\mu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, tout polynôme f est μ'-équivalent à un produit $h\phi^t$, où le polynôme h s'écrit $h = h_n\phi^{n\tau} + h_{n-1}\phi^{(n-1)\tau} + \ldots + h_0$ et vérifie $H_{\mu'}(h) = H_{\mu'}(h_n)(H_{\mu'}(\phi))^{n\tau} + H_{\mu'}(h_{n-1})(H_{\mu'}(\phi))^{(n-1)\tau} + \ldots + H_{\mu'}(h_0)$, avec $\mu'(h_j) = \mu'(h) - (j\tau)\gamma$ et $\phi \underset{\mu}{\not|} h_j$.

Remarque 1.3. Nous avons montré que pour tout $f \in K[x]$ nous pouvions écrire $f \underset{\mu'}{\sim} h\phi^t$, avec $\phi \underset{\mu'}{\not|} h$, c'est à dire que t est l'ordre de μ'-divisibilité de f par ϕ.

De même nous pouvons définir l'ordre de μ-divisibilité de f par ϕ, c'est à dire le plus grand entier s tel que $\phi^s \underset{\mu}{|} f$.

Nous avons toujours l'inégalité $s \geq t$, c'est une conséquence directe de la démonstration du théorème, mais nous pouvons aussi le montrer directement en vérifiant l'implication $\phi \underset{\mu'}{|} h \Longrightarrow \phi \underset{\mu}{|} h$.

Si nous avons l'égalité $s = t$, nous pouvons trouver $h \in K[x]$ tel que $f \underset{\mu}{\sim} h\phi^t$ et $f \underset{\mu'}{\sim} h\phi^t$ et vérifiant $H_{\mu'}(h) = G(H_\mu(h))$.

Nous avons l'inégalité stricte $s > t$ si le polynôme $h \in K[x]$ vérifie $\phi \underset{\mu'}{\not|} h$ et $\phi \underset{\mu}{|} h$, et dans ce cas nous n'avons pas $H_{\mu'}(h) = G(H_\mu(h))$.

Par construction nous avons vu que le groupe des ordres de la valuation augmentée μ' est le groupe $\Gamma_{\mu'}$ engendré par le groupe des ordres Γ_μ de la valuation μ et par la valeur γ imposée au polynôme-clé ϕ. En particulier nous avons toujours l'inclusion $\Gamma_\mu \subset \Gamma_{\mu'}$, avec égalité si et seulement si γ appartient à Γ_μ.

Nous voulons aussi comparer les corps résiduels κ_μ et $\kappa_{\mu'}$ des valuations μ et μ'. Le théorème précédent nous permet de trouver une relation entre les anneaux Δ_μ et $\Delta_{\mu'}$, où pour toute valuation μ de $K[x]$ nous appelons Δ_μ l'image de $\mathcal{P}_0(K[x], \mu) = \{f \in K[x] \mid \mu(f) \geq 0\}$ dans le corps résiduel κ_μ. L'anneau Δ_μ peut être vu comme la partie homogène de degré 0 de l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_\mu K[x]$.
Le morphisme g entre les algèbres graduées induit un morphisme de Δ_μ dans $\Delta_{\mu'}$, dont le noyau est l'idéal $\big(H_\mu(\phi)\big)\big) \cap \Delta_\mu$ de Δ_μ. En général nous ne pouvons rien dire de cet idéal.
Nous faisons l'hypothèse suivante:
Hypothèse 1: Il existe q et q' dans $K[x]$ vérifiant $qq' \underset{\mu}{\sim} 1$ et $\mu(q) = -\mu(q') = \mu(\phi)$.

Si l'hypothèse 1 est vérifiée nous définissons $\varphi = H_\mu(q'\phi)$ dans Δ_μ. Alors φ est un élément irréductible de l'anneau Δ_μ et l'idéal $\big(H_\mu(\phi)\big) \cap \Delta_\mu$ est l'idéal principal (φ) de Δ_μ.

Nous déduisons du théorème que la partie homogène de degré 0, $\Delta_{\mu'}$, de $\mathrm{gr}_{\mu'} K[x]$ est isomorphe au quotient de la somme directe $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \big(\mathcal{P}_{-i\gamma}(\mu)/\mathcal{P}^+_{-i\gamma}(\mu)\big)T^i$, où T s'envoie sur $H_{\mu'}(\phi)$.

Si $-i\gamma$ n'appartient pas au groupe Γ_μ les idéaux $\mathcal{P}_{-i\gamma}(\mu)$ et $\mathcal{P}^+_{-i\gamma}(\mu)$ sont égaux.
En particulier dans le cas $\gamma \notin \Gamma_\mu \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$, le seul terme non nul de la somme directe précédente est le terme de degré 0.
Dans le cas $\gamma \in \Gamma_\mu \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$, les termes non nuls sont les termes de degré i pour $i \in \tau\mathbb{N}$. Nous faisons alors l'hypothèse:
Hypothèse 2: Il existe p et p' dans $K[x]$ vérifiant $pp' \underset{\mu'}{\sim} 1$ et $\mu'(p) = \mu(p) = -\mu'(p') = -\mu(p') = \tau\mu'(\phi)$, en particulier p et p' ne sont pas μ-divisibles par ϕ.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat suivant (cf. [McL 1], Theorem 12.1):

Corollaire. *Supposons que les valuations μ et μ' et que le polynôme-clé ϕ vérifient l'hypothèse 1 et, dans le cas $\gamma \in \Gamma_\mu \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$, l'hypothèse 2. Nous avons alors:*

$$\textit{si } \gamma \notin \Gamma_\mu \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q} \qquad \Delta_{\mu'} \simeq \big(\Delta_\mu/(\varphi)\big)$$

$$\textit{si } \gamma \in \Gamma_\mu \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q} \qquad \Delta_{\mu'} \simeq \big(\Delta_\mu/(\varphi)\big)[S] \ , \quad \textit{avec } S = H_{\mu'}(p'\phi^\tau) \ .$$

1.2 Valuations augmentées itérées

Nous considérons comme précédemment une valuation μ de $K[x]$, un polynôme-clé ϕ pour μ et la valuation augmentée $\mu' = [\mu\ ;\ \mu'(\phi) = \gamma]$. Si ϕ' est un polynôme-clé pour la valuation μ', et pour une valeur γ' dans un groupe ordonné contenant $\Gamma_{\mu'}$ telle que $\gamma' > \mu'(\phi')$, nous pouvons définir une nouvelle valuation augmentée $\mu'' = [\mu'\ ;\ \mu''(\phi') = \gamma']$. Nous pouvons ainsi construire par récurrence, à partir d'une valuation donnée μ de $K[x]$ une famille de valuations de $K[x]$.
Plus précisément, nous supposons que nous nous sommes donnés une valuation $\mu = \mu_0$ de $K[x]$, un groupe ordonné Γ, contenant le groupe des ordres $\Gamma_0 = \Gamma_\mu$ comme sous-groupe ordonné, une famille $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de Γ et une famille $(\phi_i)_{1 \leq i \leq n}$ de polynômes unitaires de $K[x]$.

Définition. ([McL 1] Definition 6.1) La famille de valuations de $K[x]$ $(\mu_i)_{0 \leq i \leq n}$ définie par récurrence par:

$$\mu_i = [\mu_{i-1}\ ;\ \mu_i(\phi_i) = \gamma_i]\ , \quad 1 \leq i \leq n\ ,$$

où chaque polynôme ϕ_i, $1 \leq i \leq n$, est un polynôme-clé pour la valuation μ_{i-1} avec $\mu_{i-1}(\phi_i) < \gamma_i$, et où la famille $(\phi_i)_{1 \leq i \leq n}$ vérifie:

- $\deg\phi_i \geq \deg\phi_{i-1}$,

- les polynômes ϕ_{i-1} et ϕ_i ne sont pas μ_{i-1}-équivalents,
est appelée une *famille de valuations augmentées itérées.*

Si nous avons une famille de valuations augmentées itérées $(\mu_j)_{0\leq j\leq n}$, pour tout $0 \leq j < t \leq n$, nous écrivons:

$$\mu_t = [\mu_j \ ; \ \mu_{j+1}(\phi_{j+1}) = \gamma_{j+1} \ ; \ \ldots \ ; \ \mu_t(\phi_t) = \gamma_t] \ ,$$

ce qui permet de décrire la manière dont la valuation μ_t a été obtenue à partir de la valuation μ_j, des polynômes $\phi_{j+1}, \ldots, \phi_t$ et des valeurs $\gamma_{j+1}, \ldots, \gamma_t$.

Dans le cas où le corps K est muni d'une valuation ν, nous pouvons définir pour tout élément γ d'un groupe ordonné contenant Γ_ν une valuation μ sur l'anneau $K[x]$ en posant pour tout $f = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_0$ dans $K[x]$:

$$\mu(f) = \inf\bigl(\nu(a_j) + j\gamma \ ; \ 0 \leq j \leq m\bigr) \ .$$

Nous disons encore que μ est une valuation augmentée et nous la notons $\mu = [\nu \ ; \ \mu(x) = \gamma]$. Dans le cas $\gamma > 0$, nous retrouvons bien la définition précédente où ν est la valuation de Gauss de $K[x]$ définie par $\nu(f) = \inf\bigl(\nu(a_j) \ ; \ 0 \leq j \leq m\bigr)$.

Dans la suite, quand nous considèrerons une famille de valuations augmentées itérées $(\mu_i)_{0\leq i\leq n}$, nous supposerons que la valuation initiale μ_0 est la valuation ν de K et que la valuation μ_1 est la valuation définie précédemment, c'est à dire que le premier polynôme-clé de la famille est le polynôme $\phi_1 = x$, ou plus généralement un polynôme unitaire de degré un, $\phi_1 = x + a$ (cf. Corollaire à la proposition 1.8).
Nous allons étudier les propriétés d'une famille de valuations augmentées itérées $(\mu_i)_{0\leq i\leq n}$ de $K[x]$.

Proposition 1.8. ([McL 1] Lemma 6.3) *Si la famille des polynômes-clés $\bigl(\phi_i\bigr)$ vérifie* $\deg\phi_j = \deg\phi_{j+1} = \ldots = \deg\phi_t$*, pour $1 \leq j < t \leq n$, alors:*

$$\mu_s(\phi_j) = \mu_j(\phi_s) = \gamma_j \ , \quad \forall s, \ j \leq s \leq t \ .$$

Si $j \geq 2$, nous avons aussi $\mu_{j-1}(\phi_s) = \mu_{j-1}(\phi_j)$ pour tout s, $j \leq s \leq t$.

Preuve. Comme les polynômes ϕ_j et ϕ_{j+1} sont unitaires et de même degré d, nous pouvons écrire $\phi_{j+1} = \phi_j + h_j$ avec $\deg h_j < d$. Nous en déduisons que pour tout $s \geq j$ nous avons $\mu_s(h_j) = \mu_{j-1}(h_j)$.
Nous remarquons que dans le cas particulier $j = 1$, comme $\phi_1 = x$, ou $\phi_1 = x + a$, h_1 appartient à K et $\mu_0(h_1) = \nu(h_1)$ est bien défini.
Comme ϕ_{j+1} est un polynôme-clé pour la valuation μ_j nous déduisons du lemme 1.1 les inégalités $\mu_{j-1}(h_j) \geq \mu_j(\phi_j) = \gamma_j$ et $\mu_j(\phi_{j+1}) \geq \mu_j(\phi_j)$, et par définition de la valuation augmentée μ_j, nous trouvons $\mu_j(\phi_{j+1}) = \inf(\gamma_j, \mu_{j-1}(h_j))$, d'où $\mu_j(\phi_{j+1}) = \gamma_j$.
Nous en déduisons alors l'inégalité $\gamma_{j+1} > \gamma_j$.
De plus comme les polynômes ϕ_j et ϕ_{j+1} ne sont pas μ_j-équivalents nous avons $\mu_{j-1}(h_j) \leq \mu_j(\phi_j)$, d'où $\mu_{j-1}(h_j) = \gamma_j$, et par définition de la valuation augmentée μ_{j+1}, nous trouvons aussi l'égalité $\mu_{j+1}(\phi_j) = \inf(\gamma_{j+1}, \mu_{j-1}(h_j)) = \gamma_j$.

Pour tout $s \geq j + 1$, nous avons $\mu_s(\phi_{j+1}) \geq \mu_{j+1}(\phi_{j+1}) = \gamma_{j+1} > \gamma_j = \mu_s(h_j)$, d'où $\phi_j \underset{\mu_s}{\sim} - h_j$ et $\mu_s(\phi_j) = \mu_s(h_j) = \gamma_j$.

Nous allons montrer par récurrence que $\mu_j(\phi_s) = \gamma_j$.
Nous venons de voir que c'est vrai pour $s = j$ et pour $s = j + 1$.
Supposons que nous ayons l'égalité pour s, $j + 1 \leq s < t$, et soit $\phi_{s+1} = \phi_s + h_s$, avec $\deg h_s < d$. D'après les résultats précédents pour $j = s$, nous avons $\mu_{j-1}(h_s) = \gamma_s$, et $\gamma_s > \gamma_j = \mu_j(\phi_s)$, d'où $\phi_{s+1} \underset{\mu_j}{\sim} \phi_s$ et $\mu_j(\phi_{s+1}) = \mu_j(\phi_s) = \gamma_j$.

Si nous avons $j \geq 2$, nous déduisons de l'inégalité $\mu_{j-1}(\phi_j) < \gamma_j = \mu_{j-1}(h_j)$ que nous avons $\mu_{j-1}(\phi_{j+1}) = \mu_{j-1}(\phi_j)$. Alors le même raisonnement par récurrence que précédemment nous donne que $\mu_{j-1}(\phi_s) = \mu_{j-1}(\phi_j)$ pour tout s, $j \leq s \leq t$.

Corollaire. ([McL 1] Lemma 15.1) *Si* $\deg\phi_j = \deg\phi_{j+1}$*, alors la valuation augmentée itérée* $\mu_{j+1} = [\mu_{j-1}\ ;\ \mu_j(\phi_j) = \gamma_j\ ;\ \mu_{j+1}(\phi_{j+1}) = \gamma_{j+1}]$ *est égale à la valuation augmentée* $[\mu_{j-1}\ ;\ \mu_{j+1}(\phi_{j+1}) = \gamma_{j+1}]$.
Nous pouvons ainsi enlever les polynômes de même degré de la famille (ϕ_j) *qui définit la famille de valuations augmentées itérées* $(\mu_j)_{0\leq j\leq n}$*, c'est à dire si nous avons les égalités* $\deg\phi_j = \deg\phi_{j+1} = \ldots = \deg\phi_t$*, alors:*

$$\mu_n = [\mu_0\ ;\ \ldots\ ;\ \mu_{j-1}(\phi_{j-1}) = \gamma_{j-1}\ ;\ \mu_t(\phi_t) = \gamma_t\ ;\ \ldots\ ;\ \mu_n(\phi_n) = \gamma_n]\ .$$

Preuve. Soit f dans $K[x]$ et $f = f_m\phi_{j+1}^m + f_{m-1}\phi_{j+1}^{m-1} + \ldots + f_0$ son développement selon les puissances de ϕ_{j+1}, alors, comme nous avons $\mu_j(f_n) = \mu_{j-1}(f_n)$ car $\deg f_n < \deg\phi_j = \deg\phi_{j+1}$, la valuation augmentée itérée μ_{j+1} est définie par l'égalité:

$$\mu_{j+1}(f) = \inf\bigl(\mu_{j-1}(f_l) + l\gamma_{j+1}\ ;\ 0 \leq l \leq m\bigr)\ .$$

Il suffit donc de démontrer que ϕ_{j+1} est aussi un polynôme-clé pour la valuation μ_{j-1}.
Nous pouvons supposer $j \geq 2$. Alors nous déduisons de la proposition:

$$\mu_{j-1}(\phi_{j+1} - \phi_j) = \mu_{j-1}(h_j) = \gamma_j > \mu_{j-1}(\phi_j)\ ,$$

d'où les polynômes ϕ_j et ϕ_{j+1} sont μ_{j-1}-équivalents. Par conséquent comme ϕ_j est un polynôme-clé pour μ_{j-1} il en est de même de ϕ_{j+1}.

Pour finir la démonstration il faut montrer que la famille obtenue en enlevant les polynômes $\phi_j, \ldots, \phi_{t-1}$ vérifie encore les conditions (1) et (2) de la définition d'une famille de valuations augmentées itérées, ce qui est évident.

Nous pouvons donner une réciproque au corollaire précédent.

Proposition 1.9. *Soient* μ *une valuation de* $K[x]$*,* ϕ_α *et* ϕ_β *deux polynômes-clés pour* μ *de même degré. Alors nous avons* $\mu(\phi_\alpha) = \mu(\phi_\beta)$*.*
De plus si les polynômes ϕ_α *et* ϕ_β *sont* μ*-équivalents et si nous définissons la valuation augmentée* μ_α *par* $\mu_\alpha = [\mu\ ;\ \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma']$*, avec* $\gamma' = \mu\bigl(\phi_\beta - \phi_\alpha\bigr)$*, le polynôme* ϕ_β *est un polynôme-clé pour la valuation* μ_α*.*

Preuve. Soit $h = \phi_\beta - \phi_\alpha$, alors comme ϕ_α et ϕ_β sont des polynômes unitaires de même degré nous avons $\deg h < \deg\phi_\alpha = \deg\phi_\beta$. Comme ϕ_α est μ-minimal nous déduisons du lemme 1.1 l'inégalité $\mu(\phi_\alpha) \geq \mu(\phi_\beta)$, et de même comme ϕ_β est un polynôme μ-minimal, nous avons aussi l'inégalité $\mu(\phi_\beta) \geq \mu(\phi_\alpha)$. Nous en déduisons l'égalité cherchée $\mu(\phi_\alpha) = \mu(\phi_\beta)$.

Nous supposons maintenant $\mu(h) = \gamma' > \gamma = \mu(\phi_\alpha) = \mu(\phi_\beta)$ et nous définissons la valuation augmentée $\mu_\alpha = [\mu\ ;\ \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma']$. Montrons que pour tout f dans $K[x]$ nous avons l'implication: $\phi_\beta \underset{\mu_\alpha}{\mid} f \implies \phi_\alpha \underset{\mu}{\mid} f$.
Soit f dans $K[x]$, nous supposons que f est μ_α-divisible par ϕ_β, c'est à dire qu'il existe q et r dans $K[x]$ tels que $f = q\phi_\beta + r$ et vérifiant $\mu_\alpha(r) > \mu_\alpha(f) = \mu_\alpha(q\phi_\beta)$. Nous supposons de plus que nous avons choisi q et r avec r de degré minimal. Alors nous avons $\deg r < \deg\phi_\alpha$. En effet supposons $\deg r \geq \deg\phi_\alpha$ et soit $r = a\phi_\alpha + b$ la division euclidienne de r par ϕ_α, d'où $\deg r = \deg(a\phi_\alpha)$ et par définition $\mu_\alpha(r) = \inf\bigl(\mu_\alpha(a\phi_\alpha), \mu(b)\bigr)$. Nous avons $f = q\phi_\beta + r = q\phi_\beta + a(\phi_\beta - h) + b = q'\phi_\beta + r'$, avec $q' = q + a$ et$r' = b - ah$. Le polynôme r' vérifie $\mu_\alpha(r') \geq \inf\bigl(\mu_\alpha(b), \mu_\alpha(ah)\bigr) = \inf\bigl(\mu(b), \mu_\alpha(a\phi_\alpha)\bigr) = \mu_\alpha(r)$ et $\deg r' = \deg(b - ah) < \deg(a\phi_\alpha) = \deg r$, ce qui contredit le choix de r de degré minimal.
Par conséquent si f est μ_α-divisible par ϕ_β nous avons $\mu_\alpha(r) > \mu_\alpha(f)$, où $f = q\phi_\beta + r$ est la division euclidienne de f par ϕ_β. En particulier nous avons l'inégalité $\deg f \geq \deg\phi_\beta$, c'est à dire nous avons montré que le polynôme ϕ_β est μ_α-minimal. Comme ϕ_β est un polynôme μ-minimal, d'après le lemme 1.1 nous avons $\mu(q\phi_\beta) \geq \mu(f)$, d'où $\mu_\alpha(f) = \mu_\alpha(q\phi_\beta) > \mu(q\phi_\beta) \geq \mu(f)$, ce qui entraîne que f est μ-divisible par ϕ_α d'après la proposition 1.3.

Pour montrer que ϕ_β est un polynôme-clé pour la valuation μ_α, il reste à montrer qu'il est μ_α-irréductible, c'est à dire qu'il vérifie: $\phi_\beta \underset{\mu_\alpha}{\mid} ab \implies \phi_\beta \underset{\mu_\alpha}{\mid} a$ ou $\phi_\beta \underset{\mu_\alpha}{\mid} b$.

Soient $a = p\phi_\beta + r$ et $b = q\phi_\beta + s$ les divisions euclidiennes respectives de a et b par ϕ_β et soit $rs = u\phi_\beta + v$ la division du produit rs. Comme les polynômes r et s sont de degré strictement inférieur au degré de ϕ_α, et comme ϕ_α est μ-irréductible, le produit rs n'est pas μ-divisible par ϕ_α, par conséquent n'est pas μ_α-divisible par ϕ_β. Comme le polynôme ϕ_β est μ_α-minimal, nous déduisons du lemme 1.1 l'égalité $\mu_\alpha(v) = \mu_\alpha(rs)$ et les inégalités $\mu_\alpha(r) \geq \mu_\alpha(a)$ et $\mu_\alpha(s) \geq \mu_\alpha(b)$. Le polynôme v est aussi le reste de la division de ab par ϕ_β, par conséquent si ab est μ_α-divisible par ϕ_β, nous déduisons de ce qui précède l'inégalité stricte $\mu_\alpha(v) > \mu_\alpha(ab)$. Nous avons alors $\mu_\alpha(r) > \mu_\alpha(a)$ ou $\mu_\alpha(s) > \mu_\alpha(b)$, c'est à dire un des deux polynômes a ou b est μ_α-divisible par ϕ_β.

Théorème 1.10. ([McL 1] Theorem 6.5) *Soit $(\mu_i)_{0\leq i\leq n}$ une famille de valuations augmentées itérées, pour tout polynôme f de $K[x]$, s'il existe k, $0 \leq k \leq n-1$, tel que $\mu_k(f) = \mu_{k+1}(f)$, alors $\mu_t(f) = \mu_k(f)$ pour tout $t \geq k$. Il existe alors g dans $K[x]$, avec* $\deg g < \deg\phi_{k+1}$ *qui est μ_t-équivalent à f pour tout $t \geq k+1$.*

Preuve. Supposons que le polynôme f vérifie $\mu_{k+1}(f) = \mu_k(f)$, alors d'après le lemme 1.4 il existe g avec $\deg g < \deg\phi_{k+1}$ tel que f et g sont μ_{k+1}-équivalents.
Alors, pour tout $t \geq k+1$, nous avons les inégalités:

$$\mu_t(f-g) \geq \mu_{k+1}(f-g) > \mu_{k+1}(f) = \mu_{k+1}(g) = \mu_t(g) \ ,$$

dont nous déduisons que les polynômes f et g sont μ_t-équivalents, et en particulier que $\mu_t(f)$ est égal à $\mu_t(g) = \mu_k(f)$.

Remarque 1.4. Nous pouvons définir de la même manière une famille infinie de valuations augmentées itérées $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$, indexée par l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$. Les résultats précédents sont encore valables pour de telles familles, en particulier pour tout polynôme f de $K[x]$, la suite $(\mu_i(f))_{i\in\mathbb{N}}$ est soit strictement croissante, soit strictement croissante jusqu'au rang k et ensuite stationnaire dans Γ.

Nous nous donnons une famille de valuations augmentées itérées (μ_i), finie ou infinie, et nous voulons étudier les groupes des ordres et les corps résiduels des valuations de cette suite, c'est à dire les groupes $\Gamma_i = \Gamma_{\mu_i}$ et les corps $\kappa_i = \kappa_{\mu_i}$.

