Famille admissible de valuations et défaut d'une extension *

Michel Vaquié
Laboratoire Emile Picard, UMR CNRS 5580
Université Paul Sabatier, Toulouse
France
vaquie@math.ups-tlse.fr

Abstract

A toute valuation ou pseudo-valuation μ de l'anneau des polynômes $K[x]$ prolongeant une valuation ν de K donnée, nous savons associer une famille de valuations de $K[x]$, appelée famille admissible, construite de façon explicite à partir de valuations augmentées et de valuations augmentées limites.

Nous définissons le saut total $s^{tot}(\mathcal{A})$ d'une famille admissible, c'est un nombre rationnel que nous calculons à partir des degrés des polynômes-clés et polynômes-clés limites définissant les valuations de la famille $\mathcal{A}$.

Dans le cas où L est une extension monogène finie de K, $L = K(\theta)$, pour toute valuation μ de L prolongeant ν, nous relions le saut de la famille admissible $\mathcal{A}$ associée à μ à l'indice de ramification $e(\mu/\nu)$ et au degré résiduel $f(\mu/\nu)$. Plus précisément nous avons l'égalité:

$$[L : K] = e(\mu/\nu) f(\mu/\nu) s^{tot}(\mathcal{A}) .$$

En particulier si μ est l'unique prolongement de ν à L, le saut total de la famille $\mathcal{A}$ permet de calculer le défaut de l'extension $(L, \mu)/(K, \nu)$.

Introduction

Soit K un corps muni d'une valuation ν, alors pour toute extension algébrique finie L de K et pour toute valuation μ de L qui prolonge ν nous définissons le degré résiduel $e(\mu/\nu)$ et l'indice de ramification $f(\mu/\nu)$. Nous avons alors l'inégalité fondamentale

$$\sum_{i=1}^{g} e(\mu_i/\nu) f(\mu_i/\nu) \ \leq \ [L : K] \ ,$$

où $[L : K]$ est le degré de l'extension L/K et où $\mu_1, \ldots, \mu_g$ sont toutes les valuations de L qui prolongent la valuation ν.

Pour toute valuation μ de L qui prolonge ν, nous définissons un nombre $d(\mu/\nu)$, le *défaut de L/K en μ* ou le *défaut de* $(L, \mu)/(K, \nu)$ tel que nous avons l'égalité suivante:

$$\sum_{i=1}^{g} e(\mu_i/\nu) f(\mu_i/\nu) d(\mu_i/\nu) \ = \ [L : K] \ .$$

Nous savons que ce défaut $d(\mu/\nu)$ est un nombre entier positif, égal à une puissance p^a de la caractéristique p du corps résiduel κ_ν de la valuation ν. En particulier si le corps κ_ν est de

*2000 Mathematics Subject Classification: 13A18 (12J10 14E15) caractéristique nulle toute extension finie L de K n'a pas de défaut. Nous savons aussi que si la valuation ν est discrète de rang 1 toute extension finie L de K n'a pas de défaut. Nous pouvons aussi définir le *défaut* de l'extension L/K du corps valué (K, ν) comme le quotient

$$d(L/K, \nu) \ = \ [L : K] / \Big(\sum_{i=1}^{g} e(\mu_i/\nu) f(\mu_i/\nu) \Big) \ .$$

Dans le cas où la valuation μ est l'unique prolongement de ν à l'extension L nous avons alors $d(L/K, \nu) = d(\mu/\nu)$.

Nous supposons que l'extension finie L/K est monogène, c'est-à-dire L est engendré par un unique élément θ sur K, $L = K(\theta)$, et nous pouvons écrire L comme le quotient de l'anneau des polynômes à une variable $K[x]$ par l'idéal engendré par le polynôme minimal P de θ sur K, $L = K[x]/(P)$. Alors toute valuation μ de L qui prolonge la valuation ν de K est associée à une pseudo-valuation ζ de l'anneau des polynômes $K[x]$, de noyau $\mathcal{S}(\zeta)$ égal à l'idéal (P), dont la restriction à K est égale à la valuation ν.