Théorème 1.11. ([McL 1] Theorem 9.4) *Soit $\mu' = [\mu\ ;\ \mu'(\phi) = \gamma]$ une valuation augmentée de $K[x]$ définie à partir de ϕ, polynôme-clé pour la valuation μ, soit ϕ' un polynôme unitaire de $K[x]$ qui n'est pas μ'-équivalent à ϕ, avec* $\deg\phi' \geq \deg\phi$*, et soit $\phi' = f_m\phi^m + \ldots + f_0$, le développement de ϕ' selon les puissances de ϕ.*
Alors ϕ' est un polynôme-clé pour la valuation μ' si et seulement si:

- *ϕ' est μ'-irréductible,*
- *$f_m = 1$, c'est à dire $\phi' = \phi^m + \ldots + f_0$, et $\mu'(\phi') = m\gamma = \mu(f_0)$.*

Preuve. Supposons que le polynôme ϕ' est un polynôme-clé pour la valuation μ', et soit $\phi' = f_m\phi^m + \ldots + f_0$ son développement selon les puissances de ϕ.
Soit $\phi' = q\phi + f_0$ la division euclidienne de ϕ' par ϕ, alors si nous avions $\mu(f_0) > \mu'(\phi')$, ϕ' serait μ'-équivalent au produit $q\phi$ et comme ϕ' est un polynôme-clé pour μ', nous devrions avoir $q = 1$, c'est à dire $\phi' = \phi + f_0$, d'où $\phi' \underset{\mu'}{\sim} \phi$, ce qui est contraire à l'hypothèse sur ϕ'.
Comme $\deg f_m < \deg\phi$, nous avons $\mu'(f_m) = \mu(f_m)$ et d'après le lemme 1.4 il existe g dans $K[x]$ avec $\deg g < \deg\phi$ et $f_m g$ μ'-équivalent à 1.
Pour tout j, $0 \leq j \leq m-1$, $\mu'(f_j g) = \mu(f_j g)$, par conséquent il existe h_j dans $K[x]$ avec $\deg h_j < \deg\phi$ et $f_j g \underset{\mu'}{\sim} h_j$. Nous en déduisons que $g\phi'$ est μ'-équivalent à $\psi = \phi^m + h_{m-1}\phi^{m-1} + \ldots + h_0$, c'est à dire que ψ est μ'-divisible par ϕ', par conséquent $\deg\psi \geq \deg\phi'$, d'où $\deg f_m = 0$ et $f_m = 1$.
De plus si nous avions l'inégalité $\mu'(\phi') < m\gamma$, alors ϕ' et $\phi' - \phi^m$ seraient μ'-équivalents, ce qui contredirait la μ'-minimalité de ϕ'.

Réciproquement, soit ϕ' un polynôme unitaire, μ'-irréductible, de la forme $\phi' = \phi^m + f_{m-1}\phi^{m-1} + \ldots + f_0$ vérifiant $\mu'(\phi') = m\gamma = \mu(f_0)$, et nous voulons montrer que ϕ' est μ'-minimal.
Si g est un polynôme de $K[x]$ μ'-divisible par ϕ', nous avons d'après la remarque 1.2, l'inégalité $D_\phi(g) \geq D_\phi(\phi')$. Pour tout g nous avons $\deg g \geq D_\phi(g)\ \deg\phi$, et par hypothèse sur ϕ', nous avons $D_\phi(\phi')\ \deg\phi = \deg\phi'$, par conséquent nous trouvons $\deg g \geq \deg\phi'$.

Corollaire. *Soit $\mu' = [\mu\ ;\ \mu'(\phi) = \gamma]$ une valuation augmentée de $K[x]$ définie à partir de ϕ, polynôme-clé pour la valuation μ, alors s'il existe ϕ' polynôme-clé pour la valuation μ' vérifiant* $\deg\phi' \geq \deg\phi$ *et qui n'est pas μ'-équivalent à ϕ, la valuation γ appartient au groupe $\Gamma_\mu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et l'hypothèse 1 est vérifiée pour la valuation μ' et le polynôme ϕ'.*
De plus si pour tout δ dans Γ_μ, il existe un polynôme g dans $K[x]$ avec $\deg g < \deg\phi$ *et $\mu(g) = \delta$, alors de même pour tout δ' dans $\Gamma_{\mu'}$, il existe un polynôme g' dans $K[x]$ avec* $\deg g' < \deg\phi'$ *et $\mu'(g') = \delta'$.*

Preuve. D'après le théorème précédent, le polynôme-clé ϕ' s'écrit sous la forme $\phi' = \phi^m + f_{m-1}\phi^{m-1} + \ldots + f_0$ avec $\mu'(\phi') = m\gamma = \mu(f_0)$.
En particulier nous avons $m\gamma \in \Gamma_\mu$, c'est à dire $\gamma \in \Gamma_\mu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.
De plus, comme le polynôme $q = f_0$ vérifie $\deg q < \deg\phi$ d'où $\mu'(q) = \mu(q)$, il existe d'après le lemme 1.4 un polynôme q' dans $K[x]$ vérifiant $\mu(q') = \mu'(q')$ et $qq' \underset{\mu'}{\sim} 1$. Comme $\mu'(\phi') = \mu(q)$, l'hypothèse 1 est vérifiée pour la valuation μ' et le polynôme ϕ'.
Soit δ' appartenant au groupe $\Gamma_{\mu'}$, alors nous pouvons écrire $\delta' = \delta + m\gamma$, avec δ dans Γ_μ et m dans $\mathbb{Z}$. Comme γ appartient à $\Gamma_\mu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, nous pouvons supposer $m \geq 0$, en fait nous pouvons choisir m tel que $0 \leq m < \tau$, où $\tau = \left[\Gamma_{\mu'} : \Gamma_\mu\right]$. Par hypothèse sur μ, il existe g dans $K[x]$ tel que $\mu(g) = \delta$ et avec $\deg g < \deg\phi$, d'où $\mu(g) = \mu'(g)$. Le polynôme $h = g\phi^m$ vérifie alors $\mu'(h) = \delta + m\gamma = \delta'$ et n'est pas μ'-divisible par ϕ'. Par conséquent, d'après le lemme 1.4, il existe g' dans $K[x]$ avec $\deg g < \deg\phi'$ et tel que $\mu'(g') = \mu'(h) = \delta'$.

Remarque 1.5. Nous en déduisons que si nous sommes dans la situation du corollaire précédent, pour tout $\gamma'' > \mu'(\phi')$, les valuations μ' et $\mu'' = [\mu'\ ;\ \mu''(\phi') = \gamma'']$ vérifient les conclusions du corollaire au théorème 1.7. C'est à dire que si nous appelons φ' l'image $H_{\mu'}(q'\phi')$ de $q'\phi'$ dans $\Delta_{\mu'}$, avec q' défini par l'hypothèse 1, nous avons:

si γ'' n'appartient pas à $\Gamma_{\mu'} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, alors $\Delta_{\mu''} \simeq \left(\Delta_{\mu'}/(\varphi')\right)$;

si γ'' appartient à $\Gamma_{\mu'} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, alors $\Delta_{\mu''} \simeq \left(\Delta_{\mu'}/(\varphi')\right)[S']$,

où S' est l'image $H_{\mu''}(p'\phi'^\tau)$ de $(p'\phi'^\tau)$ dans $\Delta_{\mu''}$, avec τ le plus petit entier $t > 0$ tel que $t\gamma''$ appartienne à $\Gamma_{\mu'}$ et p et p' polynômes de $K[x]$ vérifiant $pp' \underset{\mu''}{\sim} 1$ et $\mu'(p') = \mu''(p') = -\tau\gamma''$, l'existence des polynômes p et p' étant une conséquence du corollaire précédent et du lemme 1.4.

Soit $(\mu_i)_{i\in I}$ une famille de valuations augmentées itérées de $K[x]$, indexée par l'ensemble I, avec soit $I = \mathbb{N}$, soit $I = \{0, 1, \ldots, n\}$. La valuation $\mu_0 = \nu$ est une valuation de K, la valuation μ_1 est la valuation augmentée $\mu_1 = [\mu_0\ ;\ \mu_1(\phi_1) = \gamma_1]$, avec $\phi_1 = x$, et nous nous sommes donné un groupe ordonné Γ contenant Γ_ν et les valeurs γ_i.
Pour tout $i \in I$, $i \geq 1$, si $\gamma_i \in \Gamma_{\mu_{i-1}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, nous notons comme précédemment τ_i le plus petit entier $t > 0$ tel que $t\gamma_i$ appartienne à $\Gamma_{\mu_{i-1}}$, et nous posons $\tau_i = \infty$ sinon. En particulier nous avons $\left[\Gamma_{\mu_i} : \Gamma_{\mu_{i-1}}\right] = \tau_i$.
Pour $i = 0$, nous notons κ_ν le corps résiduel de la valuation $\mu_0 = \nu$ définie sur le corps K, et pour $i \geq 1$, nous notons κ_{μ_i} le corps résiduel de la valuation μ_i définie sur le corps $K(x)$ et Δ_{μ_i} le sous-anneau de κ_{μ_i} engendré par les classes des éléments de $K[x]$ de valuation nulle.
Nous définissons I^* par $I^* = I$ si I est infini, c'est à dire pour $I = \mathbb{N}$, et $I^* = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ si $I = \{0, 1, \ldots, n\}$.

Remarque 1.6. D'après le corollaire du théorème 1.11, si i appartient à I^*, c'est à dire si i a un successeur dans I, et si $i \geq 1$, la valeur γ_i appartient à $\Gamma_{\mu_{i-1}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, c'est à dire τ_i est fini, et l'hypothèse 1 est vérifiée pour la valuation μ_i et le polynôme ϕ_{i+1}.

Théorème 1.12. ([McL 1] Theorem 12.1) *Il existe une famille de corps $(F_i)_{i\in I^*}$ avec $F_0 = \kappa_\nu$, telle que chaque anneau Δ_{μ_i}, pour $i \geq 1$, est isomorphe soit à l'anneau de polynômes $F_{i-1}[S_i]$ si γ_i appartient à $\Gamma_{\mu_{i-1}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, soit à F_{i-1} si γ_i n'appartient pas à $\Gamma_{\mu_{i-1}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.*
Pour tout $i \in I^*$, $i \geq 1$, F_i est une extension finie de F_{i-1} de degré ρ_i, et nous avons l'égalité $\rho_i\tau_i$ $\deg\phi_i = \deg\phi_{i+1}$.

Preuve. Comme pour tout ε dans $\Gamma_{\mu_0} = \Gamma_\nu$, il existe g dans $K[x]$ avec $\deg g < 1$, c'est à dire g dans K, tel que $\mu_0(g) = \varepsilon$, nous déduisons du corollaire au théorème 1.11 que pour tout $i \geq 1$ et pour tout δ dans le groupe $\Gamma_{\mu_{i-1}}$, il existe un polynôme g dans $K[x]$ vérifiant $\deg g < \deg\phi_i$ et $\mu_{i-1}(g) = \delta$.

Si nous posons $\varphi_{i+1} = H_{\mu_i}(q'_i\phi_{i+1})$, où q'_i est défini par l'hypothèse 1, alors nous déduisons de la remarque 1.5:

$$\Delta_{\mu_{i+1}} \simeq \big(\Delta_{\mu_i}/(\varphi_{i+1})\big) , \qquad \text{si } \gamma_{i+1} \notin \Gamma_{\mu_i} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

$$\Delta_{\mu_{i+1}} \simeq \big(\Delta_{\mu_i}/(\varphi_{i+1})\big)[S_{i+1}] , \quad \text{si } \gamma_{i+1} \in \Gamma_{\mu_i} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} ,$$

avec $S_{i+1} = H_{\mu_{i+1}}(p'_{i+1}\phi_{i+1}^{\tau_{i+1}})$, $\tau_{i+1} = \left[\Gamma_{\mu_{i+1}} : \Gamma_{\mu_i}\right]$ et p'_{i+1} est le polynôme définie par l'hypothèse 2 vérifiant $\mu_{i+1}(p'_{i+1}) = -\tau_{i+1}\gamma_{i+1}$.
Nous remarquons en particulier que si $i+1$ appartient aussi à I^*, nous sommes forcément dans le deuxième cas car γ_{i+1} appartient alors à $\Gamma_{\mu_i} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Pour $i = 0$, nous vérifions directement que nous avons encore les isomorphismes précédents en posant $\Delta_{\mu_0} = \kappa_\nu = F_0$, et $\varphi_0 = 0$. En particulier, si nous supposons que I n'est pas réduit à $\{0, 1\}$, nous avons Δ_{μ_1} qui est isomorphe à l'anneau de polynômes $F_0[S_1]$, avec $S_1 = H_{\mu_1}(p'_1\phi_1^{\tau_1})$.
Alors, nous pouvons montrer par récurrence que pour tout $i \in I^*$, $i \geq 1$, l'anneau Δ_{μ_i} est un anneau de polynômes en une variable de la forme $F_{i-1}[S_i]$. En effet si c'est vrai pour i, alors l'élément φ_{i+1} de Δ_{μ_i} est un polynôme irréductible de $F_{i-1}[S_i]$, et l'anneau quotient $\Delta_{\mu_i}/(\varphi_{i+1})$ est un corps F_i.
De plus le degré ρ_i de l'extension F_i/F_{i-1} est égal au degré de φ_{i+1} comme polynôme en S_i. D'après le théorème 1.11 le polynôme-clé ϕ_{i+1} est de la forme $\phi_{i+1} = \phi_i^m + \ldots + f_0$, avec $\mu_i(\phi_{i+1}) = m\gamma_i$ et $m = D_{\phi_i}(\phi_{i+1}) = \deg\phi_{i+1}/\deg\phi_i$. Des égalités $S_i = H_{\mu_i}\big(p'_i\phi_i^{\tau_i}\big)$ et $\varphi_{i+1} = H_{\mu_i}\big(q'_i\phi_{i+1}\big)$, avec p'_i et q'_i inversibles dans Δ_{μ_i}, nous déduisons que le degré de φ_{i+1} en S_i est égal à m/τ_i, c'est à dire que nous avons $\rho_i = [F_i : F_{i-1}] = \deg\phi_{i+1}/(\tau_i \deg\phi_i)$.

Proposition 1.13. *Le corps résiduel κ_{μ_i} de la valuation μ_i sur $K(x)$ est égal au corps des fractions de l'anneau Δ_{μ_i}, c'est à dire à $F_{i-1}(S_i)$, si γ_i appartient à $\Gamma_{\mu_{i-1}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, et est égal à l'anneau Δ_{μ_i}, c'est à dire à F_{i-1}, si γ_i n'appartient pas à $\Gamma_{\mu_{i-1}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.*

Preuve. Pour montrer que le corps résiduel κ_{μ_i} est égal au corps des fractions de l'anneau Δ_{μ_i}, il suffit de montrer que pour tout couple de polynômes non nuls f_1 et f_2 de $K[x]$ avec $\mu_i(f_1) = \mu_i(f_2)$, il existe un couple de polynômes g_1 et g_2 dans $K[x]$ avec $\mu_i(g_1) = \mu_i(g_2) = 0$ et vérifiant $f_1g_2 \underset{\mu_i}{\sim} f_2g_1$.

D'après le corollaire au théorème 1.11, dans le cas $\gamma_i \in \Gamma_{\mu_{i-1}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, il existe g dans $K[x]$ tel que $\mu_i(g) = -\mu_i(f_1) = -\mu_i(f_2)$, et il suffit de prendre $g_1 = gf_1$ et $g_2 = gf_2$.

Dans le cas $\gamma_i \notin \Gamma_{\mu_{i-1}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, pour tout f dans $K[x]$, il existe un polynôme h dans $K[x]$ avec $\deg h < \deg\phi_i$ et un entier t tels que f soit μ_i-équivalent à $h\phi_i^t$. Par conséquent si les polynômes f_1 et f_2 vérifient $\mu_i(f_1) = \mu_i(f_2)$, et si nous posons $f_s \underset{\mu_i}{\sim} h_s\phi^{t_s}$, $s = 1, 2$, nous avons $t_1 = t_2$, et il suffit de trouver g_1 et g_2 tels que $h_1g_2 \underset{\mu_i}{\sim} h_2g_1$. Mais comme $\deg h_j < \deg\phi_i$, c'est une conséquence du lemme 1.4.

Remarque 1.7. Nous déduisons du théorème 1.12 que pour tout i dans I^*, si les polynômes ϕ_i et ϕ_{i+1} sont de même degré, alors ρ_i et τ_i sont égaux à 1, d'où les égalités $F_i = F_{i-1}$ et $\Gamma_{\mu_i} = \Gamma_{\mu_{i-1}}$.
De plus pour tout $i \in I^*$, nous avons la relation:

$$\deg\phi_i \ = \ \left[F_{i-1} : \kappa_\nu\right] \left[\Gamma_{\mu_{i-1}} : \Gamma_\nu\right] .$$

Nous allons finir cette section en étudiant les algèbres graduées $\mathrm{gr}_{\mu_i}K[x]$. Plus précisément nous déduisons par récurrence du théorème 1.7 le résultat suivant.

Proposition 1.14. *Soit $\big(\mu_i\big)_{i\in I}$ une famille de valuations augmentées itérées de $K[x]$, où $\mu_0 = \nu$ est une valuation de K. Alors pour tout n dans I, il existe un morphisme homogène surjectif*

$$G_i \colon \big(\mathrm{gr}_\nu K\big)[T_1, \ldots, T_n] \ \longrightarrow \ \mathrm{gr}_{\mu_n} K[x] ,$$

qui envoie chaque T_s, $1 \leq s \leq n$, sur $H_{\mu_n}(\phi_s)$.

Remarque 1.8. Nous avons vu au corollaire de la proposition 1.8, que si dans la famille de polynômes (ϕ_i), nous avions $\deg\phi_s = \deg\phi_{s+1}$, $1 \leq s < s+1 \leq n$, alors le polynôme ϕ_s et la valuation augmentée $\mu_s = [\mu_{s-1} \ ; \ \mu_s(\phi_s) = \gamma_s]$ pouvaient ne pas être pris en compte pour définir la valuation μ_n.

Nous avons déjà vu à la remarque 1.7 que la valeur γ_s appartenait au groupe $\Gamma_{\mu_{s-1}}$. Si nous considérons l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_{\mu_n} K[x]$, nous vérifions que le générateur $T_s = H_{\mu_n}(\phi_s)$ peut aussi être négligé. En effet d'après le corollaire à la proposition 1.8, les polynômes ϕ_s et ϕ_{s+1} sont μ_{s+1}-équivalents, donc μ_n-équivalents, d'où l'égalité $H_{\mu_n}(\phi_s) = H_{\mu_n}(\phi_{s+1})$.

Soit $\tilde{\mu}$ une pseudo-valuation de $K[x]$. Nous rappelons qu'une pseudo-valuation $\tilde{\mu}$ d'un anneau R est une application de R dans $\tilde{\Gamma} \cup \{+\infty\}$, où $\tilde{\Gamma}$ est un groupe ordonné, vérifiant les mêmes propriétés qu'une valuation, excepté que la valeur $+\infty$ peut être prise par des éléments x de R différents de 0. L'ensemble des éléments $x \in R$ tels que $\tilde{\mu}(x) = +\infty$ est un idéal premier $\mathcal{S}$ de R, appelé le socle de la pseudo-valuation. Nous pouvons associer à $\tilde{\mu}$ une valuation du corps des fractions de l'anneau quotient $R/\mathcal{S}$ et il y a une bijection entre l'ensemble des pseudo-valuations de R de socle $\mathcal{S}$ et l'ensemble des valuations du corps $Fr(R/\mathcal{S})$.
En particulier, si L est une extension algébrique de K engendrée par un élément θ, $L = K(\theta)$, les valuations de L correspondent aux pseudo-valuations $\tilde{\mu}$ de $K[x]$ de socle $\mathcal{S} = (G)$ l'idéal de $K[x]$ engendré par G, où $G = G(x)$ est le polynôme irréductible de θ dans K.

Remarque 1.9. De la même manière que nous avons défini une valuation augmentée pour une valuation μ à partir d'un polynôme-clé ϕ et d'une valeur γ, nous pouvons définir une *pseudo-valuation augmentée* en prenant $\gamma = +\infty$. Plus précisément, pour tout f dans $K[x]$, si $f = f_m\phi^m + f_{m-1}\phi^{m-1} + \ldots + f_0$ est le développement de f selon les puissances de ϕ, nous avons $\mu'(f) = \mu'(f_0)$, c'est à dire $\mu'(f) = +\infty$ si et seulement si f est divisible par ϕ. En particulier le socle de la pseudo-valuation μ' est l'idéal (ϕ). Nous notons cette pseudo-valuation $\mu' = [\mu\ ;\ \mu'(\phi) = +\infty]$.

Soient μ et $\tilde{\mu}$ respectivement une valuation et une pseudo-valuation de $K[x]$ vérifiant $\mu(f) \leq \tilde{\mu}(f)$ pour tout polynôme f de $K[x]$. Alors si μ et $\tilde{\mu}$ sont distinctes nous pouvons considérer l'ensemble non vide $\tilde{\Phi}(\mu)$ des polynômes unitaires ϕ de $K[x]$ tels que $\mu(\phi) < \tilde{\mu}(\phi)$. Soit $d = d(\mu)$ le degré minimal d'un polynôme ϕ dans $\tilde{\Phi}(\mu)$, et soit $\Phi(\mu)$ le sous-ensemble formé des polynômes ϕ de degré d:

$$\Phi(\mu) = \big\{\ \phi \in K[x]\ \mid\ \phi \text{ unitaire },\ \mu(\phi) < \tilde{\mu}(\phi) \text{ et } \deg\phi = d(\mu)\big\}.$$

Théorème 1.15. ([McL 1] Theorem 8.1) *Tout polynôme ϕ appartenant à $\Phi(\mu)$ est un polynôme-clé pour la valuation μ.*
Soit ϕ_1 un polynôme de $\Phi(\mu)$ et soit μ_1 la valuation augmentée qu'il définit, $\mu_1 = [\mu\ ;\ \mu_1(\phi_1) = \gamma_1]$, où $\gamma_1 = \tilde{\mu}(\phi_1) > \mu(\phi_1)$, alors μ_1 vérifie $\mu(f) \leq \mu_1(f) \leq \tilde{\mu}(f)$ pour tout f dans $K[x]$.
De plus, si nous définissons par récurrence la famille de valuations (μ_i) et la famille de polynômes (ϕ_i) en posant:

$\mu_0 = \mu$,

$\phi_i \in \Phi(\mu_{i-1})$ et $\mu_i = [\mu_{i-1}\ ;\ \mu_i(\phi_i) = \gamma_i]$ avec $\gamma_i = \tilde{\mu}(\phi_i)$,

nous obtenons une famille (μ_i) de valuations augmentées itérées, la famille étant finie s'il existe n tel que $\Phi(\mu_n) = \emptyset$.

Preuve. Nous allons d'abord montrer que si ϕ est un polynôme appartenant à $\Phi(\mu)$, alors pour tout f dans $K[x]$ nous avons:

$$\mu(f) < \tilde{\mu}(f) \iff \phi \underset{\mu}{|} f\ .$$

Supposons que f est μ-divisible par ϕ, il existe alors $q \neq 0$ dans $K[x]$ tel que $f \underset{\mu}{\sim} q\phi$, d'où les inégalités $\tilde{\mu}(q\phi - f) \geq \mu(q\phi - f) > \mu(q\phi) = \mu(f)$, avec par hypothèse $\tilde{\mu}(\phi) > \mu(\phi)$. Comme $\tilde{\mu}$ est une pseudo-valuation nous avons aussi $\tilde{\mu}(f) \geq \inf\big(\tilde{\mu}(q\phi), \tilde{\mu}(q\phi - f)\big)$, d'où l'inégalité $\tilde{\mu}(f) > \mu(f)$.
Réciproquement supposons $\tilde{\mu}(f) > \mu(f)$ et soit $f = q\phi + r$ la division euclidienne de f par ϕ. Par définition de $\Phi(\mu)$, nous avons $\deg f \geq \deg\phi$, d'où $q \neq 0$, et nous avons $\tilde{\mu}(r) = \mu(r)$. Nous trouvons alors $\mu(r) = \tilde{\mu}(r) \geq \inf\big(\tilde{\mu}(f), \tilde{\mu}(q\phi)\big) > \inf\big(\mu(f), \mu(q\phi)\big)$, d'où $\mu(r) > \mu(f) = \mu(q\phi)$, c'est à dire $\phi \underset{\mu}{|} f$.
Par conséquent ϕ est un polynôme-clé pour la valuation μ, en effet ϕ est unitaire par hypothèse et nous déduisons de ce qui précède que ϕ est μ-minimal et μ-irréductible.

Par construction nous avons encore $\mu(f) \leq \mu_1(f) \leq \tilde{\mu}(f)$ pour tout f dans $K[x]$.
Pour montrer que nous pouvons construire par récurrence une famille (μ_i) de valuations augmentées itérées, il suffit de vérifier que pour tout $i \geq 1$, nous avons $\deg\phi_{i+1} \geq \deg\phi_i$, ce qui est une conséquence

de la définition de ϕ_{i+1} comme élément de $\Phi(\mu_i)$, et que les polynômes ϕ_i et ϕ_{i+1} ne sont pas μ_i-équivalents, ce qui est une conséquence de l'équivalence $\mu_i(f) < \tilde{\mu}(f) \Longleftrightarrow \phi_{i+1} \underset{\mu_i}{|} f$.

1.3 A-factorisation

Nous supposons de nouveau que nous nous sommes donné une valuation μ et une pseudo-valuation $\tilde{\mu}$ sur $K[x]$, vérifiant $\mu \leq \tilde{\mu}$. Grâce au théorème 1.15, nous obtenons une famille de valuations (μ_i) de $K[x]$ comprise entre μ et $\tilde{\mu}$, construite explicitement à partir de la valuation initiale μ et "s'approchant de plus en plus" de la pseudo-valuation $\tilde{\mu}$. Dans le cas où la valuation initiale $\nu = \mu_0$ sur K est une valuation discrète de rang un, et quitte à considérer une famille infinie et une valuation limite $\mu_\infty(f) = \lim \mu_i(f)$, MacLane a montré que nous obtenions ainsi la pseudo-valuation $\tilde{\mu}$ de $K[x]$ correspondant à une valuation de l'extension algébrique $L = K(\theta)$ ([McL 2]), ou la valuation $\tilde{\mu}$ de l'extension transcendante pure $K(x)$ ([McL 1]).
Nous nous proposons d'étudier dans la suite le cas d'une valuation quelconque ν de K, c'est à dire dont le groupe des ordres Γ n'est pas supposé isomorphe à $\mathbb{Z}$. Ce qui empêche essentiellement de faire la même démonstration que dans le cas d'une valuation discrète de rang un, c'est l'existence de suites infinies strictement croissantes majorées dans Γ, c'est à dire qui ne "convergent" pas vers $+\infty$. Nous pouvons alors obtenir une famille infinie de valuations augmentées $\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$, associée à une famille de polynômes-clés $\left(\phi_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ de même degré et à une famille de valeurs $\left(\gamma_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ qui ne converge pas vers $+\infty$, et le résultat principal de cette partie est d'étudier dans ce cas le comportement de la famille $\left(\mu_\alpha(f)\right)_{\alpha\in A}$ pour tout f dans $K[x]$.

Nous supposons que nous avons défini une famille (μ_i) de valuations augmentées itérées à partir de $\mu = \mu_0$ et de $\tilde{\mu}$, et comme précédemment nous notons $d(\mu_i)$ le degré des polynômes unitaires ϕ appartenant à $\Phi(\mu_i)$.

Proposition 1.16. *Pour tout $i \geq 1$, nous avons $d(\mu_i) \geq d(\mu_{i-1})$, et si nous avons l'égalité $d(\mu_i) = d(\mu_{i-1})$, c'est à dire si $d(\mu_i) = \deg\phi_i$, alors l'ensemble $\Phi(\mu_i)$ est égal à:*

$$\Phi(\mu_i) = \left\{ \ \phi \in K[x] \ \ | \ \ \phi \text{ unitaire}, \ \deg\phi = d(\mu_i) \text{ et } \tilde{\mu}(\phi) > \gamma_i \right\} \ .$$

Preuve. Il faut montrer que pour tout polynôme unitaire ϕ de degré $d(\mu_i) = \deg\phi_i$, $\tilde{\mu}(\phi) > \mu_i(\phi)$ si et seulement si $\tilde{\mu}(\phi) > \gamma_i$.
Par hypothèse nous avons $\phi = \phi_i + h$ avec $\deg h < \deg\phi_i$, d'où l'égalité $\mu_i(\phi) = \inf\bigl(\gamma_i, \mu_{i-1}(h)\bigr) = \inf\bigl(\tilde{\mu}(\phi_i), \tilde{\mu}(h)\bigr)$, et l'équivalence cherchée est une conséquence de l'inégalité $\tilde{\mu}(\phi) \geq \inf\bigl(\tilde{\mu}(\phi_i), \tilde{\mu}(h)\bigr)$.

Nous supposons que nous avons trouvé une valuation augmentée itérée $\mu_\bullet$ qui prolonge la valuation ν de K et qui vérifie $\mu_\bullet \leq \tilde{\mu}$ sur $K[x]$.
Nous appelons $\Phi_\bullet = \Phi(\mu_\bullet)$ l'ensemble des polynômes unitaires ϕ de $K[x]$ vérifiant $\mu_\bullet(\phi) < \tilde{\mu}(\phi)$ et de degré minimal pour cette propriété, $\deg(\phi) = d_\bullet = d(\mu_\bullet)$.
Nous appelons $\Lambda_\bullet$ l'ensemble des valeurs $\tilde{\mu}(\phi)$ quand ϕ parcourt $\Phi_\bullet$. D'après ce qui précède, nous savons que si $\Lambda_\bullet$ possède un plus grand élément γ, il suffit de choisir $\phi_{\bullet+1}$ dans $\Phi_\bullet$ tel que $\mu_\bullet(\phi_{\bullet+1}) = \gamma$ et de construire la valuation augmentée itérée $\mu_{\bullet+1} = [\mu_\bullet \ ; \ \mu_{\bullet+1}(\phi_{\bullet+1}) = \gamma]$ pour obtenir une nouvelle valuation itérée avec $d_{\bullet+1} = d(\mu_{\bullet+1}) > d(\mu_\bullet)$.
Nous allons supposer que $\Lambda_\bullet$ ne possède pas de plus grand élément, et nous écrivons $\Lambda_\bullet = \{\gamma_\alpha \ \mid \ \alpha \in A\}$, où A est un ensemble infini, totalement ordonné avec $\alpha < \beta$ si et seulement si $\gamma_\alpha < \gamma_\beta$. Pour tout $\alpha \in A$, nous choisissons un polynôme ϕ_α dans $\Phi_\bullet$ avec $\tilde{\mu}(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha$ et nous appelons μ_α la valuation augmentée qu'il définit: $\mu_\alpha = [\mu_\bullet \ ; \ \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$. Nous déduisons du corollaire à la proposition 1.8 que pour tout β dans A avec $\beta < \alpha$, la valuation μ_α est aussi égale à la valuation augmentée $[\mu_\beta \ ; \ \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$.

Pour pouvoir trouver une nouvelle valuation à partir de $\mu_\bullet$ qui soit plus proche de $\tilde{\mu}$, nous devons étudier la famille des valuations μ_α.
Quitte à remplacer la valuation $\mu_\bullet$ par $\mu'_\bullet = [\mu_\bullet \ ; \ \mu'_\bullet(\phi) = \gamma']$, où ϕ est un polynôme dans $\Phi_\bullet$, nous pouvons supposer que la valuation $\mu_\bullet$ initiale est une valuation augmentée de la forme $\mu_\bullet = [\mu_{\bullet-1} \ \ \mu_\bullet(\phi_\bullet) = \gamma_\bullet]$, avec $\deg\phi_\bullet = d_\bullet$.

En particulier tout polynôme ϕ_α de $\Phi_\bullet$ est alors de la forme $\phi_\alpha = \phi_\bullet + h_\alpha$, avec $\deg h_\alpha < d_\bullet$, et d'après la proposition 1.8 nous avons les égalités $\gamma_\bullet = \mu_\bullet(\phi_\alpha) = \mu_\alpha(\phi_\bullet) = \mu_{\bullet-1}(h_\alpha) = \tilde{\mu}(h_\alpha)$.

Lemme 1.17. *Pour tout α dans A, γ_α appartient au groupe des ordres $\Gamma_\bullet$ de la valuation $\mu_{\bullet-1}$, par conséquent le groupe des ordres $\Gamma_\alpha = \Gamma_{\mu_\alpha}$ de la valuation μ_α est égal à $\Gamma_\bullet$.*
Réciproquement, pour tout α dans A, l'intervalle $\left]\gamma_\bullet\ \gamma_\alpha\right] = \left\{\delta \in \Gamma_\bullet \mid \gamma_\bullet < \delta \leq \gamma_\alpha\right\}$ est contenu dans $\Lambda_\bullet$.

Preuve. Comme $\Lambda_\bullet$ n'a pas de plus grand élément, il existe $\beta > \alpha$ et ϕ_β dans $\Phi(\mu_\alpha)$ qui est de la forme $\phi_\beta = \phi_\alpha + h$, avec $\deg h < d_\bullet$. Nous avons alors $\gamma_\alpha = \tilde{\mu}(\phi_\alpha) = \tilde{\mu}(h) = \mu_{\bullet-1}(h)$, d'où $\gamma_\alpha \in \Gamma_\bullet$. Comme les polynômes ϕ_α et ϕ_β ont même degré, l'égalité $\Gamma_{\mu_\alpha} = \Gamma_\bullet$ peut aussi être déduite de la remarque 1.7.

Il existe h dans $K[x]$ de degré $\deg h < d_\bullet$ et de valuation $\tilde{\mu}(h) = \mu_{\bullet-1}(h) = \delta$, et nous posons $\phi = \phi_\alpha + h$. De l'écriture $\phi = \phi_\alpha + h$, nous déduisons que $\mu_\alpha(\phi)$ est égal à $\inf\bigl(\gamma_\alpha, \mu_{\bullet-1}(h)\bigr) = \delta$, et de l'écriture $\phi = \phi_\bullet + (h_\alpha + h)$, nous déduisons que $\mu_\bullet(\phi)$ est égal à $\inf\bigl(\gamma_\bullet, \mu_{\bullet-1}(h_\alpha + h)\bigr) = \gamma_\bullet$, car $\mu_{\bullet-1}(h_\alpha) = \gamma_\bullet < \mu_{\bullet-1}(h)$.

Pour étudier la famille de valuations augmentées $\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ définie précédemment à partir de l'ensemble $\Lambda_\bullet = \{\gamma_\alpha \mid \alpha \in A\}$, nous devons décrire la structure d'ensemble ordonné du groupe des ordres Γ, dans le cas où il n'est pas discret de rang un, c'est à dire n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}$.
Nous définisons une coupure d'un ensemble totalement ordonné $(E, \leq)$ comme une partition de E, $E = E_- \sqcup E_+$, vérifiant $\forall x \in E_-$, $\forall y \in E_+$, $x < y$; cela revient à dire que $\forall x \in E_-$, $\forall x' \in E$, $x' \leq x \Longrightarrow x' \in E_-$ et de même $\forall y \in E_+$, $\forall y' \in E$, $y' \geq y \Longrightarrow y' \in E_+$. Nous disons que la coupure est non triviale si les deux sous-ensembles E_- et E_+ sont non vides.
Nous rappelons que si L est un corps muni d'une valuation ν à valeurs dans le groupe ordonné Γ, il y a une bijection entre l'ensemble des coupures de Γ et l'ensemble des idéaux fractionnaires de R_ν, c'est à dire des sous R_ν-modules de L. A la coupure $\Gamma = \Lambda_- \sqcup \Lambda_+$, nous associons l'idéal fractionnaire $\mathcal{J} = \bigl\{g \in L \mid \nu(g) \in \Lambda_+ \cup \{+\infty\}\bigr\}$. En particulier, nous obtenons tous les idéaux de l'anneau de valuation R_ν en considérant les coupures telles que $\Lambda_+ \subset \Gamma_+$ ([Va]).

Soit ν une valuation d'un corps L de rang r, par définition r est le rang du groupe des ordres Γ de la valuation ν, soit $(0) = \Gamma_{(0)} \subsetneq \Gamma_{(1)} \subsetneq \ldots \subsetneq \Gamma_{(r)} = \Gamma$ la suite des sous-groupes isolés de Γ, et pour tout i, $0 \leq i \leq r$, soit $\lambda_i \colon \Gamma \longrightarrow \bar{\Gamma}^{(i)}$ l'application croissante de Γ dans le groupe quotient $\bar{\Gamma}^{(i)} = \Gamma/\Gamma_{(i)}$. Nous considérons une coupure non triviale de Γ, $\Lambda_- \sqcup \Lambda_+$. Alors, il existe un entier o, $0 \leq o \leq r-1$, tel que $\lambda_o(\Lambda_-) \cap \lambda_o(\Lambda_+) = \emptyset$ et $\lambda_i(\Lambda_-) \cap \lambda_i(\Lambda_+) \neq \emptyset$ pour $i > o$. En effet nous avons $\Lambda_- \cap \Lambda_+ = \emptyset$ et $\lambda_r(\Lambda_-) = \lambda_r(\Lambda_+) = \bar{\Gamma}^{(r)} = (0)$.
Nous remarquons que si $\lambda_i(\Lambda_-) \cap \lambda_i(\Lambda_+)$ est non vide, alors il contient un unique élément $\tilde{\gamma} \in \bar{\Gamma}^{(i)}$. En effet si $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ sont deux éléments de $\bar{\Gamma}^{(i)}$ avec $\tilde{\gamma}_1 < \tilde{\gamma}_2$, alors tout γ_1 appartenant à $\lambda_i^{-1}(\tilde{\gamma}_1)$ est strictement inférieur à tout γ_2 appartenant à $\lambda_i^{-1}(\tilde{\gamma}_2)$.
Nous appelons Δ le sous-groupe $\Gamma_{(o+1)}/\Gamma_{(o)}$ de $\bar{\Gamma}^{(o)}$, c'est le noyau du morphisme de $\bar{\Gamma}^{(o)}$ dans $\bar{\Gamma}^{(o+1)}$, et nous appelons $\lambda_o(\Lambda_-) = \bar{\Lambda}_-^{(o)}$ et $\lambda_o(\Lambda_+) = \bar{\Lambda}_+^{(o)}$ les images de Λ_- et Λ_+ dans $\bar{\Gamma}^{(o)}$. Alors les sous-ensembles $\bigl\{\eta \in \Delta \mid \lambda_o(\gamma_1) + \eta \in \bar{\Lambda}_-^{(o)}\bigr\}$ et $\bigl\{\eta \in \Delta \mid \lambda_o(\gamma_1) + \eta \in \bar{\Lambda}_+^{(o)}\bigr\}$, où nous avons choisi un élément γ_1 de Γ vérifiant $\lambda_{o+1}(\gamma_1) \in \lambda_{o+1}(\Lambda_-) \cap \lambda_{o+1}(\Lambda_+)$, sont non vides et forment une coupure du groupe Δ. Comme Δ est un groupe ordonné de rang un, nous pouvons le considérer comme un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Alors toute coupure est définie par un nombre réel δ et nous avons $\bigl\{\eta \in \Delta \mid \lambda_o(\gamma_1) + \eta \in \bar{\Lambda}_-^{(o)}\bigr\}$ qui est égal soit à $]-\infty\ ,\ \delta]\ \cap\ \Delta$ soit à $]-\infty\ ,\ \delta[\ \cap\ \Delta$.
Nous pouvons remarquer que si l'entier o est égal à $r-1$, alors tout élément γ_1 de Γ convient pour définir la coupure de Δ. Si l'entier o est différent de 0, même dans le cas où le groupe Δ est discret, aucun des sous-ensembles Λ_- et Λ_+ ne peut avoir un élément extrémal. Si l'entier o est égal à 0, le groupe Δ est isomorphe au sous-groupe isolé $\Gamma_{(1)}$ de Γ, et le sous-ensemble Λ_- a toujours une borne supérieure dans $\Delta \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$.

Nous voulons étudier certaines coupures de $\Gamma_\bullet$ associées à la famille de valuation $\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$. Soit r le rang de la valuation $\mu_\bullet$ sur $K[x]$ et comme précédemment nous notons $\Gamma_{(i)}$, $0 \leq i \leq r$, les sous-groupes isolés du groupe des ordres $\Gamma_\bullet$. Nous avons alors le résultat suivant.

Lemme 1.18. *Si le sous-groupe isolé de rang un $\Gamma_{(1)}$ n'est pas discret, alors pour tout α dans A, pour tout δ dans $\Gamma_\bullet$ et pour tout $k \geq 1$ vérifiant $\delta < k\gamma_\alpha$ il existe β dans A, $\beta < \alpha$, tel que $\delta < k\gamma_\beta$. Si le sous-groupe $\Gamma_{(1)}$ est discret, alors pour tout α dans A, si l'ensemble $\{\gamma_\beta \mid \gamma_\beta < \gamma_\alpha\}$ n'est pas vide, il existe β_0 dans A tel que γ_{β_0} soit le plus grand élément de cet ensemble.*

Preuve. Soit α dans A et soit $i \geq 1$, alors pour tout ϵ dans $\Gamma_{(i)}$, avec $\epsilon > 0$, nous avons $\gamma = \gamma_\alpha - \epsilon$ qui vérifie $\gamma < \gamma_\alpha$ et $\lambda_i(\gamma) = \lambda_i(\gamma_\alpha)$. D'après le lemme 1.17, si nous supposons ϵ "pas trop grand", c'est à dire $\epsilon < \gamma_\alpha - \gamma_\bullet$, il existe β dans A tel que $\gamma = \gamma_\beta$.
Si le sous-groupe $\Gamma_{(1)}$ est discret, donc isomorphe à $\mathbb{Z}$, soit γ_α est le successeur immédiat de $\gamma_\bullet$ et dans ce cas l'ensemble $\{\beta \mid \gamma_\beta < \gamma_\alpha\}$ est vide, soit $\gamma_\alpha - \gamma_\bullet > 1$ et il suffit de prendre $\epsilon = 1$, l'élément $\beta_0 = \gamma_\alpha - 1$ correspond au plus grand élément γ_{β_0} de $\{\gamma_\beta \mid \gamma_\beta < \gamma_\alpha\}$.
Si le groupe $\Gamma_{(1)}$ n'est pas discret, il suffit de considérer δ de la forme $\delta = \gamma_\alpha - \eta$ avec $\eta > 0$ dans $\Gamma_{(1)}$, et comme $\Gamma_{(1)}$ n'est pas discret il existe $\epsilon > 0$ dans $\Gamma_{(1)}$ avec $k\epsilon < \eta$.

Pour tout polynôme f de $K[x]$ de degré $d < d_\bullet$, la valuation $\mu_\alpha(f)$ est égale à $\mu_{\bullet-1}(f)$, et par conséquent ne dépend pas de α dans A. Dans le cas d'un polynôme f de degré quelconque, nous voulons étudier les différentes valuations $\mu_\alpha(f)$, pour α parcourant A. Pour cela nous allons d'abord fixer quelques notations:
- nous définissons $-\infty$ et ∞ tels que $\forall \alpha \in A,\ -\infty < \alpha < \infty$, et $\bar{A} = A \cup \{-\infty, \infty\}$;
- nous posons $\phi_{-\infty} = \phi_\bullet$, $\gamma_{-\infty} = \gamma_\bullet$, $\mu_{-\infty} = \mu_\bullet$, $\gamma_\infty = +\infty$, et nous définissons formellement ϕ_∞ par $\forall \alpha \in A,\ \mu_\alpha(\phi_\infty) = \gamma_\alpha$.
Nous pouvons remarquer qu'il ne peut pas exister de polynôme unitaire ϕ de degré $d_\bullet$ vérifiant cette propriété. En effet un tel polynôme devrait appartenir à $\Phi_\bullet$ et la valuation $\tilde{\mu}(\phi) = \gamma$ serait alors le plus grand élément de $\Lambda_\bullet$.
Alors, pour tout α dans $A \cup \{-\infty\}$ et tout β dans $\bar{A}$, nous avons:

$$\mu_\alpha(\phi_\beta) \ = \ \inf(\gamma_\alpha, \gamma_\beta) \ .$$

Nous disons que deux polynômes f et g de $K[x]$ sont A-équivalents, et nous notons $f \underset{A}{\sim} g$, si et seulement si pour tout α dans A, nous avons l'égalité $\mu_\alpha(f) = \mu_\alpha(g)$. Nous ne demandons pas que les polynômes f et g soient μ_α-équivalents.

Théorème 1.19. *Soit f un polynôme de $K[x]$ de degré d, avec $d < kd_\bullet$, $k \geq 1$, alors il existe $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}\}$ dans $\bar{A}$, avec $-\infty \leq \alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_{k-1} \leq \infty$, et f_0 dans $K[x]$ de degré* $\deg f_0 < d_\bullet$ *tels que: $f \underset{A}{\sim} f_0\phi_{\alpha_1}\ldots\phi_{\alpha_{k-1}}$.*

Un produit de la forme $f_0\phi_{\alpha_1}\ldots\phi_{\alpha_{k-1}}$, avec f_0 vérifiant $\mu_{\bullet-1}(f_0) = \tilde{\mu}(f_0)$, et $-\infty \leq \alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_{k-1} \leq \infty$ dans $\bar{A}$, tel que $f \underset{A}{\sim} f_0\phi_{\alpha_1}\ldots\phi_{\alpha_{k-1}}$ est appelé une A-factorisation de f de longueur $k-1$.
Si $f_0\phi_{\alpha_1}\ldots\phi_{\alpha_{k-1}}$ et $g_0\phi_{\beta_1}\ldots\phi_{\beta_{l-1}}$ sont deux A-factorisations de f, alors nous avons la propriété suivante: soient i et j définis respectivement par $-\infty = \alpha_{i-1} < \alpha_i$ et $-\infty = \beta_{j-1} < \beta_j$, alors nous avons $k - i = l - j$, $\alpha_i = \beta_j, \ldots, \alpha_{k-1} = \beta_{l-1}$ et $\tilde{\mu}(f_0\phi_{\alpha_1}\ldots\phi_{\alpha_{i-1}}) = \tilde{\mu}(g_0\phi\beta_1\ldots\phi_{\beta_{j-1}})$, c'est à dire $\mu_{\bullet-1}(f_0) - \mu_{\bullet-1}(g_0) = (j-i)\gamma_\bullet$.
En particulier, nous déduisons du théorème que nous pouvons associer à tout polynôme f de $K[x]$ une famille unique $I(f) = (\delta; k; \alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$, avec $\delta \in \Gamma_\bullet$, $1 \leq i \leq k \leq [\deg f/d_\bullet]$ et $-\infty < \alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_{i-1} < \infty$ dans A, telle que f admette une A-factorisation $f \underset{A}{\sim} f_0\phi_{\alpha_1}\ldots\phi_{\alpha_{i-1}}\phi_\infty^{k-i}$, où f_0 est un polynôme de $K[x]$ de degré $\deg f_0 < d_\bullet$ vérifiant $\mu_{\bullet-1}(f_0) = \delta$. Une telle factorisation est appelée une A-factorisation minimale de f.

Corollaire. *Soit f dans $K[x]$ avec* $\deg f < kd_\bullet$*, alors $\forall \alpha < \beta$ dans $A \cup \{-\infty\}$, $\mu_\alpha(f) \leq \mu_\beta(f) \leq \mu_\alpha(f) + (k-1)(\gamma_\beta - \gamma_\alpha)$.*

Preuve. Si nous écrivons $f \underset{A}{\sim} f_0\phi_{\alpha_1}\ldots\phi_{\alpha_{k-1}}$, alors nous avons $\mu_\alpha(f) = \delta_0 + \mu_\alpha(\phi_{\alpha_1}) + \ldots + \mu_\alpha(\phi_{\alpha_{k-1}})$ où $\delta_0 = \mu_{\bullet-1}(f_0)$ ne dépend pas de α.
Soit j, $0 \leq j \leq k-1$, tel que $\alpha_j \leq \alpha < \alpha_{j+1}$, alors $\mu_\alpha(\phi_{\alpha_t}) = \gamma_{\alpha_t}$ pour $t \leq j$ car $\gamma_{\alpha_t} \leq \gamma_{\alpha_j} \leq \gamma_\alpha$, et $\mu_\alpha(\phi_{\alpha_t}) = \gamma_\alpha$ pour $t \geq j+1$ car $\gamma_{\alpha_t} \geq \gamma_{\alpha_{j+1}} \geq \gamma_\alpha$.
Par conséquent $\mu_\alpha(f)$ est égal à $\delta_0 + \gamma_{\alpha_1} + \ldots + \gamma_{\alpha_j} + (k-j-1)\gamma_\alpha$.

Soient $\alpha < \beta$, et soient $j \leq i$ tels que $\alpha_j \leq \alpha < \alpha_{j+1}$ et $\alpha_i \leq \beta < \alpha_{i+1}$. Alors $\mu_\beta(f) - \mu_\alpha(f)$ est égal à $(\gamma_{\alpha_{j+1}} - \gamma_\alpha) + \ldots + (\gamma_{\alpha_i} - \gamma_\alpha) + (k-i-1)(\gamma_\beta - \gamma_\alpha)$.
Pour tout t, $j+1 \leq t \leq i$, nous avons $0 \leq \gamma_{\alpha_t} - \gamma_\alpha \leq \gamma_\beta - \gamma_\alpha$, d'où les inégalités $0 \leq \mu_\beta(f) - \mu_\alpha(f) \leq (k-j-1)(\gamma_\beta - \gamma_\alpha) \leq (k-1)(\gamma_\beta - \gamma_\alpha)$.

Remarque 1.10. Même dans le cas où f est un polynôme unitaire de degré $d_\bullet$, nous ne pouvons pas toujours trouver un ϕ_β tel que f et ϕ_β soient μ_α-équivalents pour tout α dans A.
Soit f un tel polynôme avec $\tilde{\mu}(f) > \gamma_\bullet$, alors d'après la proposition 1.16 le polynôme f appartient à $\Phi_\bullet$ et il existe β dans A tel que $\tilde{\mu}(f) = \beta$. Nous posons $h = f - \phi_\beta$ et nous avons alors $\mu_{\bullet-1}(h) = \tilde{\mu}(h) \geq \inf\bigl(\tilde{\mu}(f), \tilde{\mu}(\phi_\beta)\bigr) = \gamma_\beta$.