Nous appelons $\mathcal{E}(K[x], \nu)$ l'ensemble des valuations ou pseudo-valuations ζ de $K[x]$, dont la restriction à K est égale à la valuation ν. Pour chaque ζ appartenant à $\mathcal{E}(K[x], \nu)$, nous pouvons définir une famille de valuations de $K[x]$, $\mathcal{A}(\zeta) = \big(\mu_i\big)_{i \in I}$, qui est une *famille admissible* de valuations de $K[x]$, c'est-à-dire une famille construite de façon explicite, à partir de *valuations augmentées* et de *valuations augmentées limites*(cf. [Va 1], [Va 2]).

Il existe une correspondance essentiellement bijective entre l'ensemble des valuations ou pseudo-valuations ζ appartenant à $\mathcal{E}(K[x], \nu)$ et un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{F}(K[x], \nu)$ des familles admissibles de valuations de $K[x]$ dont la restriction à K est égale à ν. Cette correspondance permet de déterminer en particulier toutes les valuations ou pseudo-valuation ζ de $\mathcal{E}(K[x], \nu)$.

Toute famille de valuations $\mathcal{A}$ appartenant à $\mathcal{F}(K[x], \nu)$ est obtenue comme réunion de sous familles $\mathcal{A} = \mathcal{S}^{(1)} \cup \ldots \cup \mathcal{S}^{(N)}$ appelées familles *admissibles simples.* Nous pouvons associer à la famille $\mathcal{A}$ des nombres rationnels $s^{(j)}(\mathcal{A})$, pour $j = 1, \ldots, N-1$, avec $s^{(j)} > 1$, appelés les *sauts* de la famille, ainsi que le nombre

$$s^{tot}(\mathcal{A}) \ = \ \prod_{j=2}^{N} s^{(j-1)}(\mathcal{A}) \ ,$$

appelé le *saut total* de la famille admissible $\mathcal{A}$.

Nous avons alors le résultat suivant qui relie le défaut d'une extension de corps valués au saut total de la famille admissible associée.

Théorème 0.1. *Soit L une extension monogène finie de K et soit μ une valuation de L qui prolonge la valuation ν de K. Si nous appelons ζ la pseudo-valuation appartenant à $\mathcal{E}(K[x], \nu)$ définie par la valuation μ de L et $\mathcal{A}(\mu)$ la famille admissible de $\mathcal{F}(K[x], \nu)$ associée à ζ nous avons l'égalité suivante*

$$[L : K] \ = \ e(\mu/\nu) f(\mu/\nu) s^{tot}\big(\mathcal{A}(\mu)\big) \ .$$

Dans le cas où la valuation μ est l'unique prolongement de ν à l'extension L, c'est en particulier le cas si (K, ν) est un corps valué hensélien, nous en déduisons que le défaut de l'extension L/K en ν est égal au saut total de la famille admissible $\mathcal{A}$. Cette extension est sans défaut si le saut total est trivial, c'est-à-dire pour $s^{tot}(\mathcal{A}) = 1$. Plus généralement, le saut total est trivial si et seulement si μ est l'unique prolongement de ν et si le défaut de l'extension $(L, \mu)/(K, \nu)$ est trivial.

Par construction, nous avons tous les sauts $s^{(j)}$, $1 \leq j \leq N-1$, qui vérifient l'inégalité stricte $s^{(j)} > 1$, par conséquent le saut total ne peut être trivial que dans la cas où la famille admissible $\mathcal{A}$ est constituée d'une seule famille admissible simple, $N = 1$. L'existence de plusieurs sous-familles admissibles simples est liée à l'existence de sous-familles appelées des sous-familles *admissibles continues.* Celles-ci peuvent être considérées comme des généralisation des familles pseudo-convergentes introduites par Kaplansky ([Ka 1], [Ka 2]).