Pour $\alpha < \beta$, nous avons l'inégalité $\mu_\alpha(h) > \mu_\alpha(\phi_\beta) = \gamma_\alpha$, d'où $f \underset{\mu_\alpha}{\sim} \phi_\beta$.

Pour $\alpha \geq \beta$, nous avons $f \underset{\mu_\alpha}{\sim} \phi_\beta$ dans le cas où $\mu_{\bullet-1}(h) > \gamma_\beta$. En effet nous avons encore l'inégalité $\mu_\alpha(h) > \mu_\alpha(\phi_\beta) = \gamma_\beta$. Mais si $\mu_{\bullet-1}(h)$ est égal à γ_β, nous ne pouvons plus en déduire la μ_α-équivalence de f et ϕ_β.

Preuve du théorème. Nous allons faire un démonstration par récurrence sur k.

Le théorème est vérifié pour $k = 1$.

Nous supposons le théorème vérifié à l'ordre $k-1$, $k \geq 2$, et soit f un polynôme de $K[x]$ de degré $d < kd_\bullet$. Pour tout α appartenant à A, nous posons $f = p_\alpha \phi_\alpha + s_\alpha$ la division euclidienne de f par ϕ_α, en particulier nous avons $\deg s_\alpha < d_\bullet$, $\deg p_\alpha < (k-1)d_\bullet$ et par hypothèse de récurrence p_α possède alors une A-factorisation de longueur $k-2$.
Nous appelons $A_<(f)$ le sous-ensemble $A_<(f) = \bigl\{\alpha \in A \mid \mu_\alpha(f) < \tilde{\mu}(f)\bigr\}$. Nous remarquons que s'il existe β appartenant à $A_=(f) = A \setminus A_<(f)$, c'est à dire β vérifiant $\mu_\beta(f) = \tilde{\mu}(f)$, tel que $\mu_{\bullet-1}(s_\beta) > \mu_\beta(f)$, alors pour tout α appartenant à A, nous avons encore $\mu_{\bullet-1}(s_\beta) > \mu_\alpha(f)$, d'où $f \underset{\mu_\alpha}{\sim} p_\beta \phi_\beta$. Nous en déduisons que f est A-équivalent à $p_\beta \phi_\beta$, et par hypothèse de récurrence que f admet une A-factorisation de longueur $k-1$.
Nous pouvons donc supposer dans la suite que pour tout β appartenant à $A_=(f)$, nous avons l'égalité $\mu_{\bullet-1}(s_\beta) = \mu_\beta(f) = \tilde{\mu}(f)$.

Si $A_<(f) = \emptyset$, c'est à dire si $\mu_\alpha(f) = \tilde{\mu}(f)$ pour tout α dans A, en particulier dans le cas $\mu_\bullet(f) = \tilde{\mu}(f)$, nous posons $f \underset{A}{\sim} f_0(\phi_{-\infty})^{k-1}$ où f_0 est un polynôme de degré $d_0 < d_\bullet$ et de valuation $\mu_{\bullet-1}(f_0) = \tilde{\mu}(f) - (k-1)\gamma_\bullet$.

Si $A_<(f) \neq \emptyset$, soit α tel que $\mu_\alpha(f) < \tilde{\mu}(f)$ et soit $f = p_\alpha \phi_\alpha + s_\alpha$ la division euclidienne de f par ϕ_α. Par hypothèse de récurrence nous avons une A-factorisation de p, $p_\alpha \underset{A}{\sim} p_0 \phi_{\alpha_1} \ldots \phi_{\alpha_{k-2}}$, avec $-\infty \leq \alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_{k-2} \leq \infty$.

Pour tout $\beta < \alpha$, nous avons aussi $\mu_\beta(f) < \mu_\alpha(f)$, d'où, d'après la proposition 1.3 et le lemme 1.1, l'inégalité $\mu_{\bullet-1}(s_\alpha) > \mu_\beta(f)$, c'est à dire $f \underset{\mu_\beta}{\sim} p_\alpha \phi_\alpha$. Nous en déduisons que pour tout $\beta < \alpha$, $\mu_\beta(f) = \mu_\beta(p_\alpha \phi_\alpha) = \mu_\beta\bigl(p_0 \phi_{\alpha_1} \ldots \phi_{\alpha_{k-2}} \phi_\alpha\bigr)$. Soit j, $1 \leq j \leq k-1$, tel que $\alpha_{j-1} < \alpha \leq \alpha_j$, alors si nous posons $p' = p_0 \phi_{\alpha_1} \ldots \phi_{\alpha_{j-1}} \phi_\alpha^{k-j}$, nous avons encore $\mu_\beta(f) = \mu_\beta(p')$ pour tout $\beta < \alpha$.
Nous avons ainsi montré que pour α appartenant à $A_<(f)$, il existe une famille $J(\alpha) = \bigl(\delta; j; \alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}\bigr)$, avec $\delta \in \Gamma_\bullet$, $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq k-1$ et $\alpha_l \in \bar{A}$ vérifiant $-\infty \leq \alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_{j-1} < \alpha$, telle que:

$$\forall \beta \in A \ , \ \beta < \alpha \ , \quad \mu_\beta(f) \ = \ \delta \ + \ \sum_{l=1}^{j-1} \inf\,(\gamma_{\alpha_l}, \gamma_\beta) \ + \ (k-j)\gamma_\beta \ .$$

Nous allons montrer que nous pouvons trouver une famille $\tilde{J} = \bigl(\tilde{\delta}; \tilde{j}; \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_{\tilde{j}-1}\bigr)$, avec les $\tilde{\alpha}_l$ dans $A_<(f)$, qui convient pour tout β appartenant à $A_<(f)$, c'est à dire vérifiant:

$$\forall \beta \in A_<(f) \quad \mu_\beta(f) \ = \ \tilde{\delta} \ + \ \sum_{l=1}^{\tilde{j}-1} \inf\bigl(\gamma_{\tilde{\alpha}_l}, \gamma_\beta\bigr) \ + \ (k-\tilde{j})\gamma_\beta \ .$$

Pour cela il suffit de trouver une famille $\tilde{J} = \bigl(\tilde{\delta}; \tilde{j}; \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_{\tilde{j}-1}\bigr)$ telle que pour tout α dans $A_<(f)$ dont la famille associée est $J(\alpha) = \bigl(\delta; j; \alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}\bigr)$, nous ayons $\delta = \tilde{\delta}$, $j \leq \tilde{j}$ et $\alpha_l = \tilde{\alpha}_l$ pour

$1 \leq l \leq j$.
Soient $\alpha' < \alpha$ appartenant à $A_<(f)$, et nous notons $J(\alpha) = \big(\delta; j; \alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}\big)$ et $J(\alpha') = \big(\delta'; j'; \alpha'_1, \dots, \alpha'_{j'-1}\big)$ les familles associées respectivement à α et α'. Alors pour tout $\beta \leq \alpha'$ nous avons l'égalité:

$$\delta + \sum_{l=1}^{j-1} \inf\big(\gamma_{\alpha_l}, \gamma_\beta\big) + (k-j)\gamma_\beta \; = \; \delta' + \sum_{l=1}^{j'-1} \inf\big(\gamma_{\alpha'_l}, \gamma_\beta\big) + (k-j')\gamma_\beta \; .$$

Si l'ensemble $A_<(f)$ ne possède pas de plus grand élément, il est infini. Quitte à prendre α' suffisamment grand, l'ensemble $\{\beta \in A \ \mid \ \beta < \alpha'\}$ est infini et nous déduisons de l'égalité précédente pour tout $\beta \leq \alpha'$ que nous avons:

$$\delta' = \delta \; , \; j' \leq j \;\; \text{et pour tout } l, 1 \leq l \leq j', \; \alpha'_l = \alpha_l \; .$$

Comme l'application qui à α dans $A_<(f)$ associe l'entier $j = j(\alpha)$ est croissante et bornée, il existe $\tilde{\alpha}$ dans $A_<(f)$ tel que $\tilde{j} = j(\tilde{\alpha})$ est maximal et la famille $J(\tilde{\alpha})$ associée à $\tilde{\alpha}$ est la famille $\tilde{J}$ cherchée. En effet, pour tout β dans $A_<(f)$, il existe toujours α dans $A_<(f)$ vérifiant $\alpha \geq \tilde{\alpha}$, d'où $J(\alpha) = J(\tilde{\alpha})$, et $\beta < \alpha$.

Si l'ensemble $A_<(f)$ possède un plus grand élément α_0, et si le sous-groupe isolé $\Gamma_{(1)}$ n'est pas discret, alors la famille $J(\alpha_0) = \big(\delta; j; \alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}\big)$ associée au plus grand élément de $A_<(f)$ convient. Par définition, pour tout $\beta < \alpha_0$, nous avons l'égalité $\mu_\beta(f) = \delta + \sum_{l=1}^{j-1} \inf\,(\gamma_{\alpha_l}, \gamma_\beta) + (k-j)\gamma_\beta$, et il faut vérifier que cette égalité est encore valable pour $\beta = \alpha_0$. Par construction de la famille $J(\alpha_0)$, nous avons:

$$\begin{aligned} \mu_{\alpha_0}(p_{\alpha_0}\phi_{\alpha_0}) \; &= \; \delta \; + \; \textstyle\sum_{l=1}^{j-1} \gamma_{\alpha_l} \; + \; (k-j)\gamma_{\alpha_0} \; \geq \; \mu_{\alpha_0}(f) \\ &> \; \mu_\beta(f) \; = \; \delta \; + \; \textstyle\sum_{l=1}^{j-1} \inf\,(\gamma_{\alpha_l}, \gamma_\beta) \; + \; (k-j)\gamma_\beta \; . \end{aligned}$$

Si nous posons $\eta = \mu_{\alpha_0}(f) - \delta - \sum_{l=1}^{j-1} \gamma_{\alpha_l}$, nous avons pour tout $\beta < \alpha_0$ les inégalités:

$$(k-j)\gamma_\beta < \eta \leq (k-j)\gamma_{\alpha_0} \; .$$

Comme le sous-groupe $\Gamma_{(1)}$ n'est pas discret, η est égal à $(k-j)\gamma_{\alpha_0}$, et nous avons l'égalité $\mu_{\alpha_0}(f) = \delta + \sum_{l=1}^{j-1} \gamma_{\alpha_l} + (k-j)\gamma_{\alpha_0}$.

Si l'ensemble $A_<(f)$ possède un plus grand élément et si le sous-groupe isolé $\Gamma_{(1)}$ est discret, alors $A_=(f)$ possède un plus petit élément α_0. Alors pour tout $\beta < \alpha_0$, c'est à dire pour tout β appartenant à $A_<(f)$, nous avons encore $\mu_\beta(f) = \mu_\beta(p_{\alpha_0}\phi_{\alpha_0})$ et nous pouvons associer comme précédemment à α_0 une famille $J(\alpha_0) = \big(\delta; j; \alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}\big)$ qui est la famille $\tilde{J}$ cherchée.
Nous allons montrer que dans ce cas nous pouvons trouver la A-factorisation de f. En effet si nous appelons β_0 le plus grand élément de $A_<(f)$, nous avons les inégalités suivantes:

$$\begin{aligned} \delta \; + \; \textstyle\sum_{l=1}^{j-1} \gamma_{\alpha_l} \; + \; (k-j)\gamma_{\alpha_0} \; &= \; \mu_{\alpha_0}(p_{\alpha_0}\phi_{\alpha_0}) \; \geq \; \mu_{\alpha_0}(f) \\ &> \; \mu_{\beta_0}(f) \; = \; \delta \; + \; \textstyle\sum_{l=1}^{j-1} \gamma_{\alpha_l} \; + \; (k-j)\gamma_{\beta_0} \; , \end{aligned}$$

avec $\mu_{\alpha_0}(p_{\alpha_0}\phi_{\alpha_0}) - \mu_{\beta_0}(f)$ qui appartient à $\Gamma_{(1)}$, par conséquent il existe r, $0 < r \leq k-j$, tel que $\mu_{\alpha_0}(f) = \delta + \sum_{l=1}^{j-1} \gamma_{\alpha_l} + r\gamma_{\beta_0} + (k-j-r)\gamma_{\alpha_0}$.
Nous déduisons de ce qui précède que nous avons:

$$f \underset{A}{\sim} p_0 \phi_{\alpha_1} \dots \phi_{\alpha_{j-1}} \phi_{\beta_0}^r \phi_{\alpha_0}^{k-j-r} \; .$$

Si nous supposons $A = A_<(f)$, en particulier nous avons forcément $A_<(f)$ qui n'a pas de plus grand élément, alors d'après ce qui précède, nous avons trouvé une famille $\tilde{J} = \big(\delta; j; \alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}\big)$ telle que

pour tout α appartenant à A nous ayons l'égalité $\mu_\alpha(f) = \delta + \sum_{l=1}^{j-1} \inf(\gamma_{\alpha_l}, \gamma_\alpha) + (k-j)\gamma_\alpha$.
Si nous choisissons f_0 dans $K[x]$ de degré $\deg f_0 < d_\bullet$, avec $\mu_{\bullet-1}(f_0) = \delta$, nous avons montré que f admet la A-factorisation suivante:

$$f \underset{A}{\sim} f_0\phi_{\alpha_1} \dots \phi_{\alpha_{j-1}}\phi_\infty^{k-j} \ .$$

En particulier, comme nous avons $j \leq k-1$, nous vérifions bien que le facteur ϕ_∞ apparaît avec un exposant non nul dans la A-factorisation de f.

Nous supposons maintenant $A_<(f) \neq A$, c'est à dire qu'il existe θ dans A avec $\mu_\theta(f) = \tilde{\mu}(f)$. Soit $f = p_\theta\phi_\theta + s_\theta$ la division euclidienne de f par ϕ_θ, et nous pouvons supposer que nous avons l'égalité $\mu_{\bullet-1}(s_\theta) = \mu_\theta(f) = \tilde{\mu}(f)$.
Pour tout α appartenant à $A_<(f)$, nous déduisons de $\mu_\alpha(f) < \tilde{\mu}(f)$ l'égalité $\mu_\alpha(f) = \mu_\alpha(p_\theta\phi_\theta)$. Et pour tout β appartenant à $A_=(f)$, nous déduisons de $\mu_\beta(f) = \mu_{\bullet-1}(s_\theta)$ l'inégalité $\mu_\beta(p_\theta\phi_\theta) \geq \tilde{\mu}(f)$. Nous avons donc la relation:

$$\forall\alpha \in A_<(f)\ ,\ \forall\beta \in A_=(f) \quad \mu_\beta(p_\theta\phi_\theta) \geq \tilde{\mu}(f) > \mu_\alpha(p_\theta\phi_\theta) \ .$$

Par hypothèse de récurrence, nous avons une A-factorisation de p_θ, d'où la relation $p_\theta\phi_\theta \underset{A}{\sim} p_0\phi_{\beta_1} \dots \phi_{\beta_{k-1}}$, avec $\deg p_0 < d_\bullet$ et $-\infty \leq \beta_1 \leq \ldots \leq \beta_{k-1} \leq \infty$, et soit j, $1 \leq j \leq k-1$, tel que $\beta_{j-1} \in A_<(f)$ et $\beta_j \in A_=(f)$. L'inégalité précédente peut alors s'écrire sous la forme:

$$\forall\alpha \in A_<(f)\ ,\ \alpha \geq \beta_{j-1}\ , \forall\beta \in A_=(f)\ ,\ \beta \leq \beta_j\ ,$$

$$\begin{aligned} \mu_\beta(p_\theta\phi_\theta) \ &= \ \mu_{\bullet-1}(p_0) \ + \ \textstyle\sum_{l=1}^{j-1}\gamma_{\beta_l} + (k-j)\gamma_\beta \ \geq \ \tilde{\mu}(f) \\ &> \ \mu_{\bullet-1}(p_0) \ + \ \textstyle\sum_{l=1}^{j-1}\gamma_{\beta_l} + (k-j)\gamma_\alpha \ = \ \mu_\alpha(p_\theta\phi_\theta) \ . \end{aligned}$$

Si nous posons $\eta = \mu_{\alpha_0}(f) - \mu_{\bullet-1}(p_0) - \sum_{l=1}^{j-1}\gamma_{\beta_l}$, nous avons pour tout α dans $A_<(f)$ et tout β dans $A_=(f)$ les inégalités:

$$(k-j)\gamma_\alpha < \eta \leq (k-j)\gamma_\beta \ .$$

Nous déduisons du lemme 1.18 qu'il existe β_0 dans $A_=(f)$ tel que $\eta = (k-j)\gamma_{\beta_0}$, et f admet alors la A-factorisation suivante:

$$f \underset{A}{\sim} p_0\phi_{\beta_1} \dots \phi_{\beta_{j-1}}\phi_{\beta_0}^{k-j} \ .$$

Remarque 1.11. Si $A_=(f) = \{\alpha \in A \ \mid \ \mu_\alpha(f) = \tilde{\mu}(f)\}$ est non vide, il admet alors un plus petit élément qui correspond au dernier indice α_{k-1} apparaissant dans une A-factorisation de f. En effet de $A_=(f) \neq \emptyset$, nous déduisons que le dernier indice α_{k-1} apparaissant dans une A-factorisation $f \underset{A}{\sim} f_0\phi_{\alpha_1} \dots \phi_{\alpha_{k-1}}$ vérifie $\alpha_{k-1} < \infty$, et nous vérifions que c'est bien le plus petit élément de $A_=(f)$.

Remarque 1.12. Nous disons que deux polynômes f et g sont asymptotiquement A-équivalents, et nous notons $f \underset{A}{\asymp} g$, si f et g vérifient $\mu_\alpha(f) = \mu_\alpha(g)$ pour $\alpha \gg 0$, c'est à dire s'il existe $\alpha_0 \in A$ tel que pour tout $\alpha \in A$ avec $\alpha \geq \alpha_0$, nous ayons $\mu_\alpha(f) = \mu_\alpha(g)$. Si f et g sont deux polynômes asymptotiquement A-équivalents et non A-équivalents, l'ensemble $\{\alpha \in A \ \mid \ \forall\beta \geq \alpha\ ,\ \mu_\beta(f) = \mu_\beta(g)\}$ admet un plus petit élément. En effet écrivons des A-factorisations respectivement de f et g, $f \underset{A}{\sim} f_0\phi_{\alpha_1} \dots \phi_{\alpha_{i-1}}\phi_\infty^{k-i}$ et $g \underset{A}{\sim} g_0\phi_{\beta_1} \dots \phi_{\beta_{j-1}}\phi_\infty^{l-j}$, avec $\alpha_{i-1} < \infty$ et $\beta_{j-1} < \infty$, et nous pouvons supposer que les A-factorisations ont été choisies avec $\alpha_1 > -\infty$ et $\beta_1 > -\infty$. Alors pour tout $\alpha \geq \sup(\alpha_{i-1}, \beta_{j-1})$, nous avons:

$$\mu_\alpha(f) = \mu_{\bullet-1}(f_0) + \textstyle\sum_{s=1}^{i-1}\gamma_{\alpha_s} + (k-i)\gamma_\alpha \ ,$$

$$\mu_\alpha(g) = \mu_{\bullet-1}(g_0) + \textstyle\sum_{t=1}^{j-1}\gamma_{\beta_t} + (l-j)\gamma_\alpha \ .$$

Comme $f \underset{A}{\asymp} g$, nous en déduisons $\mu_{\bullet-1}(f_0) + \sum_{s=1}^{i-1}\gamma_{\alpha_s} = \mu_{\bullet-1}(g_0) + \sum_{t=1}^{i-1}\gamma_{\beta_t}$ et $k-i = l-j$, et comme $f \underset{A}{\not\sim} g$, il existe un entier r, tel que $\alpha_{i-1} = \beta_{j-1}, \dots, \alpha_{i-r} = \beta_{j-r}$ et $\alpha_{i-r-1} \neq \beta_{j-r-1}$. Alors $\theta = \alpha_{i-r} \stackrel{A}{=} \beta_{j-r}$ est le plus petit élément de $\{\alpha \in A \ \mid \ \forall\beta \geq \alpha\ ,\ \mu_\beta(f) = \mu_\beta(g)\}$. Mais nous remarquons que θ n'est pas toujours le plus petit élément de l'ensemble $\{\alpha \in A \ \mid \ \mu_\alpha(f) = \mu_\alpha(g)\}$.

Nous voulons définir une valuation ou une pseudo-valuation μ_∞ comme limite des valuations μ_α. Le groupe des ordres $\Gamma_\bullet$ de la valuation $\mu_\bullet$ peut être considéré de manière naturelle comme un sous-groupe ordonné du groupe $(\mathbb{R}^r,+)_{\text{lex}}$, où r est le rang du groupe $\Gamma_\bullet$. Alors, si pour tout polynôme f de $K[x]$, l'ensemble $\big\{\mu_\alpha(f) \ \mid \ \alpha\in A\big\}$ admet une borne supérieure dans $(\mathbb{R}^r,+)\cup\{\infty\}$, nous pouvons définir l'application μ_∞ par:

$$\mu_\infty(f) = \ \text{Sup}\ \big(\mu_\alpha(f)\ ,\ \alpha\in A\big)\ =\ \lim_\alpha \mu_\alpha(f)\,,$$

et comme (μ_α) est une famille croissante de valuations, μ_∞ est une valuation ou une pseudo-valuation de $K[x]$.

Proposition 1.20. *La famille de valuations augmentées $\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ admet une valuation ou une pseudo-valuation limite $\mu_\infty = \lim_\alpha \mu_\alpha$ dans les deux cas suivants:*

(i) pour tout polynôme f de $K[x]$, il existe α dans A tel que $\mu_\alpha(f)=\mu_\beta(f)$ pour $\beta>\alpha$, et μ_∞ est égal à la valuation $\tilde\mu$;

(ii) le sous-ensemble $\Lambda_\bullet$ admet une borne supérieure $\bar\gamma$ dans $(\mathbb{R}^r,+)\cup\{\infty\}$, et dans ce cas μ_∞ est une valuation pour $\bar\gamma\neq\infty$.

Preuve. Dans le premier cas, pour tout f dans $K[x]$, l'ensemble $\big\{\mu_\alpha(f)\ \mid\ \alpha\in A\big\}$ admet un plus grand élément $\mu_\alpha(f)$ et nous avons $\mu_\alpha(f)=\tilde\mu(f)$.
Nous sommes dans ce cas si tout f dans $K[x]$ admet une A-factorisation minimale de la forme $f \underset{A}{\sim} f_0\phi_{\alpha_1}\dots\phi_{\alpha_{i-1}}$ sans facteur ϕ_∞.
Dans le deuxième cas, soit $\bar\gamma$ la borne supérieure de $\Lambda_\bullet$. Si nous choisissons une A-factorisation minimale de f, $f \underset{A}{\sim} f_0\phi_{\alpha_1}\dots\phi_{\alpha_{i-1}}\phi_\infty^{k-i}$, nous trouvons:

$$\mu_\infty(f) = \mu_{\bullet-1}(f_0) + \sum_{l=1}^{i-1}\gamma_{\alpha_l} + (k-i)\bar\gamma\ .$$

Remarque 1.13. La pseudo-valuation limite μ_∞ vérifie toujours $\mu_\alpha(f)\le\mu_\infty(f)\le\tilde\mu(f)$ pour tout polynôme f de $K[x]$. Mais dans le cas où μ_∞ est défini à partir de la borne supérieure $\bar\gamma$ de $\Lambda_\bullet$, il peut exister f dans $K[x]$ tel que pour tout α dans A nous ayons des inégalités strictes $\mu_\alpha(f)<\mu_\infty(f)<\tilde\mu(f)$.

Si la borne supérieure $\bar\gamma$ de l'ensemble $\Lambda_\bullet$ n'est pas égale à $+\infty$, nous pouvons définir une coupure non triviale de $\Gamma_\bullet$ en posant $\Gamma_\bullet = \Lambda_-\sqcup\Lambda_+$, avec $\Lambda_- = \{\gamma\in\Gamma_\bullet\ \mid\ \exists\delta\in\Lambda_\bullet \text{ tel que } \gamma\le\delta\}$ et $\Lambda_+ = \{\gamma\in\Gamma_\bullet\ \mid\ \forall\delta\in\Lambda_\bullet,\ \gamma>\delta\}$. Par définition de $\Lambda_\bullet$, nous avons aussi $\Lambda_- = \{\gamma\in\Gamma_\bullet\ \mid\ \exists\alpha\in A \text{ tel que } \gamma\le\gamma_\alpha\}$ et $\Lambda_+ = \{\gamma\in\Gamma_\bullet\ \mid\ \forall\alpha\in A,\ \gamma>\gamma_\alpha\}$. D'après le lemme 1.17, $\bar\gamma$ est la borne supérieure de $\Lambda_\bullet$ si et seulement si $\bar\gamma$ est la borne supérieure de Λ_-, et nous rappelons que nous avons supposé que Λ_- n'a pas de plus grand élément.
Soit o, $0\le o\le r-1$, l'entier défini précédemment par $\lambda_o(\Lambda_-)\cap\lambda_o(\Lambda_+)=\emptyset$ et $\lambda_i(\Lambda_-)\cap\lambda_i(\Lambda_+)\neq\emptyset$ pour $i>o$. Nous appelons ζ' l'unique élément de $\lambda_{o+1}(\Lambda_-)\cap\lambda_{o+1}(\Lambda_+)\subset\bar\Gamma^{(o+1)}$. L'application $\lambda_i\colon\Gamma_\bullet\longrightarrow\bar\Gamma^{(i)}$ est la restriction à $\Gamma_\bullet$ de la projection $\pi_i\colon(\mathbb{R}^r,+)_{\text{lex}}\longrightarrow(\mathbb{R}^{r-i},+)_{\text{lex}}$ définie par $(u_r,\dots,u_1)\longmapsto(u_r,\dots,u_i)$. Alors si nous écrivons $\zeta'=(z_r,\dots,z_{o+1})$ dans $\bar\Gamma^{(o+1)}\subset(\mathbb{R}^{r-o-1},+)$, nous avons:

$$\begin{aligned}\exists\delta\in\mathbb{R}\ \text{ tel que }\ &\forall a_o\in\mathbb{R},\ a_o<\delta,\ \forall(a_{o-1},\dots,a_1)\in\mathbb{R}^{o-1}\ ,\\ &\forall b_o\in\mathbb{R},\ b_o>\delta,\ \forall(b_{o-1},\dots,b_1)\in\mathbb{R}^{o-1}\ ,\\ (z_r,\dots,z_{o+1},a_o,a_{o-1},\dots,a_1)\in\Lambda_-\ &\text{ et }\ (z_r,\dots,z_{o+1},b_o,b_{o-1},\dots,b_1)\in\Lambda_+\ .\end{aligned}$$

Nous en déduisons que $\Lambda_\bullet$ ne peut avoir une borne supérieure $\bar\gamma$ dans $(\mathbb{R}^r,+)$ que dans le cas $o=0$. Il existe z_1 dans $\mathbb{R}$ tel que $\bar\gamma$ soit égal à $(z_r,\dots,z_2,z_1)$, mais alors que $\zeta'=(z_r,\dots,z_2)$ appartient au groupe quotient $\bar\Gamma^{(1)}$, il se peut que $\bar\gamma$ n'appartienne pas au groupe $\Gamma_\bullet$.

1.4 Valuation augmentée limite

Soit $\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ une famille infinie de valuations de $K[x]$, indexée par un ensemble totalement ordonné A. Dans le cas où l'ensemble A est discret, pour tout α dans A, si β est le successeur de α dans A, il est

possible de définir la valuation μ_β comme la valuation augmentée pour μ_α à partir d'un polynôme-clé ϕ_β et d'une valeur γ_β vérifiant $\gamma_\beta > \mu_\alpha(\phi_\beta)$. Dans ce cas nous pouvons comme précédemment dire que la famille $\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ est une famille de valuations augmentées. Nous remarquons que pour $\alpha < \beta$ dans A, si $\deg\phi_\alpha < \deg\phi_\beta$, un polynôme ϕ peut être un polynôme-clé pour la valuation μ_β sans être polynôme-clé pour μ_α.
Si nous considérons un ensemble A non nécessairement discret, pour pouvoir définir la famille $\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ comme famille de valuations augmentées, il faut supposer que les polynômes (ϕ_α) qui la définissent sont de même degré. En effet grâce au corollaire de la proposition 1.8, pour tout $\alpha < \beta$ dans A, tout polynôme-clé pour μ_β est aussi un polynôme-clé pour μ_α. Nous pouvons alors définir la valuation μ_α comme valuation augmentée pour une valuation μ_θ pour n'importe quel θ de A avec $\theta < \alpha$, en posant $\mu_\alpha = [\mu_\theta\ ;\ \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$. Dans ce cas toutes les valuations de la famille (μ_α) ont le même groupe des ordres Γ et la famille des valeurs (γ_α) est strictement croissante dans Γ.

Définition. Une famille $\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ de valuations de $K[x]$, indexée par un ensemble totalement ordonné A, est appelée *une famille de valuations augmentées itérées* si pour tout α dans A, sauf pour α le plus petit élément de A, il existe θ dans A, $\theta < \alpha$, tel que la valuation μ_α est une valuation augmentée de la forme $\mu_\alpha = [\mu_\theta\ ;\ \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$, et si nous avons les propriétés suivantes:

- si α admet un prédecesseur dans A, θ est ce prédécesseur, et dans le cas où θ n'est pas le plus petit élément de A, les polynômes ϕ_α et ϕ_θ ne sont pas μ_θ-équivalents et vérifient $\deg\phi_\theta \le \deg\phi_\alpha$;

- si α n'a pas de prédecesseur dans A, pour tout β dans A, $\theta < \beta < \alpha$, les valuations μ_β et μ_α sont égales aux valuations augmentées respectives $\mu_\beta = [\mu_\theta\ ;\ \mu_\beta(\phi_\beta) = \gamma_\beta]$ et $\mu_\alpha = [\mu_\beta\ ;\ \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$, et les polynômes ϕ_β et ϕ_α sont de même degré.

Pour toute famille $\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ de valuations augmentées itérées nous pouvons définir l'ensemble $\tilde\Phi(A)$ des polynômes ϕ de $K[x]$ vérifiant $\mu_\alpha(\phi) < \mu_\beta(\phi)$ pour tout $\alpha < \beta$, et si cet ensemble est non vide nous appelons $d = d(A)$ le degré minimal d'un polynôme ϕ de $\tilde\Phi(A)$. Nous définissons alors l'ensemble $\Phi(A)$ de la manière suivante:

$$\Phi(A) = \big\{\ \phi \in K[x]\ \mid\ \phi \text{ unitaire },\ \mu_\alpha(\phi) < \mu_\beta(\phi) \text{ pour tout } \alpha < \beta \text{ et } \deg\phi = d\big\}\ .$$

Remarque 1.14. Si l'ensemble A admet un plus grand élément β, l'ensemble $\tilde\Phi(A)$ est égal d'après le théorème 1.10 à $\{\ f \in K[x]\ \mid\ \mu_\alpha(f) < \mu_\beta(f)\ \forall\alpha < \beta\ \}$. Dans le cas où l'ensemble A n'a pas de plus grand élément, un polynôme f n'appartient pas à l'ensemble $\tilde\Phi(A)$ si et seulement si il existe α_o dans A tel que $\mu_{\alpha_o}(f) = \mu_\alpha(f)$ pour tout $\alpha \ge \alpha_o$.

Nous supposerons toujours dans la suite que l'ensemble A n'a pas de plus grand élément.

Remarque 1.15. Pour que l'ensemble $\tilde\Phi(A)$ soit non vide il faut que le degré des polynômes-clés ϕ_α soit constant à partir d'un certain rang α_o.
Si le degré d des polynômes ϕ appartenant à l'ensemble $\Phi(A)$ est égal au degré des polynômes ϕ_α pour $\alpha \ge \alpha_o$, alors les polynômes ϕ sont des polynômes-clés pour toutes les valuations augmentées μ_α, avec $\alpha > \alpha_o$. En effet, pour tout $\alpha_o < \alpha < \beta$ dans A, comme ϕ est un polynôme unitaire de même degré que ϕ_β, nous déduisons de l'inégalité $\mu_\alpha(\phi) < \mu_\beta(\phi)$ que ϕ est μ_α-équivalent à ϕ_β, par conséquent est aussi un polynôme-clé pour μ_α.

Nous supposerons dans la suite que nous sommes dans la situation décrite dans la section précédente, c'est à dire qu'il existe une valuation $\mu_\bullet$ sur $K[x]$, un sous-ensemble infini $\Lambda_\bullet = \{\gamma_\alpha\ \mid\ \alpha \in A\}$ du groupe Γ, une famille de polynômes unitaires $\big(\phi_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ de même degré $d_\bullet$, chaque polynôme ϕ_α étant un polynôme-clé pour la valuation $\mu_\bullet$, et la famille de valuations augmentées itérées $\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ est la famille des valuations $\mu_\alpha = [\mu_\bullet\ ;\ \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$. Grâce au lemme 1.17 nous pouvons supposer que la famille est “exhaustive”, c'est à dire, quitte à rajouter de nouvelles valuations, nous pouvons supposer que l'ensemble $\Lambda_\bullet$ vérifie:

$$\forall\ \alpha < \beta \in A\,,\ \forall\ \gamma \in \Gamma\,,\ \gamma_\alpha < \gamma < \gamma_\beta\ \Longrightarrow\ \gamma \in \Lambda_\bullet\ .$$

Rappelons que nous avons aussi supposé que l'ensemble A n'a pas de plus grand élément, c'est à dire que $\Lambda_\bullet$ n'a pas de plus grand élément.

Remarque 1.16. Si la valuation $\mu_\bullet$ est la valuation ν sur K et si le degré $d_\bullet$ des polynômes ϕ_α est égal à 1, chaque ϕ_α peut s'écrire sous la forme $\phi_\alpha = x - a_\alpha$, et la famille $\left(a_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ est une famille *pseudo-convergente* ou famille *pseudo-Cauchy* de K introduite par Kaplansky ([Ka]). Nous pouvons ainsi considérer les familles de polynômes-clés $\left(\phi_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ comme des généralisations des familles pseudo-Cauchy.

Soit $\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ une famille infinie de valuations augmentées itérées de $K[x]$, et soient f et g deux polynômes de $K[x]$, nous disons que g est A-divisible par f, et nous notons $f \mid g$, s'il existe α_o dans A tel que g est μ_α-divisible par f pour tout α dans A avec $\alpha \geq \alpha_o$. Nous pouvons alors définir comme précédemment un polynôme-clé pour une famille $\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$.

Définition. Un polynôme ϕ de $K[x]$ est appelé un *polynôme-clé limite* pour la famille de valuations $\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ s'il vérifie les propriétés suivantes:

- ϕ est A-minimal, c'est à dire tout polynôme f A-divisible par ϕ est de degré supérieur ou égal au degré de ϕ: $\phi \underset{A}{\mid} f \implies \deg f \geq \deg\phi$;

- ϕ est A-irréductible, c'est à dire: $\forall a,b \in K[x] \quad \phi \underset{A}{\mid} ab \implies \phi \underset{A}{\mid} a$ ou $\phi \underset{A}{\mid} b$;

- ϕ est unitaire.

Proposition 1.21. *Tout polynôme ϕ appartenant à l'ensemble $\Phi(A)$ est un polynôme-clé limite pour la famille $\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$.*

Preuve. Nous allons montrer que pour tout polynôme f de $K[x]$ nous avons l'équivalence suivante:

$$\phi \underset{A}{\mid} f \iff \forall \alpha < \beta\,, \quad \mu_\alpha(f) < \mu_\beta(f)\ .$$

Soit f un polynôme de $K[x]$ et nous supposons qu'il existe α_o dans A tel que $\mu_\alpha(f) = \mu_{\alpha_o}(f)$ pour tout $\alpha \geq \alpha_o$. Si f est A-divisible par ϕ, soit α dans A tel que f soit μ_β-divisible par ϕ pour tout $\beta \geq \alpha$, et nous pouvons toujours supposer $\alpha \geq \alpha_o$. Il existe un polynôme g dans $K[x]$ tel que $\mu_\alpha(f - g\phi) > \mu_\alpha(f) = \mu_\alpha(g\phi)$, alors pour tout $\beta \geq \alpha$, nous avons les inégalités $\mu_\beta(f - g\phi) \geq \mu_\alpha(f - g\phi) > \mu_\alpha(f) = \mu_\beta(f)$, d'où $\mu_\alpha(g\phi) = \mu_\beta(g\phi)$, ce qui est impossible.

Réciproquement nous supposons que le polynôme f n'est pas A-divisible par ϕ. Soit $f = q\phi + r$ la division euclidienne de f par ϕ, nous avons $r \neq 0$, et comme $\deg r < \deg\phi$, il existe α_o tel que $\mu_\alpha(r) = \mu_{\alpha_o}(r)$ pour tout $\alpha \geq \alpha_o$. Il existe $\alpha \geq \alpha_o$ tel que f ne soit pas μ_α-divisible par ϕ, alors nous avons $\mu_\alpha(r) \leq \mu_\alpha(q\phi)$, d'où $\mu_\beta(r) < \mu_\beta(q\phi)$ pour tout $\beta > \alpha$. Nous en déduisons que r et f sont μ_β-équivalents pour tout $\beta > \alpha$, en particulier $\mu_\beta(f)$ est constant pour $\beta > \alpha$.

Remarquons que pour avoir l'équivalence précédente, il est nécessaire que l'ensemble A n'ait pas de plus grand élément, et nous avons montré que pour tout polynôme f de $K[x]$ il existe un α_o dans A, α_o ne dépendant que du reste r de la division euclidienne de f par ϕ, tel que pour tout α dans A avec $\alpha > \alpha_o$, nous ayons: $\phi \underset{\mu_\alpha}{\mid} f \iff \phi \underset{A}{\mid} f$.
Comme tout polynôme f de degré $d = \deg f < \deg\phi$ vérifie $\mu_\alpha(f)$ constant pour α suffisamment grand, le polynôme ϕ est A-minimal.
Si fg est A-divisible par ϕ, alors pour tout $\alpha < \beta$ nous avons $\mu_\alpha(fg) < \mu_\beta(fg)$, d'où $\mu_\alpha(f) < \mu_\beta(f)$ ou $\mu_\alpha(g) < \mu_\beta(g)$, c'est à dire f ou g est A-divisible par ϕ. Par conséquent ϕ est A-irréductible.

Nous voulons définir comme précédemment une valuation μ' de $K[x]$ à partir de la famille de valuations augmentées itérées $\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$, d'un polynôme ϕ appartenant à $\Phi(A)$ et d'une valeur γ dans un groupe ordonné $\bar\Gamma$ contenant Γ vérifiant $\gamma > \mu_\alpha(\phi)$ pour tout α dans A, ou une pseudo-valuation μ' de $K[x]$ si nous prenons pour γ la valeur ∞.
Pour tout f n'appartenant à $\tilde\Phi(A)$, c'est à dire pour lequel il existe α_o avec $\mu_\alpha(f)$ constant pour $\alpha \geq \alpha_o$, nous posons $\mu_A(f) = \mu_{\alpha_o}(f) = \mathrm{Sup}\big(\mu_\alpha(f) \ \mid\ \alpha \in A\big)$.

Définition. Soit f un polynôme de $K[x]$ et soit $f = f_m\phi^m + f_{m-1}\phi^{m-1} + \ldots + f_0$ son développement selon les puissances de ϕ, alors nous définissons $\mu'(f)$ par:

$$\mu'(f) = \inf\big(\mu_A(f_j) + j\gamma\ ;\ 0 \leq j \leq m\big)\ .$$

Comme les polynômes f_j apparaissant dans le développement de f sont de degré strictement inférieur à celui de ϕ, les valeurs $\mu_A(f_j)$ sont bien définies.
Nous avons alors le résultat suivant:

Proposition 1.22. *L'application μ' de $K[x]$ à valeurs dans $\bar{\Gamma} \cup \{\infty\}$ définie précédemment est une valuation de $K[x]$ si $\gamma \neq \infty$, et est une pseudo-valuation de $K[x]$ de socle l'idéal (ϕ) si $\gamma = \infty$.*

Preuve. Il faut montrer que pour tout couple (f, g) de polynômes de $K[x]$, l'application μ' vérifie les deux relations suivantes: $\mu'(f + g) \geq \inf\big(\mu'(f), \mu'(g)\big)$ et $\mu'(fg) = \mu'(f) + \mu'(g)$.

L'inégalité triangulaire est une conséquence immédiate de la définition de μ' et de l'inégalité triangulaire pour μ_A.

Pour montrer l'égalité pour le produit nous supposons d'abord que les polynômes f et g sont de degré strictement inférieur au degré de ϕ. Nous avons alors $\mu'(f) = \mu_A(f)$ et $\mu'(g) = \mu_A(g)$, et $\mu'(fg) = \inf\big(\mu_A(q) + \gamma, \mu_A(r)\big)$, où $fg = q\phi + r$ est la division euclidienne de fg par ϕ. Comme ni f ni g n'est A-divisible par ϕ, il en est de même du produit fg, par conséquent pour tout α suffisamment grand nous avons $\mu_\alpha(r) \leq \mu_\alpha(q\phi)$, d'où $\mu_A(r) < \mu_A(q) + \gamma$. Nous en déduisons l'égalité $\mu'(fg) = \mu_A(r) = \mu_A(fg)$.
Nous supposons maintenant que f et g admettent pour développements respectifs: $f = f_m\phi^m + f_{m-1}\phi^{m-1} + \ldots + f_0$ et $g = g_n\phi^n + g_{n-1}\phi^{n-1} + \ldots + g_0$, et soit $h = h_s\phi^s + h_{s-1}\phi^{s-1} + \ldots + h_0$ le développement du produit $h = fg$. Nous déduisons de ce qui précède que pour tout (i, j), si nous posons $f_ig_j = q_{i,j}\phi + r_{i,j}$ la division euclidienne, nous avons $\mu_A(q_{i,j}) + \gamma > \mu_A(r_{i,j}) = \mu_A(f_i) + \mu_A(g_j)$.
Comme le coefficient h_k est égal à $\sum_{i+j=k} r_{i,j} + \sum_{i+j=k-1} q_{i,j}$ nous avons $\mu'(h) \geq \mu'(f) + \mu'(g)$.
Pour montrer l'égalité nous considérons les plus grands entiers t et u tels que $\mu'(f) = \mu_A(f_t) + t\gamma$ et $\mu'(g) = \mu_A(g_u) + u\gamma$. Alors pour $k = t + u$, nous avons $\big(\mu_A(f_i) + i\gamma\big) + \big(\mu_A(g_j) + j\gamma\big) > \mu'(f) + \mu'(g)$ pour tout couple $(i, j) \neq (t, u)$, par conséquent $\mu_A(h_{t+u})$ est égal à $\mu_A(f_t) + \mu_A(g_u)$, et nous avons l'égalité cherchée.

Nous avons ainsi montré que l'application μ' est une valuation ou une pseudo-valuation de $K[x]$, il reste à vérifier que dans le cas $\gamma = \infty$ un polynôme f vérifie $\mu'(f) = \infty$ si et seulement si f est divisible par ϕ. Ceci est immédiat par définition de la pseudo-valuation μ'.

Définition. Nous appelons la valuation μ' définie précédemment la *valuation augmentée limite* et nous la notons $\mu' = \big[(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu'(\phi) = \gamma\big]$.

Proposition 1.23. *Tout polynôme f de $K[x]$ vérifie: $\forall\, \alpha \in A\,,\ \mu_\alpha(f) \leq \mu'(f)$, et de plus nous avons: $\phi \underset{A}{|} f \iff f \in \tilde{\Phi}(A) \iff \forall\, \alpha \in A\,,\ \mu_\alpha(f) < \mu'(f)$.*

Preuve. Soit $f = f_m\phi^m + f_{m-1}\phi^{m-1} + \ldots + f_0$ le développement de f selon les puissances de ϕ, nous allons montrer par récurrence sur m que nous avons l'inégalité $\mu_\alpha(f) \leq \mu'(f)$ pour tout α.
Pour $m = 0$, c'est à dire pour $\deg f < \deg\phi$, nous avons par définition $\mu'(f) = \mu_A(f) = \mathrm{Sup}\big(\mu_\alpha(f) \mid \alpha \in A\big)$.
Nous supposons que nous avons l'inégalité pour $m-1$, et soit $f = q\phi + r$ la division euclidienne de f par ϕ, d'où $q = f_m\phi^{m-1} + f_{m-1}\phi^{m-2} + \ldots + f_1$ et $r = f_0$. S'il existe α_o tel que $\mu_{\alpha_o}(f) > \mu'(f)$, alors pour tout α suffisamment grand nous avons $\mu_\alpha(f) > \mu'(f) = \mathrm{Inf}\big(\mu'(q\phi), \mu'(r)\big)$, avec $\mu'(q\phi) > \mu_\alpha(q\phi)$ et $\mu'(r) = \mu_A(r)$. Par conséquent nous avons pour tout α suffisamment grand l'égalité $\mu_\alpha(q\phi) = \mu_A(r)$, ce qui est impossible.

S'il existe α tel que $\mu'(f) = \mu_\alpha(f)$, alors pour tout $\beta > \alpha$ nous avons $\mu_\alpha(f) = \mu_\beta(f)$, ce qui est équivalent d'après la preuve de la proposition 1.21 à dire que f n'est pas A-divisible par ϕ.
Réciproquement il suffit de montrer que s'il existe $\alpha < \beta$ avec $\mu_\alpha(f) = \mu_\beta(f)$, alors $\mu'(f) = \mu_\alpha(f)$ pour α suffisamment grand. Comme la suite $\big(\mu_\alpha(\phi)\big)$ est strictement croissante et comme pour tout α_o fixé il existe une infinité de $\alpha > \alpha_o$, pour α suffisamment grand nous avons $\mu_\alpha(f) = \mathrm{Inf}\ \big(\mu_A(f_j) + j\mu_\alpha(\phi)\big)$.
Par conséquent si $\mu_\alpha(f) = \mu_\beta(f)$, nous avons forcément $\mu_\alpha(f) = \mu_A(f_0) < \mu_A(f_j) + j\mu_\alpha(\phi)$ pour $j \geq 1$ et pour tout α suffisamment grand, d'où $\mu'(f) = \mu_A(f_0) = \mu_\alpha(f)$.

Lemme 1.24. *Soit f un polynôme de $K[x]$ et soit $f = q\phi + r$ la division euclidienne de f par ϕ, alors f est A-divisible par ϕ si et seulement si nous avons $\mu_\alpha(r) > \mu_\alpha(f) = \mu_\alpha(q\phi)$ pour tout α dans A suffisamment grand.*

Preuve. Si nous avons $\mu_\alpha(r) > \mu_\alpha(f) = \mu_\alpha(q\phi)$ pour tout α dans A suffisamment grand, alors f est μ_α-divisible par ϕ pour tout α suffisamment grand, d'où f est A-divisible par ϕ.

Réciproquement, nous remarquons d'abord qu'il existe α_o tel que r n'est pas μ_{α_o}-divisible par ϕ et tel que $\mu_{\alpha_o}(r) = \mu_\alpha(r)$ pour tout $\alpha \geq \alpha_o$, par conséquent r n'est pas μ_α divisible par ϕ pour tout $\alpha \geq \alpha_o$.
Supposons que f soit A-divisible par ϕ, alors pour tout α suffisamment grand il existe des polynômes h et s avec $f = h\phi + s$ et $\mu_\alpha(s) > \mu_\alpha(f)$. Comme r n'est pas μ_α-divisible par ϕ, nous déduisons de l'égalité $r = (h - q)\phi + s$ l'inégalité $\mu_\alpha(s) \leq \mu_\alpha(r)$, d'où $\mu_\alpha(r) > \mu_\alpha(f)$.