Nous rappelons qu'une extension non triviale $(L,\mu)/(K,\nu)$ est dite *immédiate* si l'indice de ramification $e(\mu/\nu)$ et le degré résiduel $f(\mu/\nu)$ sont tous les deux égaux à 1. Kaplansky a montré que l'existence d'une extension immédiate est liée à l'existence d'une famille pseudo-convergente d'éléments du corps valué (K,ν). Cela correspond au cas où le saut total $s^{tot}(\mathcal{A})$ est égal au degré $[L:K]$ de l'extension. Dans le cas général, c'est-à-dire si le saut $s^{tot}(\mathcal{A})$ est strictement plus grand que 1 mais non nécessairement égal au degré $[L:K]$, il existe une famille de polynômes dans $K[x]$ qui définit la sous-famille admissible continue. Nous appelons de telles familles des *familles pseudo-convergentes* de polynômes de $K[x]$, celles-ci peuvent être considérées comme des généralisations des familles pseudo-convergentes définie par Kaplansky. En effet si à une famille pseudo-convergente (a_α) dans K définie par Kaplansky nous associons la famille de polynômes unitaires de degré 1 $\left(\phi_\alpha\right)$, avec $\phi_\alpha = x - a_\alpha$, nous obtenons une famille pseudo-convergente dans $K[x]$ (cf. [Va 6]).

Pour finir, de même qu'une extension non triviale $(L,\mu)/(K,\nu)$ peut être immédiate et sans défaut car μ n'est pas l'unique prolongement de la valuation ν à l'extension L, c'est en particulier le cas si L est le corps de décomposition d'une extension finie séparable de (K,ν), nous pouvons obtenir des extensions $(L,\mu)/(K,\nu)$ sans défaut mais avec un saut non trivial. Dans ce cas l'existence de sous-familles pseudo-convergentes de la famille admissible $\mathcal{A}$ est encore dûe à l'existence de plusieurs extensions possibles de la valuation ν.

1 Défaut d'une extension

Dans cette partie nous allons rappeler des résultats bien connus concernant les valuations et plus précisément les prolongements d'une valuation ν d'un corps K à une extension algébrique L de K. Nous rappelons qu'une valuation μ de L est appelée un prolongement de ν si la restriction de μ à K est égale à ν, nous disons que (L,μ) est une extension du corps valué (K,ν) et nous notons $(L,\mu)/(K,\nu)$. Nous renvoyons aux livres de O. Endler ([En]) et de P. Ribenboim ([Ri]), ainsi qu'aux articles de F.-V. Kuhlmann ([Ku]) et de l'auteur ([Va 4]) pour des résultats plus précis et pour les démonstrations.

Soit K un corps muni d'une valuation ν, nous appelons Γ_ν le groupe des valeurs de la valuation, c'est-à-dire $\Gamma_\nu = \nu(K^*)$, et κ_ν le corps résiduel, c'est le corps résiduel de l'anneau de valuation V_ν associé à la valuation ν.

Si L est une extension de K et si μ est une valuation de L qui prolonge ν, le groupe des valeurs Γ_ν est un sous-groupe ordonné du groupe des valeurs Γ_μ de la valuation μ. De plus, comme l'anneau de valuation V_μ associé à la valuation μ domine l'anneau de valuation V_ν, le corps résiduel κ_μ est un extension du corps résiduel κ_ν.

Définition 1.1. *1. L'*indice de ramification *de μ par rapport à ν est égal à l'indice du groupe des ordres Γ_ν dans Γ_μ:*

$$e(\mu/\nu) = \left[\Gamma_\mu : \Gamma_\nu\right] .$$

2. Le degré résiduel *de μ par rapport à ν est égal au degré de l'extension du corps résiduels κ_ν dans le corps κ_μ:*

$$f(\mu/\nu) = \left[\kappa_\mu : \kappa_\nu\right] .$$

L'indice de ramification $e(\mu/\nu)$ et le degré résiduel $f(\mu/\nu)$ sont des éléments de $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Nous avons alors l'inégalité suivante

$$e(\mu/\nu) f(\mu/\nu) \ \leq \ [L:K] ,$$

où $[L:K]$ est le degré de l'extension L/K. Nous en déduisons en particulier que si L/K est une extension finie, l'indice de ramification $e(\mu/\nu)$ et le degré résiduel $f(\mu/\nu)$ sont finis.