Nous voulons maintenant comparer les algèbres graduées $\mathrm{gr}_{\mu_\alpha} K[x]$ associées aux valuations μ_α de la famille et l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_{\mu'} K[x]$ associée à la valuation augmentée limite $\mu' = [(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu'(\phi) = \gamma]$.
Nous fixons un indice θ dans A et nous considérons dans la suite uniquement les indices α dans A avec $\alpha > \theta$, nous posons $A^+ = \left\{ \alpha \in A \mid \alpha > \theta \right\}$. Alors l'idéal $\left(H_{\mu_\theta}(\phi_\alpha)\right)$ de l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_{\mu_\theta} K[x]$ est indépendant de α dans A^+. En effet l'image $H_{\mu_\theta}(f)$ d'un élément f de $K[x]$ appartient à l'idéal $\left(H_{\mu_\theta}(\phi_\alpha)\right)$ si et seulement si nous avons $\mu_\alpha(f) > \mu_\theta(f)$. Mais pour tout $\alpha' > \alpha > \theta$ nous avons d'après le théorème 1.10, $\mu_\alpha(f) > \mu_\theta(f) \iff \mu_{\alpha'}(f) > \mu_\theta(f)$, par conséquent l'idéal ne dépend pas de l'indice α dans A^+. Nous pouvons vérifier directement que les éléments $H_{\mu_\theta}(\phi_\alpha)$ et $H_{\mu_\theta}(\phi_{\alpha'})$ sont égaux. Soient $\alpha' > \alpha$ dans A^+ et écrivons $\phi_{\alpha'} = \phi_\alpha + h$, alors nous déduisons de la proposition 1.8 les égalités $\mu_\theta(h) = \mu_\alpha(h) = \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha$ et $\mu_\theta(\phi_\alpha) = \mu_\theta(\phi_{\alpha'}) = \gamma_\theta$, avec $\gamma_\alpha > \gamma_\theta$, par conséquent ϕ_α et $\phi_{\alpha'}$ sont μ_θ-équivalents.
Nous notons $\mathbf{gr_A}$ l'algèbre graduée quotient $\left(\mathrm{gr}_{\mu_\theta} K[x]/(H_{\mu_\theta}(\phi_\alpha))\right)$, et d'après le théorème 1.7, pour α dans A^+, nous avons un isomorphisme de $\mathbf{gr_A}[T_\alpha]$ dans $\mathrm{gr}_{\mu_\alpha} K[x]$, où T_α est envoyé sur $H_{\mu_\alpha}(\phi_\alpha)$. Pour $\alpha' > \alpha$ dans A^+, l'application de $\mathbf{gr_A}[T_\alpha]$ dans $\mathbf{gr_A}[T_{\alpha'}]$, correspondant à l'application de $\mathrm{gr}_{\mu_\alpha} K[x]$ dans $\mathrm{gr}_{\mu_{\alpha'}} K[x]$, est un morphisme de $\mathbf{gr_A}$-algèbres dont le noyau est l'idéal engendré par $H_{\mu_\alpha}(\phi_{\alpha'})$, c'est à dire engendré par $T_\alpha + \mathbf{h}_\alpha$, où $\mathbf{h}_\alpha$ est l'image de $h_\alpha = \phi_{\alpha'} - \phi_\alpha$ dans $\mathrm{gr}_{\mu_\alpha} K[x]$. Plus précisément, comme h_α vérifie $\mu_\theta(h_\alpha) = \mu_\alpha(h_\alpha)$, son image $\mathbf{h}_\alpha = H_{\mu_\alpha}(h_\alpha)$ appartient à $\mathbf{gr_A}$, de plus $\mathbf{h}_\alpha$ ne dépend que de α et pas de $\alpha' > \alpha$. En particulier l'algèbre quotient $\left(\mathrm{gr}_{\mu_\alpha} K[x]/(H_{\mu_\alpha}(\phi_{\alpha'}))\right)$ est isomorphe à $\mathbf{gr_A}$ et le morphisme $\mathbf{gr_A}[T_\alpha] \longrightarrow \mathbf{gr_A}[T_{\alpha'}]$ se factorise en $\mathbf{gr_A}[T_\alpha] \twoheadrightarrow \mathbf{gr_A} \hookrightarrow \mathbf{gr_A}[T_{\alpha'}]$.
Pour tout α dans A^+, nous notons g_α l'application de $K[x]$ dans $\mathbf{gr_A}$ définie comme la composition de $H_{\mu_\alpha}\colon K[x] \longrightarrow \mathrm{gr}_{\mu_\alpha} K[x]$ et de $\mathbf{gr_A}[T_\alpha] \twoheadrightarrow \mathbf{gr_A}$. De même que pour $\alpha < \alpha'$, l'application $g\colon \mathrm{gr}_{\mu_\alpha} K[x] \longrightarrow \mathrm{gr}_{\mu_{\alpha'}} K[x]$ n'est pas compatible avec les applications H_{μ_α} et $H_{\mu_{\alpha'}}$, c'est à dire $g \circ H_{\mu_\alpha} \neq H_{\mu_{\alpha'}}$, nous remarquons que les applications g_α et $g_{\alpha'}$ ne sont pas égales. Mais nous avons le résultat suivant.

Proposition 1.25. *Soit $\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ une famille infinie de valuations augmentées itérées de même degré, et comme précédemment nous fixons θ dans A et $\mathbf{gr_A}$.*
Pour α dans A^+, l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_{\mu_\alpha} K[x]$ est isomorphe à l'algèbre $\mathbf{gr_A}[T_\alpha]$, en particulier toutes les algèbres $\mathrm{gr}_{\mu_\alpha} K[x]$ sont isomorphes entre elles.
Pour tout f dans $K[x]$, s'il existe $\alpha' > \alpha$ tel que $\mu_\alpha(f) = \mu_{\alpha'}(f)$, l'image $g_\alpha(f)$ de f dans $\mathbf{gr_A}$ est égale à l'image $H_{\mu_{\alpha'}}(f)$ dans $\mathrm{gr}_{\mu_{\alpha'}} K[x] \simeq \mathbf{gr_A}[T_{\alpha'}]$. Dans ce cas $H_{\mu_{\alpha''}}(f) = g_\alpha(f)$ pour tout $\alpha'' > \alpha$, et nous avons $g_\alpha(f) = g_{\alpha'}(f)$.
Si $\mu_\alpha(f) < \mu_{\alpha'}(f)$ pour $\alpha < \alpha'$, alors l'image $g_\alpha(f)$ de f dans $\mathbf{gr_A}$ est nulle.

Preuve. La première assertion est une conséquence immédiate de ce qui précède et du théorème 1.7.
Pour étudier les images $H_{\mu_\alpha}(f)$ de f dans les algèbres graduées $\mathrm{gr}_{\mu_\alpha} K[x]$ et pour comparer les différentes images $g_\alpha(f)$ de f dans $\mathbf{gr_A}$, nous considérons pour tout $\alpha < \alpha'$ dans A^+ le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
K[x] \arrow[r, "H_{\mu_\alpha}"] \arrow[dr, "g_\alpha"'] & \mathrm{gr}_{\mu_\alpha} K[x] \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "g"] \\
 & \mathbf{gr_A} \arrow[d, hook] \\
K[x] \arrow[r, "H_{\mu_{\alpha'}}"] & \mathrm{gr}_{\mu_{\alpha'}} K[x]
\end{tikzcd}$$

Si $\mu_\alpha(f) = \mu_{\alpha'}(f)$, alors l'image de $H_{\mu_\alpha}(f)$ par l'application g est égale à $H_{\mu_{\alpha'}}(f)$, par conséquent nous avons l'égalité $H_{\mu_{\alpha'}}(f) = g_\alpha(f)$ dans $\mathbf{gr_A} \subset \mathrm{gr}_{\mu_{\alpha'}}K[x]$. En particulier, en considérant $\alpha < \alpha' < \alpha''$, nous avons $H_{\mu_{\alpha''}}(f) = g_\alpha(f)$ et $H_{\mu_{\alpha''}}(f) = g_{\alpha'}(f)$, d'où l'égalité $g_{\alpha'}(f) = g_\alpha(f)$ dans $\mathbf{gr_A}$ pour tout $\alpha' \geq \alpha$.
Si au contraire $\mu_\alpha(f) < \mu_{\alpha'}(f)$, alors f appartient au noyau de l'application g, par conséquent son image dans $\mathbf{gr_A}$ par l'application g_α est nulle.

Corollaire. *Si l'ensemble $\tilde{\Phi}(A)$ est vide, c'est à dire si la famille de valuations $\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A}$ vérifie $\forall f \in K[x]\ \exists \alpha \in A$ tel que $\mu_\alpha(f) = \mu_{\alpha'}(f)$ pour $\alpha' > \alpha$, l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_{\mu_\infty}K[x]$ associée à la valuation limite $\mu_\infty = \lim_\alpha \mu_\alpha$ est isomorphe à l'algèbre $\mathbf{gr_A}$ et l'application $H_{\mu_\infty} : K[x] \longrightarrow \mathrm{gr}_{\mu_\infty}K[x]$ est définie par $H_{\mu_\infty}(f) = g_\alpha(f)$ pour α vérifiant $\mu_\alpha(f) = \mu_\infty(f)$.*

Nous supposons maintenant que l'ensemble $\tilde{\Phi}(A)$ est non vide, nous choisissons un élément ϕ de $\Phi(A)$ et soit $\mu' = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}\ ;\ \mu'(\phi) = \gamma]$ la valuation augmentée limite définie par ϕ et par γ, avec $\gamma > \mu_\alpha(\phi)$ pour tout α dans A.

Théorème 1.26. *Pour tout α dans A^+, l'application de $\mathrm{gr}_{\mu_\alpha}K[x]$ dans $\mathrm{gr}_{\mu'}K[x]$ induit un isomorphisme:*

$$Q \colon \mathbf{gr_A}[T] \longrightarrow \mathrm{gr}_{\mu'}K[x]\ ,$$

qui envoie T sur $Q(T) = H_{\mu'}(\phi)$.

Preuve. Pour tout f dans $K[x]$, nous avons $\mu'(f) > \mu_\alpha(f)$ si et seulement si $\mu_{\alpha'}(f) > \mu_\alpha(f)$, pour $\alpha' > \alpha$, et ceci est indépendant de $\alpha' > \alpha$ choisi, par conséquent le noyau de l'application naturelle de $q_\alpha \colon \mathrm{gr}_{\mu_\alpha}K[x] \longrightarrow \mathrm{gr}_{\mu'}K[x]$ est encore l'idéal $\big(H_{\mu_\alpha}(\phi_{\alpha'})\big)$, et q_α se factorise de la manière suivante:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{gr}_{\mu_\alpha}K[x] \arrow[r, "g"] \arrow[dr] & \mathrm{gr}_{\mu_{\alpha'}}K[x] \arrow[r, "q_{\alpha'}"] & \mathrm{gr}_{\mu'}K[x] \\
& \mathbf{gr_A} \arrow[u] \arrow[ur, hook, "\bar{q}_\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

où l'application $\bar{q}_\alpha \colon \mathbf{gr_A} \longrightarrow \mathrm{gr}_{\mu'}K[x]$ ne dépend que de α.
Pour tout $\mathbf{h}$ dans $\mathbf{gr_A}$, il existe h dans $K[x]$ vérifiant $\mu_\theta(h) = \mu_\alpha(h)$ tel que $\mathbf{h} = g_\alpha(h)$ dans $\mathbf{gr_A} \subset \mathrm{gr}_{\mu_{\alpha'}}K[x]$, où $\alpha' > \alpha$, et par construction $\bar{q}_\alpha(\mathbf{h}) = H_{\mu'}(h)$ dans $\mathrm{gr}_{\mu'}K[x]$. Mais pour tout β dans A^+, nous avons encore $\mathbf{h} = g_\beta(h)$ et $\bar{q}_\beta(\mathbf{h}) = H_{\mu'}(h)$, par conséquent l'application $\bar{q} = \bar{q}_\alpha$ ne dépend pas de α dans A^+.

Nous pouvons alors construire une application Q de $\mathbf{gr_A}[T]$ dans $\mathbf{gr}_{\mu'}K[x]$ en posant $Q(T) = H_{\mu'}(\phi)$, et nous pouvons montrer comme dans la preuve du théorème 1.7 que Q est un isomorphisme.

Supposons que nous sommes dans le cas du paragraphe 1.3, c'est à dire que la famille de valuations augmentées itérées $\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A}$ de $K[x]$ est définie à partir d'une valuation ou d'une pseudo-valuation $\tilde{\mu}$ de $K[x]$ prolongeant une valuation ν de K donnée. Nous avons trouvé une valuation $\mu_\bullet$ de $K[x]$ prolongeant ν telle que pour tout f dans $K[x]$, $\mu_\bullet(f) \leq \tilde{\mu}(f)$, et la famille $\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A}$ est définie par la famille des polynômes-clés $\big(\phi_\alpha\big)$, où les polynômes ϕ_α appartiennent à l'ensemble $\Phi(\mu_\bullet)$, c'est à dire sont des polynômes unitaires ϕ de $K[x]$ vérifiant $\mu_\bullet(\phi) < \tilde{\mu}(\phi)$ et de degré minimal pour cette propriété, et en prenant pour famille des valeurs $\big(\gamma_\alpha\big)$, avec $\gamma_\alpha = \tilde{\mu}(\phi_\alpha)$. Nous notons $d_\bullet$ le degré des polynômes-clés ϕ_α et nous supposons que l'ensemble $\Lambda_\bullet = \big\{\tilde{\mu}(\phi) \mid \phi \in \Phi(\mu_\bullet)\big\}$ est égal à l'ensemble des valeurs $\big\{\gamma_\alpha \mid \alpha \in A\big\}$ et n'a pas de plus grand élément.
L'ensemble $\tilde{\Phi}(A)$ est vide si et seulement si pour tout polynôme f de $K[x]$, il existe α dans A tel que $\tilde{\mu}(f) = \mu_\alpha(f)$, nous sommes alors dans le cas (i) de la proposition 1.20, la pseudo-valuation $\tilde{\mu}$ est une valuation, égale à la valuation limite $\mu_\infty = \lim_\alpha \mu_\alpha = \mu_A$.

Si l'ensemble $\tilde{\Phi}(A)$ est non vide, comme l'ensemble $\Lambda_\bullet = \big\{\gamma_\alpha \mid \alpha \in A\big\}$ n'a pas de plus grand élément, nous ne pouvons pas trouver α dans A et une valuation augmentée $\mu' = [\mu_\alpha\ ;\ \mu'(\phi') = \gamma']$, avec ϕ' polynôme-clé pour la valuation μ_α de degré strictement supérieur à $d_\bullet$ et avec $\gamma' = \tilde{\mu}(\phi')$, tels que la valuation μ' coïncide avec $\tilde{\mu}$ pour tout f dans $K[x]$ avec $\deg f < \deg\phi$. Mais nous pouvons choisir un polynôme ϕ dans $\Phi(A)$ et définir la valuation augmentée limite $\mu' = [(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu'(\phi) = \gamma]$, avec $\gamma = \tilde{\mu}(\phi)$.

Proposition 1.27. *La valuation augmentée limite $\mu' = [(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu'(\phi) = \gamma]$ vérifie:*

(i) pour tout f dans $K[x]$, nous avons $\mu'(f) \leq \tilde{\mu}(f)$,

(ii) le degré d du polynôme-clé limite ϕ est strictement supérieur au degré $d_\bullet$ des polynômes ϕ_α, et pour tout f de $K[x]$ avec $\deg f < d = \deg\phi$, nous avons $\mu'(f) = \tilde{\mu}(f)$.

Preuve. L'inégalité $\mu'(f) \leq \tilde{\mu}(f)$ est une conséquence des inégalités $\tilde{\mu}(f_j\phi^j) \geq \mu_A(f_j) + j\gamma$ pour tout j, et de l'inégalité triangulaire pour la valuation $\tilde{\mu}$.

Nous allons montrer plus généralement que pour tout f n'appartenant pas à $\tilde{\Phi}(A)$, nous avons l'égalité $\mu'(f) = \tilde{\mu}(f)$. En effet pour un tel polynôme f, il existe α dans A avec $\mu_\alpha(f) = \mu_\beta(f)$ pour $\beta \geq \alpha$, d'où $\tilde{\mu}(f) = \mu_\alpha(f)$ et par conséquent $\mu'(f) = \tilde{\mu}(f)$ car $\mu_\alpha \leq \mu' \leq \tilde{\mu}$.
Comme $\mu_\alpha(\phi) < \tilde{\mu}(\phi)$, nous avons forcément $\deg\phi \geq d_\bullet$. Si nous avions l'égalité $\deg\phi = d_\bullet$, alors le polynôme ϕ appartiendrait à l'ensemble $\Phi(\mu_\bullet)$, et ϕ serait $\mu_\bullet$-équivalent au polynôme ϕ_α pour α tel que $\tilde{\mu}(\phi) = \gamma_\alpha$, ce qui est impossible.

Nous nous plaçons toujours dans la situation du paragraphe 1.3 et nous supposons que l'ensemble $\Lambda_\bullet = \{\gamma_\alpha \mid \alpha \in A\}$ admet une borne supérieure $\bar{\gamma}$ dans $\big(\mathbb{R}^r, +\big) \cup \{\infty\}$. Nous définissons comme précédemment la valuation limite $\mu_\infty = \lim_\alpha \mu_\alpha$ par $\mu_\infty(f) = \mathrm{Sup}\big(\mu_\alpha(f)\,,\, \alpha \in A\big)$.
Nous supposons que l'ensemble $\tilde{\Phi}(A)$ est non vide et nous voulons comparer la valuation limite μ_∞ et la valuation augmentée limite μ' définie par un polynôme ϕ de $\Phi(A)$ et la valeur $\gamma_\infty = \mu_\infty(\phi)$: $\mu' = [(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu'(\phi) = \gamma_\infty]$. La valuation augmentée limite μ' est bien définie car la valeur γ_∞ vérifie $\mu_\alpha(\phi) < \gamma_\infty$ pour tout α dans A, et comme nous avons $\gamma_\infty \leq \tilde{\mu}(\phi)$, la valuation μ' vérifie encore $\mu'(f) \leq \tilde{\mu}(f)$ pour tout f dans $K[x]$.

Proposition 1.28. *La valuation limite $\mu_\infty = \lim_\alpha \mu_\alpha$ et la valuation augmentée limite $\mu' = [(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu'(\phi) = \gamma_\infty]$ définie par un polynôme ϕ de $\Phi(A)$ et par la valeur $\gamma_\infty = \mu_\infty(\phi)$ sont égales.*

Preuve. D'après la proposition 1.23 nous avons l'inégalité $\mu_\alpha(f) \leq \mu'(f)$ pour tout α dans A, d'où l'inégalité $\mu_\infty(f) \leq \mu'(f)$.

Supposons que les deux valuations μ_∞ et μ' ne soient pas égales et soit f un polynôme dans $K[x]$ de degré minimal vérifiant $\mu_\infty(f) < \mu'(f)$. Alors $\deg f \geq \deg\phi$, en effet si $\deg f < \deg\phi$, et plus généralement si $f \notin \tilde{\Phi}(A)$, d'après la proposition 1.23, il existe α dans A tel que $\mu_\alpha(f) = \mu'(f)$, d'où l'égalité $\mu_\infty(f) = \mu'(f)$.
Soit $f = q\phi + r$ la division euclidienne de f par ϕ, $q \neq 0$. Par hypothèse $\mu_\infty(f) < \mu'(f)$, par conséquent le polynôme f appartient à $\tilde{\Phi}(A)$ et d'après le lemme 1.24, pour tout α suffisamment grand, $\mu_\alpha(r) > \mu_\alpha(f) = \mu_\alpha(q\phi)$, nous en déduisons $\mu_\infty(r) \geq \mu_\infty(f) = \mu_\infty(q\phi)$. Comme $\deg q < \deg f$, nous avons l'égalité $\mu_\infty(q) = \mu'(q)$, d'où l'égalité $\mu_\infty(q\phi) = \mu'(q\phi)$ car nous avons choisi $\gamma_\infty = \mu_\infty(\phi)$.
Nous avons alors la relation $\mu'(f) > \mu_\infty(f) = \mu_\infty(q\phi) = \mu'(q\phi)$, ce qui est impossible car par définition de la valuation μ', nous devons avoir $\mu'(f) = \inf\big(\mu'(q\phi), \mu'(r)\big)$.

Remarque 1.17. Dans le cas où la borne supérieure $\bar{\gamma}$ est égale à $+\infty$, la valuation limite μ_∞ est en fait une pseudo-valuation. Tout polynôme-clé limite ϕ pour la famille $(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}$, c'est à dire tout polynôme appartenant à $\Phi(A)$ vérifie alors $\mu_\infty(\phi) = +\infty$ d'après la proposition 1.20, et la proposition précédente est encore vérifiée, c'est à dire que la pseudo-valuation limite μ_∞ et la pseudo-valuation augmentée limite $\mu' = \big[(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu'(\phi) = +\infty\big]$ sont égales.

2 Extension d'une valuation

Nous considérons un corps K muni d'une valuation ν et nous voulons étudier les prolongements de ν à une extension monogène de K, c'est à dire soit à une extension transcendante pure de degré un $K(x)$, soit à une extension algébrique $L = K(\theta)$. Pour cela il suffit d'étudier les prolongements de la valuation

ν à l'anneau des polynômes $K[x]$, soit en une valuation μ qui induit alors une unique valuation du corps $K(x)$, soit en une pseudo-valuation $\tilde{\mu}$. En effet si l' extension algébrique finie $L = K(\theta)$ est de la forme $L = K[x]/(G)$, où G est le polynôme irréductible de θ sur K, toute valuation μ de L qui prolonge ν correspond à une pseudo-valuation $\tilde{\mu}$ de l'anneau $K[x]$, de socle l'idéal (G).
Dans le cas où la valuation ν est une valuation discrète de rang un, S. MacLane a montré que pour toute valuation ou pseudo-valuation $\tilde{\mu}$ de $K[X]$ qui prolonge ν, il existe une famille de valuations augmentées itérées $\left(\mu_n\right)_{n\in I}$, finie ou infinie, telle que $\tilde{\mu} = \mu_n$ si la famille est finie et $I = \{0, \ldots, n\}$, ou telle que $\tilde{\mu} = \lim_n \mu_n$ si la famille est infinie et $I = \mathbb{N}$ ([McL 1] et [McL 2]).
Dans le cas d'une pseudo-valuation $\tilde{\mu}$ associée à une valuation μ sur une extension algébrique finie L de K prolongeant la valuation ν, il a ainsi pu étudier le groupe des ordres Γ_μ et l'extension résiduelle κ_μ, et il a déterminé toutes les prolongements possibles μ de ν à L ([McL 2]).
Nous allons étudier le cas d'une valuation ν quelconque, c'est à dire sans hypothèse sur son groupe des ordres Γ_ν, et utiliser ce qui précède pour construire grâce à la valuation μ ou à la pseudo-valuation $\tilde{\mu}$ une famille de valuations augmentées itérées $\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$, ou plusieurs familles successives. Cela nous permettra de donner une description des algèbres graduées $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ ou $\mathrm{gr}_\mu L$ à partir de l'algèbre $\mathrm{gr}_\nu K$ en fonction des différents polynômes-clés ϕ_α et des différentes valeurs γ_α. En particulier cela nous donnera le groupe des valeurs Γ_μ et le corps résiduel κ_μ de la valuation μ.
Dans la suite, nous nous donnons une valuation ν du corps K et nous considérons des valuations de l'anneau $K[x]$ qui prolongent ν.

2.1 Famille admissible

Définition. Une famille $\mathcal{S}$ de valuations augmentées itérées est appelée une *famille admissible simple* si la famille est de la forme $\mathcal{S} = \left(\mu_i\right)_{i\in I}$, où l'ensemble d'indice I est de la forme $I = B \sqcup A$, avec $B = \{1, \ldots, n\}$, $n \geq 1$, ou $B = \mathbb{N}^*$, avec $A = \emptyset$ ou A ensemble totalement ordonné infini, où l'ordre total sur l'ensemble I est défini par $i < \alpha$ pour tout i dans B et pour tout α dans A, et vérifiant:

- pour $i \in B$, $i \geq 2$, nous avons l'inégalité $\deg\phi_i > \deg\phi_{i-1}$,

- si $A \neq \emptyset$, alors B est fini, $B = \{1, \ldots, n\}$ et pour tout $\alpha \in A$, nous avons l'égalité $\deg\phi_\alpha = \deg\phi_n$, en particulier $\forall\alpha \in A$, ϕ_α est un polynôme-clé pour μ_{n-1} et la valuation augmentée μ_α est égale à $\mu_\alpha = [\mu_{n-1}\ ;\ \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha] = [\mu_{\alpha'}\ ;\ \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$, pour tout $\alpha' < \alpha$, la suite $\left(\gamma_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ est strictement croissante et les groupes des ordres Γ_{μ_α} sont tous égaux au groupe des ordres Γ_{μ_n}; la famille $\left(\mu_\alpha\right)_{\alpha\in A}$ est "exhaustive", c'est à dire que $\forall\alpha \in A$, $\forall\delta \in \Gamma_{\mu_n}$ avec $\gamma_n < \delta \leq \gamma_\alpha$, $\exists\beta \in A$ avec $\beta < \alpha$ tel que $\delta = \gamma_\beta$, et l'ensemble $\Lambda = \{\gamma_\alpha \mid \alpha \in A\}$ n'admet pas de plus grand élément dans Γ_{μ_n}.

Si l'ensemble A est vide, c'est à dire si l'ensemble des indices est un sous-ensemble I de $\mathbb{N}$, nous disons que la famille $\mathcal{S} = \left(\mu_i\right)_{i\in I}$ est une *famille admissible simple discrète*.

Remarque 2.1. Si l'ensemble Λ possédait un plus grand élément γ_β pour un β dans A, alors le polynôme ϕ_β serait un polynôme-clé pour μ_{n-1} et la valuation $\mu_\beta = [\mu_{n-1}\ ;\ \mu_\beta(\phi_\beta) = \gamma_\beta]$ vérifierait $\mu_\beta(f) = \lim_\alpha \mu_\alpha(f)$ pour tout f dans $K[x]$, c'est à dire que nous pourrions remplacer la famille de valuations précédente par une famille finie de valuations augmentées itérées $\left(\mu_i\right)_{1\leq i\leq n}$, où nous aurions remplacé la dernière valuation μ_n par μ_β.
La propriété "d'exhaustivité" permet d'avoir le théorème 1.19, c'est à dire que tout polynôme f de $K[x]$ admet une factorisation de la forme $f \underset{A}{\sim} f_0\phi_{\alpha_1}\ldots\phi_{\alpha_t}$. Plus précisément nous avons pour tout f l'existence d'éléments $\alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_t$ de A et de $\delta_0 \in \Gamma_{\mu_n}$ tels que $\forall\alpha \in A$, $\mu_\alpha(f) = \delta_0 + \sum_{j=1}^t \inf(\gamma_{\alpha_j}, \gamma_\alpha)$.

Définition. Une famille de valuations $\mathcal{A} = \left(\mu_i\right)_{i\in I}$ est appelée une *famille admissible* si elle est réunion d'un ensemble fini ou dénombrable de familles admissibles simples $\mathcal{S}^{(t)} = \left(\mu_i^{(t)}\right)_{i\in I^{(t)}}$, avec $1 \leq t \leq N$ où $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, et $I^{(t)} = \{1, \ldots n^{(t)}\} \sqcup A^{(t)}$, vérifiant:

- toutes les familles admissibles simples $\mathcal{S}^{(t)} = \left(\mu_i^{(t)}\right)_{i\in I^{(t)}}$, sauf éventuellement la dernière dans le cas $N < +\infty$, sont des familles admissibles simples non discrètes, c'est à dire vérifient $A^{(t)} \neq \emptyset$,

- la première valuation de la famille, c'est à dire la première valuation $\mu_1^{(1)}$ de la première famille admissible simple $\mathcal{S}^{(1)}$, est une valuation augmentée de la forme $\mu_1^{(1)} = [\mu_0 \ ; \ \mu_1^{(1)}(\phi_1^{(1)}) = \gamma_1]$, où μ_0 est la valuation ν du corps K et où $\phi_1^{(1)}$ est un polynôme de degré un,

- pour $t \geq 2$, la première valuation $\mu_1^{(t)}$ de la famille admissible simple $\mathcal{S}^{(t)}$ est une valuation augmentée limite pour la famille de valuations $\big(\mu_\alpha^{(t-1)}\big)_{\alpha \in A^{(t-1)}}$.

Si la famille admissible $\mathcal{A} = \big(\mu_i\big)_{i \in I}$ est réunion d'un nombre fini N de familles admissibles simples, nous appelons N *l'ordre* de la famille admissible, sinon nous disons que la famille admissible est *d'ordre infini*.

Si $\mathcal{S}^{(t)} = \big(\mu_i^{(t)}\big)_{i \in I^{(t)}}$ est une famille admissible simple, l'ensemble d'indices $I^{(t)}$ est totalement ordonné, et si la famille admissible $\mathcal{A} = \big(\mu_i\big)_{i \in I}$ est obtenue comme réunion des familles admissibles simples $\mathcal{S}^{(t)} = \big(\mu_i^{(t)}\big)_{i \in I^{(t)}}$, l'ensemble d'indices $I = \bigsqcup_{t=1}^{N} I^{(t)}$ est encore totalement ordonné par $i < j$ pour tout $i \in I^{(t)}$ et tout $j \in I^{(s)}$, si $t < s$.

Proposition 2.1. *Pour tout polynôme f dans $K[x]$ la famille $\big(\mu_i(f)\big)_{i \in I}$ est croissante, c'est à dire que pour tout $i < j$ dans I, nous avons $\mu_i(f) \leq \mu_j(f)$.*
De plus s'il existe $i < j$ dans I tels que $\mu_i(f) = \mu_j(f)$, alors pour tout $k \geq i$, nous avons encore l'égalité $\mu_i(f) = \mu_k(f)$.

Preuve. La première partie de la proposition est une conséquence de l'inégalité dans le cas d'une valuation augmentée (proposition 1.3) et dans le cas d'une valuation augmentée limite (proposition 1.23).

La deuxième partie de la proposition est une conséquence du théorème 1.10 et du lemme suivant.

Lemme 2.2. *Soient $\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A}$ une famille infinie de valuations augmentées itérées, ϕ_1 un polynôme-clé limite appartenant à $\Phi(A)$ et $\mu_1 = \big[(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} \ ; \ \mu_1(\phi_1) = \gamma_1\big]$ une valuation augmentée limite définie par ϕ_1. Soit μ_2 une valuation augmentée pour μ_1 associée à un polynôme-clé ϕ_2 avec $\mathrm{deg}\phi_2 \geq \mathrm{deg}\phi_1$, alors pour tout f dans $K[x]$, s'il existe α dans A tel que $\mu_\alpha(f) = \mu_1(f)$, nous avons l'égalité $\mu_1(f) = \mu_2(f)$.*

Preuve. Soit f dans $K[x]$ et α dans A tels que $\mu_\alpha(f) = \mu_1(f)$. Si $f = \phi_1 q + r$ est la division euclidienne de f par le polynôme-clé limite ϕ_1, nous avons les inégalités: $\mu_2(f - r) = \mu_2(\phi_1 q) \geq \mu_1(\phi_1 q) > \mu_\alpha(\phi_1 q)$. Comme $\mu_\alpha(f) = \mu_1(f)$, nous déduisons de la proposition 1.23 et du lemme 1.24 l'égalité $\mu_\alpha(f) = \mu_\alpha(r)$ et comme le polynôme r est de degré $\mathrm{deg} r < \mathrm{deg}\phi_1 \leq \mathrm{deg}\phi_2$, nous avons aussi $\mu_\alpha(r) = \mu_1(r) = \mu_2(r)$, d'où $\mu_2(f - r) > \mu_2(r)$. Nous en déduisons l'égalité $\mu_2(f) = \mu_\alpha(f)$.

Remarque 2.2. Comme $\mathcal{S}^{(t)} = \big(\mu_i^{(t)}\big)_{i \in I^{(t)}}$ est une famille admissible simple, nous avons:
$d_1^{(t)} = \mathrm{deg}\phi_1^{(t)} < \ldots < d_{n^{(t)}-1}^{(t)} = \mathrm{deg}\phi_{n^{(t)}-1}^{(t)} < d_{n^{(t)}}^{(t)} = \mathrm{deg}\phi_{n^{(t)}}^{(t)} = \mathrm{deg}\phi_\alpha^{(t)}$, pour tout $\alpha \in A^{(t)}$, et comme $\phi_1^{(t+1)}$ est un polynôme-clé limite pour la famille de valuations $\big(\mu_\alpha^{(t)}\big)_{\alpha \in A^{(t)}}$, nous avons l'inégalité: $d_{n^{(t)}}^{(t)} = \mathrm{deg}\phi_\alpha^{(t)} < d_1^{(t+1)} = \mathrm{deg}\phi_1^{(t+1)}$.
Nous obtenons ainsi pour toute famille admissible $\mathcal{A} = \big(\mu_i\big)_{i \in I}$, avec $I = \bigsqcup_{t=1}^{N} I^{(t)}$, une suite d'entiers strictement croissante:

$$1 = d_1^{(1)} < \ldots < d_{n^{(1)}}^{(1)} < d_1^{(2)} < \ldots < d_{n^{(t-1)}}^{(t-1)} < d_1^{(t)} < \ldots < d_{n^{(t)}}^{(t)} < \ldots .$$

Si la famille admissible est d'ordre infini, cette suite est infinie, en particulier elle n'est pas bornée. Si la famille admissible est d'ordre $N < +\infty$ et si la dernière famille admissible simple $\mathcal{S}^{(N)}$ n'est pas discrète infinie, c'est à dire si $B^{(N)} = \{1, \ldots, n^{(N)}\}$, cette suite admet pour dernier élément l'entier $d_{n^{(N)}}^{(N)}$.

2.2 Famille admise

Nous considérons une valuation ou une pseudo-valuation μ de $K[x]$ et nous voulons essayer de l'approcher par des familles admissibles de valuations. Nous rappelons que pour toute valuation μ_i de $K[x]$ vérifiant $\mu_i \leq \mu$, nous avons définit l'ensemble $\Phi(\mu_i)$ comme l'ensemble des polynômes unitaires ϕ de $K[x]$ vérifiant $\mu_i(\phi) < \mu(\phi)$ et de degré minimal pour cette propriété, et le sous-ensemble $\Lambda(\mu_i)$ de Γ_μ par $\Lambda(\mu_i) = \{\mu(\phi) \mid \phi \in \Phi(\mu_i)\}$. Nous posons alors la définition.

Définition. Une famille admissible de valuations $\mathcal{A} = \big(\mu_j\big)_{j\in I}$ de $K[x]$ est appelée *une famille admise* pour la valuation ou pour la pseudo-valuation μ si elle vérifie les propriétés suivantes:

- pour tout j dans I, $\mu_j(f) \leq \mu(f)$ pour tout f dans $K[x]$, et nous avons l'égalité $\mu_j(f) = \mu(f)$ pour tout f de degré strictement inférieur au degré du polynôme-clé ou polynôme-clé limite ϕ_j définissant la valuation μ_j;

- si $\mathcal{S}^{(t)} = \big(\mu_i^{(t)}\big)_{i\in I^{(t)}}$ est une famille admissible simple non discrète contenue dans $\mathcal{A}$, $I^{(t)} = B^{(t)} \sqcup A^{(t)}$, pour tout $\theta \in A^{(t)}$ l'ensemble $\{\gamma_\alpha \mid \alpha \in A^{(t)} \text{ et } \alpha > \theta\}$ est égal à $\Lambda(\mu_\theta)$.

Nous appelons $\tilde{\Phi}\big((\mu_j)_{j\in I}\big) = \tilde{\Phi}(\mathcal{A})$ le sous-ensemble de $K[x]$ défini par $\tilde{\Phi}(\mathcal{A}) = \big\{f \in K[x] \mid \mu_j(f) < \mu(f)\ \forall \mu_j \in \mathcal{A}\big\}$. Si l'ensemble $\tilde{\Phi}(\mathcal{A})$ est non vide nous notons $d(\mathcal{A})$ l'entier $d(\mathcal{A}) = \mathrm{Inf}\big\{\mathrm{deg} f \mid f \in \tilde{\Phi}(\mathcal{A})\big\}$, et nous définissons l'ensemble $\Phi(\mathcal{A})$ par $\Phi(\mathcal{A}) = \big\{\phi \in K[x] \mid \mu_j(\phi) < \mu(\phi)\ \forall \mu_j \in \mathcal{A},\ \phi \text{ unitaire et } \mathrm{deg}\phi = d(\mathcal{A})\big\}$. Dans ce cas le degré des polynômes-clés de la famille $\big(\phi_j\big)_{j\in I}$ est borné et nous avons $d(\mathcal{A}) \geq \mathrm{Sup}\big(\mathrm{deg}\phi_j\ ;\ j \in I\big)$. Dans le cas où l'ensemble $\tilde{\Phi}(\mathcal{A})$ est vide nous posons $d(\mathcal{A}) = +\infty$.

Proposition 2.3. *Soit $\mathcal{A}$ une famille admise pour une valuation ou une pseudo-valuation μ, telle que l'ensemble $\tilde{\Phi}(\mathcal{A})$ soit non vide, alors il existe une nouvelle famille $\mathcal{B}$ admise pour μ, contenant $\mathcal{A}$ exceptée éventuellement la dernière valuation, avec $d(\mathcal{B}) > d(\mathcal{A})$.*

Preuve. Par hypothèse la famille $\mathcal{A}$ est d'ordre fini N, et la dernière famille admissible simple $\mathcal{S}^{(N)} = \big(\mu_i^{(N)}\big)_{i\in I^{(N)}}$ qui la compose est soit une famille non discrète, c'est à dire $I^{(N)} = \{1, \ldots, n\} \sqcup A^{(N)}$, soit une famille discrète finie, c'est à dire $I^{(N)} = \{1, \ldots, n\}$. Nous déduisons de la proposition 2.1 que l'ensemble $\Phi(\mathcal{A})$ associé à la famille admise $\mathcal{A}$ est égal dans le premier cas à l'ensemble $\Phi\big(A^{(N)}\big)$, et dans le second cas à l'ensemble $\Phi\big(\mu_n^{(N)}\big)$.

Si $\mathcal{S}^{(N)}$ est une famille simple non discrète, c'est à dire si la famille d'indices I ne possède pas de plus grand élément, la famille de valuations $\big(\mu_\alpha^{(N)}\big)_{\alpha\in A^{(N)}}$ est une famille de valuations augmentées itérées avec $\Phi(A^{(N)}) \neq \emptyset$, et d'après la proposition 1.21 tout polynôme de $\Phi(A^{(N)})$ est un polynôme-clé limite pour la famille $\big(\mu_\alpha^{(N)}\big)_{\alpha\in A^{(N)}}$. Nous choisissons un polynôme $\phi_1^{(N+1)}$ dans $\Phi(A^{(N)})$ et nous pouvons alors définir la valuation augmentée limite $\mu_1^{(N+1)}$ associée à $\phi_1^{(N+1)}$.
Nous définissons une nouvelle famille admise $\mathcal{A}'$ en ajoutant à la famille $\mathcal{A}$ la famille admissible simple $\mathcal{S}^{(N+1)}$ constituée de l'unique valuation $\mu_1^{(N+1)}$. La famille des indices I' de la famille admise $\mathcal{A}'$ est égale à $I' = I \sqcup \{1^{(N+1)}\}$ et possède un plus grand élément. Nous déduisons de la proposition 1.27 que le polynôme $\phi_1^{(N+1)}$ est de degré strictement supérieur au degré des polynômes $\phi_\alpha^{(N)}$.

Si $\mathcal{S}^{(N)}$ est une famille discrète finie, c'est à dire si la famille d'indices I possède un plus grand élément i, la valuation μ_i n'est pas égale à μ, et tout élément ϕ de $\Phi(\mu_i)$ est un polynôme-clé pour la valuation μ_i.

Si l'ensemble des valeurs $\Lambda(\mu_i) = \big\{\mu(\phi) \mid \phi \in \Phi(\mu_i)\big\}$ n'admet pas de plus grand élément dans Γ_μ, nous définissons la famille de valuations augmentées itérées associée $\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$, c'est à dire que pour tout γ_α dans $\Lambda(\mu_i)$, nous choisissons ϕ_α dans $\Phi(\mu_i)$ tel que $\mu(\phi)_\alpha = \gamma_\alpha$ et nous définissons la valuation augmentée $\mu_\alpha = [\mu_i\ ;\ \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$. Alors nous pouvons définir une nouvelle famille admise $\mathcal{A}'$ en ajoutant à la famille $\mathcal{A}$ la famille de valuations $\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$. La famille des indices I' de la famille admise $\mathcal{A}'$ est égale à $I \sqcup A$ et n'admet pas de plus grand élément.

Si l'ensemble des valeurs $\Lambda(\mu_i)$ admet un plus grand élément γ' dans Γ_μ, nous choisissons ϕ' dans $\Phi(\mu_i)$ avec $\mu(\phi') = \gamma'$ et nous définissons la valuation augmentée $\mu' = [\mu_i\ ;\ \mu'(\phi') = \gamma']$.
Si le degré du polynôme ϕ' est strictement supérieur au degré du polynôme ϕ_i qui définit la valuation μ_i, nous posons $\phi' = \phi_{i+1}$, $\gamma' = \gamma_{i+1}$ et $\mu_{i+1} = \mu' = [\mu_i\ ;\ \mu_{i+1}(\phi_{i+1}) = \gamma_{i+1}]$. Nous définissons alors une nouvelle famille admise $\mathcal{A}' = \big(\mu_j\big)_{j\in I'}$, avec $I' = I \cup \{i+1\}$ telle que la dernière valuation μ_{i+1} vérifie $\mu_{i+1}(f) = \mu(f)$ pour tout f dans $K[x]$ avec $\mathrm{deg} f \leq \mathrm{deg}\ \phi_{i+1}$.
Si le degré du polynôme ϕ' est égal au degré du polynôme ϕ_i, alors nous remplaçons la valuation μ_i par la valuation μ'. En effet si la valuation μ_i est obtenue comme valuation augmentée pour une valuation μ_{i-1} ou comme valuation augmentée limite pour une famille $\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$, le polynôme ϕ_{i+1}

est un polynôme-clé pour la valuation μ_{i-1} ou un polynôme-clé limite pour la famille $\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$. Nous définissons ainsi une nouvelle famille admise $\mathcal{A}'$ ayant même famille d'indices I telle que la valuation μ_i vérifie $\mu_i(f) = \mu(f)$ pour tout f avec deg$f \le$ deg ϕ_i.

Nous avons ainsi construit à partir de la famille $\mathcal{A}$ admise pour μ une nouvelle famille admise $\mathcal{A}'$ qui vérifie toujours $d(\mathcal{A}') \ge d(\mathcal{A})$. De plus, si les familles d'indices I et I' associées respectivement aux familles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ ont un plus grand élément, nous avons le résultat cherché, c'est à dire l'inégalité stricte $d(\mathcal{A}') > d(\mathcal{A})$. En effet nous avons alors $d(\mathcal{A}) = \deg\phi_{i+1}$ et comme le polynôme-clé ϕ_{i+1} est associé au plus grand élément de l'ensemble $\Lambda(\mu_i)$, nous avons l'inégalité $d(\mathcal{A}') > \deg\phi_{i+1}$, d'où l'inégalité $d(\mathcal{A}') > d(\mathcal{A})$.
Si la famille d'indice I associée à $\mathcal{A}$ n'a pas de plus grand élément la famille d'indices I' associée à $\mathcal{A}'$ a un plus grand élément. Par conséquent pour trouver la famille admise $\mathcal{B}$ dans tous les cas, il suffit de montrer que nous avons l'inégalité stricte $d(\mathcal{A}') > d(\mathcal{A})$ dans le cas où la famille d'indice I associée à $\mathcal{A}$ a un plus grand élément et où la famille d'indices I' associée à $\mathcal{A}'$ n'a pas de plus grand élément. Si nous appelons $\big(\mu_\alpha^{(N)}\big)_{\alpha\in A^{(N)}}$ la famille de valuation augmentées itérées telle que $I' = I \sqcup A^{(N)}$, alors tout polynôme-clé limite ϕ pour la famille $\big(\mu_\alpha^{(N)}\big)_{\alpha\in A^{(N)}}$ est de degré $\deg\phi > \deg\phi_\alpha$, d'où l'inégalité $d(\mathcal{A}') \ge \deg\phi > \deg\phi_\alpha = d(\mathcal{A})$.

Si $\mathcal{A} = \big(\mu_i\big)_{i\in I}$ est une famille admissible de valuations de $K[x]$, les groupes des valeurs $\big(\Gamma_{\mu_i}\big)_{i\in I}$ forment une famille de groupes totalement ordonnés et leur réunion $\Gamma_{\mathcal{A}} = \bigcup_{i\in I}\Gamma_{\mu_i}$ est encore un groupe totalement ordonné. Pour tout polynôme f dans $K[x]$, la famille des valeurs $\big(\mu_i(f)\big)_{i\in I}$ est croissante, et nous disons que la famille admise $\mathcal{A}$ est convergente si pour tout f, la famille $\big(\mu_i(f)\big)_{i\in I}$ admet une borne supérieure dans $\Gamma_{\mathcal{A}}$.

Théorème 2.4. *Soit μ une valuation de $K[x]$ prolongeant la valuation ν de K, alors il existe une famille admise de valuations convergente $\mathcal{A} = \big(\mu_i\big)_{i\in I}$ qui converge vers la valuation μ, c'est à dire telle que pour tout f dans $K[x]$ nous ayons:*

$$\mu(f) = \lim_i \mu_i(f) = \mathrm{Sup}\big\{\mu_i(f)\,,\, i\in I\big\}\,.$$

Preuve. Nous allons construire la famille admise $\mathcal{A}$ de la manière suivante.

Nous définissons la valuation $\mu_1^{(1)} = \mu_1$ comme la valuation augmentée $\mu_1 = [\nu\ ;\ \mu_1(\phi_1) = \gamma_1]$, avec $\phi_1 = x$ et $\gamma_1 = \mu(x)$, et nous définissons la famille admise $\mathcal{A}_0 = (\mu_1)$. Si la valuation μ est égale à la valuation μ_1, la famille admise convergente cherchée est la famille $\mathcal{A}_0$, sinon nous appliquons la proposition 2.3 pour construire une nouvelle famille admise $\mathcal{B} = \mathcal{A}_1$ telle que pour tout polynôme f de degré $d \le 1$, il existe une valuation μ_j de $\mathcal{A}_1$ avec $\mu_j(f) = \mu(f)$.
Grâce à la proposition 2.3 nous pouvons construire ainsi une suite de familles admises $\mathcal{A}_n$ telle que la suite d'entiers $d(\mathcal{A}_n)$ soit strictement croissante. Si cette suite est finie, c'est à dire s'il existe un entier n tel que $d(\mathcal{A}_n) = +\infty$, c'est à dire tel que pour tout polynôme f de $K[x]$, il existe une valuation μ_j de la famille $\mathcal{A}_n$ avec $\mu_j(f) = \mu(f)$, alors la famille admise $\mathcal{A}_n$ est la famille cherchée. Si cette suite est infinie, nous prenons pour famille admise $\mathcal{A}$ la limite des familles $\mathcal{A}_n$, la famille $\mathcal{A}$ est bien définie car les familles admises $\mathcal{A}_n$ sont ordonnées par inclusion, et comme la suite $\big(d(\mathcal{A}_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, pour tout f dans $K[x]$, il existe m et une valuation μ_j appartenant à toutes les familles $\mathcal{A}_n$ pour $n \ge m$ telle que $\mu_j(f) = \mu(f)$.

Remarque 2.3. En fait nous avons un résultat un peu plus précis, pour tout f il existe une valuation μ_j dans la famille $\mathcal{A}$ telle que $\mu_j(f) = \mu(f)$. Mais il peut arriver que nous ayons une famille admise $\mathcal{A}$, d'ordre fini N, avec une dernière famille admissible simple $\mathcal{S}^{(N)}$ non discrète telle que pour tout f dans $K[x]$ nous ayons $\mu(f) = \mathrm{Sup}\big\{\mu_\alpha^{(N)}\,,\, \alpha\in A^{(N)}\big\}$, avec $d(\mathcal{A}) < +\infty$. Dans ce cas la famille admise $\mathcal{A}$ converge vers la valuation μ, mais nous pouvons trouver un polynôme-clé limite ϕ pour la famille $\big(\mu_\alpha^{(N)}\big)_{\alpha\in A^{(N)}}$ qui nous permet de définir une nouvelle famille admise $\mathcal{A}'$ d'ordre $N+1$ vérifiant $\mu_1^{(N+1)} = \mu$ (voir la proposition 1.28).

Si nous voulons étudier le prolongement d'une valuation ν de K à une extension algébrique $L = K(\theta)$, il nous faut considérer le cas d'une pseudo-valuation $\tilde{\mu}$ de $K[x]$. Nous rappelons que si μ est une valuation de $K[x]$ et si ϕ est un polynôme-clé pour μ, nous pouvons définir une pseudo-valuation augmentée μ' de socle l'idéal (ϕ) de $K[x]$, en posant $\mu' = [\mu\ ;\ \mu'(\phi) = +\infty]$. De même si ϕ est un polynôme-clé limite pour une famille de valuations augmentées itérées $\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$, nous pouvons définir une pseudo-valuation augmentée limite de socle (ϕ), en posant $\mu' = \big[(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu'(\phi) = +\infty\big]$.

Soit $\mathcal{A} = \big(\mu_i\big)_{i\in I}$ une famille admise de valuations d'ordre $N < +\infty$. Si I possède un plus grand élément, c'est à dire si la famille simple $\mathcal{S}^{(N)}$ est discrète, nous notons $\mu_n^{(N)}$ ce plus grand élément, sinon nous notons $\big(\mu_\alpha^{(N)}\big)_{\alpha\in A^{(N)}}$ la famille infinie de valuations augmentées itérées qui appartient à $\mathcal{S}^{(N)}$.

Définition. Un polynôme ϕ de $K[x]$ est appelé un *polynôme-clé* pour la famille admise $\mathcal{A}$, si ϕ est soit un polynôme-clé pour la valuation $\mu_n^{(N)}$ de degré strictement supérieur au degré du polynôme-clé $\phi_n^{(N)}$, soit un polynôme-clé limite pour la famille $\big(\mu_\alpha^{(N)}\big)_{\alpha\in A^{(N)}}$.
La pseudo-valuation augmentée $\mu' = [\mu_n^{(N)}\ ;\ \mu'(\phi) = +\infty]$ ou la pseudo-valuation augmentée limite $\mu' = \big[(\mu_\alpha^{(N)})_{\alpha\in A^{(N)}}\ ;\ \mu'(\phi) = +\infty]$ est appelée la pseudo-valuation augmentée pour la famille $\mathcal{A}$ et nous la notons: $\mu' = \big[(\mu_i)_{i\in I}\ ;\ \mu'(\phi) = +\infty\big]$.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat pour une extension de la valuation ν de K à une extension algébrique L définie par $L = K[x]/(G)$, où $G(x)$ est un polynôme irréductible de $K[x]$.