Nous rappelons que l'extension $(L,\mu)/(K,\nu)$ de corps valués est dite *immédiate* si l'indice de ramification et le degré résiduel sont triviaux, c'est-à-dire pour

$$e(\mu/\nu) \ = \ f(\mu/\nu) \ = \ 1 .$$

Un corps valué (E, ζ) est *hensélien* si pour toute extension algébrique F/E il existe une unique valuation ω de F qui prolonge la valuation ζ.

Définition 1.2. *Une extension $(\tilde{K}, \tilde{\nu})/(K, \nu)$ est appelée une* hensélisation *du corps valué (K, ν) si $(\tilde{K}, \tilde{\nu})$ est hensélien et si pour tout corps valué hensélien (E, ζ) et toute immersion $\lambda : (K, \nu) \to (E, \zeta)$ il existe une immersion et une seule $\tilde{\lambda} : (\tilde{K}, \tilde{\nu}) \to (E, \zeta)$ qui prolonge λ.*

Pour tout corps valué (K, ν) il existe une hensélisation, de plus nous déduisons de la définition que toutes les hensélisation de (K, ν) sont des corps valués isomorphes et nous pouvons les voir comme les plus petites extensions henséliennes de (K, ν). Nous vérifions aussi qu'une hensélisation $(\tilde{K}, \tilde{\nu})/(K, \nu)$ est une extension immédiate.

Nous pouvons décrire une hensélisation de (K, ν) de la manière suivante. Soit K^{sep} une clôture séparable de K et soit ν^{s} une extension de ν à K^{sep}. Le *groupe de décomposition* de l'extension K^{sep}/K en la valuation ν^{s} est le sous-groupe $G^{\mathrm{dec}}(\nu^{\mathrm{s}})$ du groupe de Galois $G_K = Gal(K^{\mathrm{sep}}/K)$ qui laisse fixe ν^{s},

$$G^{\mathrm{dec}}(\nu^{\mathrm{s}}) \ = \ \left\{\sigma \in G_K \mid \nu^{\mathrm{s}} \circ \sigma = \nu^{\mathrm{s}}\right\} .$$

Alors le *corps de décomposition* $K^{\mathrm{dec}}(\nu^{\mathrm{s}})$, qui est par définition le corps fixé par le groupe $G^{\mathrm{dec}}(\nu^{\mathrm{s}})$, est une hensélisation de (K, ν). Nous voyons en particulier que si nous choisissons une autre valuation ν^{s} de la clôture séparable K^{sep} de K qui prolonge ν nous pouvons trouver une hensélisation différente de (K, ν) incluse dans K^{sep} (cf. [Ku]).

Dans la suite nous nous donnons un corps algébriquement clos Ω contenant K et toutes les extensions de K que nous considérons sont incluses dans ce corps Ω. En particulier nous considérons la clôture algébrique K^{alg} et la clôture séparable K^{sep} de K dans Ω. Nous avons vu que si nous choisissons une valuation ν^{s} de K^{sep} qui prolonge ν nous pouvons définir une hensélisation $(\tilde{K}, \tilde{\nu})$ de (K, ν) telle que $\tilde{\nu}$ est la restriction de ν^{s} à $\tilde{K}$. Réciproquement si nous choisissons une hensélisation $(\tilde{K}, \tilde{\nu})$ de (K, ν) incluse dans K^{sep} il existe une unique valuation ν^{s} de K^{sep} qui prolonge $\tilde{\nu}$, ainsi qu'une unique valuation ν^{a} de K^{alg} qui prolonge $\tilde{\nu}$. Dans la suite nous choisissons une telle hensélisation que nous appelons l'*hensélisé* de (K, ν) et nous la notons $(K^{\mathrm{h}}, \nu^{\mathrm{h}})$.