Théorème 2.5. *Soit μ une valuation de L prolongeant la valuation ν de K, alors il existe une famille admise de valuations $\mathcal{A} = \big(\mu_i\big)_{i\in I}$ de $K[x]$ d'ordre fini, telle que le polynôme G soit un polynôme-clé pour cette famille et telle que la pseudo-valuation augmentée $\tilde\mu = \big[(\mu_i)_{i\in I}\ ;\ \tilde\mu(G) = +\infty\big]$ soit la pseudo-valuation de $K[x]$ de socle (G) associée à la valuation μ.*

Preuve. Nous procédons comme dans la preuve de le théorème 2.4. En utilisant la proposition 2.3, nous pouvons construire par récurrence une famille de valuations $\mathcal{A} = (\mu_j)_{j\in I}$ admise pour la pseudo-valuation $\tilde\mu$ vérifiant $d(\mathcal{A}) = \deg G = d$.
De plus nous pouvons trouver la famille $\mathcal{A}$ avec $\mathrm{Sup}\big(\deg\phi_j\ ;\ j\in I\big) < d$, et le polynôme G est alors un polynôme-clé pour la famille admise $\mathcal{A}$. Plus précisément, si la dernière famille admissible simple $\mathcal{S}^{(N)} = \big(\mu_i^{(N)}\big)_{i\in I^{(N)}}$ qui compose la famille $\mathcal{A}$ est discrète finie, $I^{(N)} = \{1,\ldots,n\}$, le dernier polynôme-clé $\phi_n^{(N)}$ est de degré strictement inférieur à d et G est un polynôme-clé pour la valuation $\mu_n^{(N)}$, et si la famille simple $\mathcal{S}^{(N)}$ est non discrète, $I^{(N)} = \{1,\ldots,n\} \sqcup A^{(N)}$, les polynômes $\phi_\alpha^{(N)}$ sont de degré strictement inférieur à d et G est un polynôme-clé limite pour la famille de valuations $\big(\mu_\alpha^{(N)}\big)_{\alpha\in A^{(N)}}$.

2.3 Algèbres graduées

Soient K un corps, $L = K(\theta)$ une extension algébrique de K et nous voulons comparer les algèbres graduées $\mathrm{gr}_\nu K$ et $\mathrm{gr}_\mu L$ associées respectivement aux valuations ν sur K et μ sur L où μ est un prolongement de ν à L. Nous appelons $\tilde\mu$ la pseudo-valuation sur $K[x]$ de socle (G) associée à la valuation μ sur $L = K[x]/(G)$.
Nous voulons d'abord comparer les algèbres graduées $\mathrm{gr}_{\tilde\mu} K[x]$ et $\mathrm{gr}_\mu L$, où l'algèbre graduée associée à la pseudo-valuation $\tilde\mu$ de $K[x]$ est égale à:

$$\mathrm{gr}_{\tilde\mu} K[x] = \bigoplus_{\delta\in\Gamma} \mathcal{P}_\delta/\mathcal{P}_\delta^+ \oplus \mathcal{P}_{+\infty}\ ,$$

où $\mathcal{P}_{+\infty}$ est l'idéal $\big\{\ f\in K[x]\ \mid\ \tilde\mu(f) \geq +\infty\ \big\}$, c'est à dire où $\mathcal{P}_{+\infty}$ est le socle de la pseudo-valuation $\tilde\mu$.

Lemme 2.6. *Soit $\tilde\mu$ une pseudo-valuation de l'anneau $K[x]$ de socle $\mathcal{P}_{+\infty} = (G)$ et soit μ la valuation du corps $L = K[x]/(G)$ définie par $\tilde\mu$, alors les algèbres graduées associées respectivement à $\tilde\mu$ et μ vérifient la relation suivante:*

$$\mathrm{gr}_{\tilde\mu} K[x] = \mathrm{gr}_\mu L \oplus (\mathcal{P}_{+\infty})\ .$$

Preuve. Par définition de la valuation μ de L à partir de la pseudo-valuation $\tilde{\mu}$ de $K[x]$, les groupes des ordres respectifs $\Gamma_{\tilde{\mu}}$ et Γ_μ sont égaux et pour tout élément δ de ce groupe le morphisme $K[x] \twoheadrightarrow L$ induit une application φ_δ de $\mathcal{P}_\delta\big(\tilde{\mu}, K[x]\big)$ dans $\mathcal{P}_\delta(\mu, L)$. Cette application est surjective et l'image inverse $\varphi_\delta^{-1}\big(\mathcal{P}_\delta^+(\mu, L)\big)$ est égale à $\mathcal{P}_\delta^+\big(\tilde{\mu}, K[x]\big)$. Nous en déduisons que les groupes

$$\bigoplus_{\delta\in\Gamma_{\tilde{\mu}}} \mathcal{P}_\delta\big(\tilde{\mu}, K[x]\big)/\mathcal{P}_\delta^+\big(\tilde{\mu}, K[x]\big) \quad \text{et} \quad \bigoplus_{\delta\in\Gamma_\mu} \mathcal{P}_\delta(\mu, L)/\mathcal{P}_\delta^+(\mu, L)$$

sont isomorphes, d'où le résultat.

D'après le théorème 2.5 la pseudo-valuation $\tilde{\mu}$ sur $K[x]$ associée à la valuation μ de L est obtenue comme pseudo-valuation augmentée pour une famille admise $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i\in I}$ de valuations de $K[x]$, $\tilde{\mu} = \big[(\mu_i)_{i\in I}\ ;\ \tilde{\mu}(G) = +\infty\big]$.

Supposons d'abord que la famille $\mathcal{A}$ admette une plus grande valuation μ', dans ce cas $\tilde{\mu}$ est la pseudo-valuation augmentée pour μ' définie grâce au polynôme-clé G, c'est à dire $\tilde{\mu} = [\mu'\ ;\ \tilde{\mu}(G) = +\infty]$. Nous voulons alors comparer les algèbres graduées $\mathrm{gr}_{\tilde{\mu}}K[x]$ et $\mathrm{gr}_\mu L$ avec l'algèbre $\mathrm{gr}_{\mu'}K[x]$. Le groupe des ordres de la pseudo-valuation $\tilde{\mu}$ est égal au groupe des ordres de la valuation μ' et comme $\tilde{\mu}$ vérifie $\tilde{\mu}(f) \geq \mu'(f)$ pour tout f dans $K[x]$, nous avons une application naturelle de l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_{\mu'}K[x]$ dans $\mathrm{gr}_{\tilde{\mu}}K[x]$, qui induit une application de $\mathrm{gr}_{\mu'}K[x]$ dans $\mathrm{gr}_\mu L$.

Proposition 2.7. *Soit $\big(H_{\mu'}(G)\big)$ l'idéal de $\mathrm{gr}_{\mu'}K[x]$ engendré par la partie initiale du polynôme-clé G, alors l'application de $\mathrm{gr}_{\mu'}K[x]$ dans $\mathrm{gr}_\mu L$ induit un isomorphisme*

$$\mathrm{gr}_{\mu'}K[x]/\big(H_\mu(G)\big) \simeq \mathrm{gr}_\mu L\ .$$

Preuve. Nous démontrons comme pour le théorème 1.7 que l'application naturelle de $\mathrm{gr}_{\mu'}K[x]$ dans $\mathrm{gr}_{\tilde{\mu}}K[x]$ induit un isomorphisme de $\big(\mathrm{gr}_{\mu'}K[x]/(H_{\mu'}(G))\big)[T]$ dans $\mathrm{gr}_{\tilde{\mu}}K[x]$ qui envoie T sur $H_{\tilde{\mu}}(G)$. Nous pouvons remarquer que la partie initiale $H_{\tilde{\mu}}(G)$ s'identifie avec G dans le socle $\mathcal{P}_{+\infty} \subset \mathrm{gr}_{\tilde{\mu}}K[x]$.

Supposons maintenant que la dernière famille admissible simple $\mathcal{S}$ qui compose la famille admise $\mathcal{A}$ ne soit pas discrète, et soit $\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ la famille de valuations augmentées itérées de $K[x]$,définie par une famille infinie de polynômes-clés $\big(\phi_\alpha\big)$ de même degré d, qui apparaît dans $\mathcal{S}$. Alors le polynôme G est un polynôme-clé limite pour la famille $\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$, de degré $\deg G > d$, et $\tilde{\mu}$ est la pseudo-valuation augmentée limite, $\tilde{\mu} = \big[(\mu_\alpha)_{\alpha\in A}\ ;\ \tilde{\mu}(G) = +\infty\big]$.

Comme précédemment nous choisissons θ dans A et nous définissons l'algèbre graduée $\mathbf{gr_A} = \mathrm{gr}_{\mu_\theta}K[x]/\big(H_{\mu_\theta}(\phi_\alpha)\big)$, où $H_{\mu_\theta}(\phi_\alpha)$ ne dépend pas de $\alpha > \theta$, et d'après la proposition 1.25 l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_{\mu_\alpha}K[x]$ est isomorphe à $\mathbf{gr_A}[T_\alpha]$ pour tout $\alpha > \theta$. Le groupe des ordres de la pseudo-valuation $\tilde{\mu}$ est égal au groupe des ordres des valuations μ_α, et comme pour tout α dans A la pseudo-valuation $\tilde{\mu}$ vérifie $\tilde{\mu}(f) \geq \mu_\alpha(f)$ pour tout f dans $K[x]$, nous avons une application naturelle de l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_{\mu_\alpha}K[x]$ dans $\mathrm{gr}_{\tilde{\mu}}K[x]$, qui induit une application de $\mathrm{gr}_{\mu_\alpha}K[x]$ dans $\mathrm{gr}_\mu L$.

Proposition 2.8. *L'application de $\mathrm{gr}_{\mu_\alpha}K[x]$ dans $\mathrm{gr}_\mu L$ induit un isomorphisme*

$$\mathbf{gr_A} \simeq \mathrm{gr}_\mu L\ .$$

Preuve. Nous démontrons comme pour le théorème 1.26 que les applications des algèbres $\mathrm{gr}_{\mu_\alpha}K[x] \simeq \mathbf{gr_A}[T_\alpha]$ dans $\mathrm{gr}_{\tilde{\mu}}K[x]$ induisent un isomorphisme Q de $\mathbf{gr_A}[T]$ dans $\mathrm{gr}_{\tilde{\mu}}K[x]$ qui envoie T sur la partie initiale $H_{\tilde{\mu}}(G)$, qui s'identifie à G dans le socle $\mathcal{P}_{+\infty} \subset \mathrm{gr}_{\tilde{\mu}}K[x]$.

Remarque 2.4. Si la valuation ν sur K est une valuation discrète de rang un, c'est à dire si son groupe des ordres est isomorphe à $\mathbb{Z}$, alors nous retrouvons les deux cas étudiés par S. MacLane dans [McL 2].
Soit il existe une famille finie de valuations augmentées itérées $(\mu_i)_{0\leq i\leq n}$ associée à une famille de polynômes unitaires (ϕ_i) vérifiant $\deg\phi_{i-1} < \deg\phi_i < \deg G$, pour tout i, $2 \leq i \leq n$, le polynôme G est un polynôme-clé pour la valuation μ_n, et nous définissons la pseudo-valuation augmentée $\tilde{\mu} = [\mu_n\ ;\ \tilde{\mu}(G) = +\infty]$.
Soit il existe une famille infinie de valuations augmentées itérées $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ associée à une famille de polynômes unitaires (ϕ_i) de degré constant d à partir d'un certain rang n, avec $d < \deg G$, et telle que

les valeurs $\gamma_i = \tilde{\mu}(\phi_i)$ forment une suite strictement croissante dans le groupe des ordres Γ_{μ_n} qui est encore isomorphe à $\mathbb{Z}$. Nous nous trouvons dans le cas où l'ensemble $\Lambda(\mu_n) = \{\tilde{\mu}(\phi) \mid \phi \in \Phi(\mu_n)\}$ admet une borne supérieure $\bar{\gamma} = +\infty$, et nous pouvons définir la pseudo-valuation limite μ_∞ par $\mu_\infty(f) = \mathrm{Sup}\big(\mu_i(f)\,,\, i \in \mathbb{N}\big)$. Nous déduisons de la proposition 1.28 et de la remarque 1.17 que cette pseudo-valuation μ_∞ coïncide avec la pseudo-valuation augmentée limite $\tilde{\mu}$ définie par le polynôme G, $\tilde{\mu} = \big[(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}\ ;\ \tilde{\mu}(G) = +\infty\big]$.

Nous allons étudier le cas d'une extension séparable L/K de degré fini p d'un corps K muni d'une valuation ν, telle que la valuation ν ne possède qu'un unique prolongement μ à L et telle que l'extension $(L,\mu)/(K,\nu)$ soit immédiate, en particulier cette extension présente un défaut non trivial.

Soient F un corps de caractéristique $p > 0$, $K_0 = F(t)$ une extension transcendante pure de F munie de la valuation t-adique ν_t; soient $K_l = F\big(t^{1/p^l}\big)$ pour tout $l \geq 1$ et $K = F\big(t^{1/p^l} \mid l \in \mathbb{N}\big) = \bigcup K_l$, K est une extension purement inséparable de $F(t)$ et soit ν l'unique extension à K de la valuation t-adique ν_t. Alors nous pouvons montrer que le groupe des ordres de la valuation ν sur K est égal à $\Gamma_\nu = (1/p^\infty)\mathbb{Z} = \bigcup_{l\in\mathbb{N}} 1/p^l\mathbb{Z}$ et que le corps résiduel est égal à $\kappa_\nu = F$.

Nous considérons l'extension $L = K(\theta)$ de K engendrée par la racine θ du polynôme d'Artin-Schreier $G(X) = X^p - X - 1/t$, L est une extension séparable de K de degré p. Nous cherchons a trouver les valuations μ de L qui prolongent la valuation ν de K, c'est à dire nous recherchons les pseudo-valuations $\tilde{\mu}$ de $K[x]$ qui prolongent ν dont le socle est l'idéal premier engendré par le polynôme $G(x)$. Pour cela nous suivons la procédure décrite par S. MacLane dans [McL 2]: il s'agit de trouver par récurrence les suites de valuations augmentées itérées $\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ vérifiant que pour chaque valuation $\mu_{\alpha-1}$ le polynôme-clé ϕ_α est un $\mu_{\alpha-1}$-diviseur du polynôme G et la valeur γ_α est choisie de façon à ce que $\mu_\alpha(G)$ puisse être strictement inférieure à $\mu_{\alpha+1}(G)$ si $\mu_\alpha \neq \tilde{\mu}$. Plus précisémment, si G admet pour développement selon les puissances de ϕ_α, $G = g_m\phi_\alpha^m + \ldots + g_0$, il faut que la valeur $\mu_\alpha(G) = \inf\big\{\, \mu_{\alpha-1}(g_j) + j\gamma_\alpha \mid 0 \leq j \leq m \,\big\}$ soit atteinte pour au moins deux monômes.

La première valuation augmentée μ_1 que nous devons trouver est une valuation de la forme $\mu_1 = [\mu\ ;\ \mu_1(\phi_1) = \gamma_1]$, où ϕ_1 est le polynôme $\phi_1 = X$, et où γ_1 est un élément γ dans $\Gamma_\nu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ tel que la borne inférieure de $\{p\gamma, \gamma, -1\}$ soit atteinte au moins deux fois. Par conséquent la seule valeur possible est $\gamma_1 = -1/p$, nous avons alors $\mu_1(G) = -1$ et G est μ_1-équivalent à $X^p - t^{-1}$. En particulier G n'est pas μ_1-irréductible dans $K[X]$, il admet la factorisation suivante: $G \underset{\mu_1}{\sim} \big(X - t^{-1/p}\big)^p$.

Nous posons $\phi_2 = X - t^{-1/p}$, alors ϕ_2 est l'unique polynôme-clé pour la valuation μ_1 qui μ_1-divise G et le polynôme G admet le développement selon les puissances de ϕ_2 suivant: $G = \phi_2^p - \phi_2 - t^{-1/p}$. La deuxième valuation augmentée cherchée μ_2 est alors de la forme $\mu_2 = [\mu_1\ ;\ \mu_2(\phi_2) = \gamma_2]$, où comme précédemment γ_2 est choisi tel que la borne inférieure de $\{p\gamma_2, \gamma_2, -1/p\}$ soit atteinte au moins deux fois, d'où la seule valeur possible $\gamma_2 = -1/p^2$. Nous trouvons $\mu_2(G) = -1/p$ et G est μ_2-équivalent à $\phi_2^p - t^{-1/p}$, c'est à dire à $\big(\phi_2 - t^{-1/p^2}\big)^p = \big(X - t^{-1/p} - t^{-1/p^2}\big)^p$.

Nous pouvons ainsi construire par récurrence une famille de valuations augmentées itérées $\big(\mu_l\big)_{l\in\mathbb{N}}$ de la forme $\mu_l = [\mu_{l-1}\ ;\ \mu_l(\phi_l) = \gamma_l]$, avec $\phi_l = \phi_{l-1} - t^{-1/p^{l-1}}$, c'est à dire $\phi_l = X - t^{-1/p} - \ldots - t^{-1/p^{l-1}}$, et $\gamma_l = -1/p^l$. Pour chaque valuation μ_{l-1}, le polynôme G admet comme décomposition en facteurs μ_{l-1}-irréductibles $G \underset{\mu_{l-1}}{\sim} \phi_l^p$, d'où l'unicité du choix du polynôme-clé ϕ_l, et la valeur γ_l est la seule valeur possible pour définir μ_l.

Nous allons montrer que pour toute pseudo-valuation $\tilde{\mu}$ avec $\tilde{\mu}(G) = +\infty$ qui prolonge ν, l'ensemble $\Lambda(\mu_1) = \big\{\tilde{\mu}(\phi) \mid \phi \in \Phi(\mu_1)\big\}$ n'a pas de plus grand élément. Supposons que $\Lambda(\mu_1)$ a un plus grand élément λ, alors λ est aussi le plus grand élément de chacun des ensembles $\Lambda(\mu_n)$, et soit ψ dans $\Phi(\mu_1)$ vérifiant $\tilde{\mu}(\psi) = \lambda$, alors ψ est un polynôme unitaire de degré un, $\psi = x - h$ avec h dans K et $\nu(h) = \gamma_1 = -p^{-1}$, et vérifiant $\tilde{\mu}(\psi) = \lambda > \mu_n(\psi) = \gamma_n$ pour tout n; nous en déduisons en particulier $\lambda \geq 0$. Nous pouvons écrire $G = \psi^p - \psi + (h^p - h - t^{-1})$, et il faut que la valeur minimale de $\{p\lambda, \lambda, \nu(h^p - h - t^{-1})\}$ soit atteinte au moins deux fois. Comme $\lambda \geq 0$, nous en déduisons que nous devrions avoir $\nu(h^p - h - t^{-1}) \geq 0$, et nous allons montrer que c'est impossible.

Il existe j tel que h appartienne au corps $F\big(t^{1/p^j}\big)$, et nous pouvons supposer $j \geq 3$. Alors nous pouvons écrire $h = u^s\big(h_0 + h_1u + \ldots + h_lu^l + \ldots\big)$, où nous avons posé $s = \mathrm{ord}_u(h)$, d'où $s = -p^{j-1}$.

Nous avons:

$$\begin{aligned}
&h^p - h - t^{-1} \\
&\quad = u^{ps}\big(h_0^p + \ldots h_l^p u^{pl} + \ldots\big) - u^s\big(h_0 + \ldots + h_l u^l + \ldots\big) - u^{-p^j} \\
&\quad = \big(h_0^p - 1\big)u^{ps} + h_1^p u^{ps+p} + \ldots + h_{l_0-1}^p u^{s-p} + \big(h_{l_0}^p - h_0\big)u^s - h_1 u^{s+1} - \ldots \\
&\qquad\quad - h_{p-1}u^{s+p-1} + \big(h_{l_0+1}^p - h_p\big)u^{s+p} - \ldots - h_{-s-1}u^{-1} + \big(h_{-s}^p - h_{-s}\big) + \ldots
\end{aligned}$$

avec $ps + pl_0 = s$, c'est-à-dire $l_0 = p^{j-2}(p-1)$.
Par conséquent, si nous avions l'inégalité $\nu(h^p - h - t^{-1}) \geq 0$, nous devrions avoir les relations suivantes:

$$\begin{aligned}
&h_\alpha = 0 \quad \text{pour } (p,\alpha) = 1 \text{ et } 1 \leq \alpha < -s, \\
&h_\alpha = 0 \quad \text{pour } 1 \leq \alpha < l_0, \\
&h_{l_0+\beta}^p = h_{p\beta} \quad \text{pour } 0 \leq \beta < -s/p \quad \text{et} \quad h_0 = 1.
\end{aligned}$$

Nous déduisons par récurrence de la dernière relation que nous devons avoir $h_{p^{j-1}-p^{j-r}} = 1$, pour $1 \leq r \leq j$, ce qui contredit la relation $h_\alpha = 0$ pour $\alpha = -s-1 = p^{j-1} - 1$.
Nous nous trouvons donc dans la situation où nous avons une famille infinie de valuations augmentées itérées associée à une famille de polynômes-clés $\big(\phi_l\big)_{l\in\mathbb{N}}$ de même degré $d = 1$. Comme la valuation limite $\lim_l \mu_l$ est une vraie valuation et ne peut être égale à une pseudo-valuation $\tilde{\mu}$ avec $\tilde{\mu}(G) = +\infty$, nous devons trouver un polynôme-clé limite ϕ' pour la famille $\big(\mu_l\big)_{l\in\mathbb{N}}$.
Supposons qu'il existe un polynôme-clé limite ϕ' de degré $n < p$, alors d'après le théorème 1.19 il existe δ dans Γ_ν et un entier r, $1 \leq r \leq n$, et l_o tels que pour tout $l \geq l_o$ nous ayons $\mu_l(\phi') = \delta + r\gamma_l$. Alors, si $G = a_m{\phi'}^m + \ldots + a_0$ est le développement de G selon les puissances de ϕ', nous avons $\deg a_j < \deg\phi'$, et il existe l_1 tel que pour tout j, $0 \leq j \leq m$, $\mu_l(a_j) = \mu_{l_1}(a_j) = \alpha_j$ pour $l \geq l_1$. Ainsi pour tout $l \geq \sup(l_0, l_1)$, nous trouvons $\mu_l(G) \geq \inf\big(\mu_l(a_j{\phi'}^j)\big)$, c'est à dire $\mu_l(G) \geq \inf\big(\alpha_j + j(\delta + r\gamma_l)\big)$. Comme la famille $\big(\gamma_l\big)_{l\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, pour l suffisamment grand la borne inférieure est atteinte pour une seule valeur, par conséquent il existe j, $0 \leq j \leq m$ tel que pour tout l suffisamment grand $\mu_l(G) = \alpha_j + j\delta + jr\gamma_l$. Nous en déduisons $jr = p$, car $\mu_l(G) = p\gamma_l$ pour tout l, ce qui est impossible car $r \leq n < p$ et $j \leq m < p$.
Par conséquent il n'existe pas de polynôme ϕ' de $K[X]$ de degré $n < p$, vérifiant $\mu_l(\phi') < \mu_{l+1}(\phi')$ pour tout l dans $\mathbb{N}$. D'après la proposition 1.21 le polynôme G est un polynôme-clé limite pour la famille $\big(\mu_l\big)_{l\in\mathbb{N}}$ et nous pouvons définir la pseudo-valuation augmentée limite $\tilde{\mu} = \big[(\mu_l)_{l\in\mathbb{N}}\ ;\ \tilde{\mu}(G) = +\infty\big]$. La valuation μ de $L = K[X]/G$ associée à la pseudo-valuation $\tilde{\mu}$ est alors l'unique prolongement à L de la valuation ν de K.

L'extension $(L,\mu)/(K,\nu)$ est étudiée par F.-V. Kuhlmann dans [Ku], exemple 12, et nous pouvons remarquer que les différents éléments $\vartheta_l = \sum_{i=1}^{l} t^{-1/p^i}$ qui apparaissent dans sa construction correspondent aux polynômes-clés ϕ_l que nous avons introduits.

References

[A-M] S.S. Abhyankar, T. Moh: Newton-Puiseux expension and generalized Tschirnhausen transformation. J. reine angew. Math. **260** (1973), 47-83, **261** (1973), 29-54.

[Ka] I. Kaplansky: Maximal fields with valuations. Duke Math. J. **9** (1942), 303-321.

[Ku] F.-V. Kuhlmann: Valuation theoric and model theoric aspects of local uniformization, dans *Resolution of Singularities*, Progr. in math. 181, 2000.

[McL 1] S. MacLane: A construction for absolute values in polynomial rings. Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 363-395.

[McL 2] S. MacLane: A construction for prime ideals as absolute values of an algebraic field. Duke Math. J. **2** (1936), 492-510.

[Po] P. Popescu-Pampu: Approximate roots, dans *Valuation theory and its applications, Volume II*, Fields Institute Comm. 33, 2003.

[Sp] M. Spivakovsky Resolution of singularities I: local uniformization, prépublication 1996.

[Te] B. Teissier: Valuations, deformations and toric geometry, dans *Valuation theory and its applications, Volume II*, Fields Institute Comm. 33, 2003.

[Va] M. Vaquié: Valuations, dans *Resolution of Singularities*, Progr. in math. 181, 2000.

Michel Vaquié
Laboratoire Émile Picard, UMR 5580,
Université Paul Sabatier, UFR MIG
118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 4 , France
email: vaquie@picard.ups-tlse.fr