Lemme 1.3. ([Ku]) *Soit L/K un extension algébrique, alors l'extension composée $L.K^{\mathrm{h}}$ de L et de l'hensélisé K^{h} dans K^{alg} est une hensélisation de (L, μ) où μ est la valuation de L obtenue comme restriction de la valuation ν^{a}.*

Rappelons le résultat bien connu suivant. Soient L une extension algébrique de K et soit $\mathrm{Mon}(L, K)$ l'ensemble des monomorphismes de L dans K^{alg} au dessus de K, en particulier le cardinal de cet ensemble est égal au degré séparable de l'extensionL/K, $\#\mathrm{Mon}(L, K) = [L : K]_{\mathrm{sep}}$. Soit K' une autre extension algébrique de K et nous définissons la relation d'équivalence $\underset{K'}{\sim}$ sur $\mathrm{Mon}(L, K)$ par

$$\lambda \underset{K'}{\sim} \lambda' \iff \exists \sigma \in Gal(K^{\mathrm{alg}}/K') \text{ tel que } \lambda' = \sigma \circ \lambda .$$

Alors, si $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ est un ensemble de représentants de l'ensemble quotient $\mathrm{Mon}(L, K)/\underset{K'}{\sim}$, nous avons l'égalité:

$$[L : K]_{\mathrm{sep}} \ = \ \sum_{i=1}^{r} [\lambda_i L.K' : K']_{\mathrm{sep}} \ .$$

Nous considérons de nouveau une valuation ν sur le corps K et nous choisissons ν^{s} un prolongement de la valuation ν à la clôture séparable K^{sep} de K. Soit L une extension séparable finie de K et nous notons $\mathcal{E}(L, \nu)$ l'ensemble des valuations μ de L qui prolongent ν.

Tout morphisme λ appartenant à $\mathrm{Mon}(L, K)$ a son image dans K^{sep} et définit une valuation μ sur L égale à $\nu^{\mathrm{s}} \circ \lambda$ qui est un prolongement de la valuation ν. En particulier pour λ égale à l'immersion naturelle de L dans K^{sep} nous trouvons la valuation μ obtenue comme restriction de ν^{s} à L.

Lemme 1.4. *L'application*

$$\begin{array}{cccc} \mathfrak{V} : & \mathrm{Mon}(L, K) & \longrightarrow & \mathcal{E}(L, \nu) \\ & \lambda & \longrightarrow & \nu^{\mathrm{s}} \circ \lambda \end{array}$$

est surjective et nous avons $\mathfrak{V}(\lambda) = \mathfrak{V}(\lambda')$ *si et seulement si* $\lambda \underset{K^{\mathrm{h}}}{\sim} \lambda'$.

Nous appelons $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_g$ les valuations de L qui prolongent la valuation ν de K et pour tout $i = 1, 2, \ldots, g$ nous choisissons une valuation ν_i^{s} de la clôture séparable K^{sep} dont la restriction à L est égale à la valuation μ_i, et nous pouvons supposer que nous avons l'égalité $\nu^{\mathrm{s}} = \nu_1^{\mathrm{s}}$.

Chaque valuation ν_i^{s} de K^{sep} permet de définir une hensélisation du corps valué (K, ν) que nous notons $(K_i^{\mathrm{h}}, \nu_i^{\mathrm{h}})$, et l'extension composée $L.K_i^{\mathrm{h}}$ est alors une hensélisation du corps valué (L, μ_i) que nous notons $(L_i^{\mathrm{h}}, \mu_i^{\mathrm{h}})$. Nous déduisons alors de ce qui précède le résultat suivant.

Proposition 1.5. *Nous avons l'égalité:*

$$[L : K] \ = \ \sum_{i=1}^{g} \, [L_i^{\mathrm{h}} : K_i^{\mathrm{h}}] \ .$$

Nous pouvons alors définir le défaut de l'extension L/K en la valuation μ_i.

Définition 1.6. *Soit L/K une extension algébrique finie séparable et soit ν une valuation de K, alors pour toute valuation μ_i de L qui prolonge ν nous appelons* défaut de l'extension L/K en μ_i *le nombre*

$$d(\mu_i/\nu) \ = \ [L_i^{\mathrm{h}} : K_i^{\mathrm{h}}] / \big(e(\mu_i^{\mathrm{h}}/\nu_i^{\mathrm{h}}) f(\mu_i^{\mathrm{h}}/\nu_i^{\mathrm{h}}) \big) \ .$$

Un thórème d'Ostrowski nous dit que ce nombre est un entier positif de la forme $d(\mu_i/\nu) = p^a$, où p est la caractéristique du corps résiduel κ_ν de la valuation ν.

Comme les extensions $(L_i^{\mathrm{h}}, \mu_i^{\mathrm{h}})/(L, \mu_i)$ et $(K_i^{\mathrm{h}}, \nu_i^{\mathrm{h}})/(K, \nu)$ sont immédiates les indices de ramifications $e(\mu_i^{\mathrm{h}}/\nu_i^{\mathrm{h}})$ et les degrés résiduels $f(\mu_i^{\mathrm{h}}/\nu_i^{\mathrm{h}})$ sont respectivement égaux aux indices de ramifications et aux degré résiduels des extensions $(L, \mu_i)/(K, \nu)$. Nous déduisons alors de la proposition 1.5 le résultat suivant.

Proposition 1.7. *Soit L/K une extension algébrique finie séparable et soient ν une valuation de K et $\mu_1, \ldots, \mu_g$ les valuations de L qui prolongent ν. Nous avons alors l'égalité:*

$$[L : K] \ = \ \sum_{i=1}^{g} \ e(\mu_i/\nu) f(\mu_i/\nu) d(\mu_i/\nu) \ .$$

Nous pouvons définir le *défaut global* de l'extension L/K en la valuation ν de K comme le quotient

$$d(L/K, \nu) \ = \ [L : K] \ / \ \Big(\sum_{i=1}^{g} \ e(\mu_i/\nu) f(\mu_i/\nu) \Big) \ ,$$

et comme les défauts $d(\mu_i/\nu)$ sont positifs, le défaut global vérifie encore $d(L/K, \nu) \geq 1$. Si la valuation ν admet un seul prolongement μ à l'extension L de K, le défaut global de L/K en ν est égal au défaut de L/K en μ, en particulier le défaut $d(\mu_i/\nu)$ de L/K en μ_i est égal au défaut global de l'extension des hensélisés $L_i^{\mathrm{h}}/K_i^{\mathrm{h}}$.

Nous disons que l'extension L/K est *sans défaut* en μ_i si le défaut est trivial, $d(\mu_i/\nu) = 1$, de même nous disons que l'extension L/K est *sans défaut* en ν si le défaut global est trivial, $d(L/K, \nu) = 1$. C'est le cas si et seulement si l'extension est sans défaut en chacune des valuations μ_i de L qui prolongent ν.

Si l'extension L/K est normale les indices de ramifications $e(\mu_i/\nu)$, les degrés résiduels $f(\mu_i/\nu)$ et les défauts $d(\mu_i/\nu)$ ne dépendent pas du prolongement μ_i de la valuation ν. Nous en déduisons que le défaut global $d(L/K, \nu)$ est égal à $d(\mu_i/\nu)$, en particulier il est encore égal à une puissance p^a de la caractéristique p du corps résiduel κ_ν, mais dans le cas d'une extension quelconque nous ne pouvons rien dire sur le défaut global.

2 Sauts d'une famille admissible

Nous allons rappeler les résultats concernant les familles admissibles de valuations, nous renvoyons le lecteur aux articles de l'auteur, plus précisément à [Va 1], [Va 2], [Va 3] et [Va 6] pour des définitions précises et pour des résultats plus complets.

Nous considérons un corps K muni d'une valuation ν et nous choisissons un plongement du groupe des valeurs Γ_ν dans un groupe totalement ordonné Γ. Toutes les valeurs γ que nous considèrerons seront alors dans Γ.

Nous appelons $\mathcal{E} = \mathcal{E}(K[x], \nu)$ l'ensemble des valuations ou pseudo-valuations de l'anneau des polynômes $K[x]$ dont la restriction à K est égale à ν, et nous appelons $\mathcal{F} = \mathcal{F}(K[x], \nu)$ l'ensemble des *familles admissibles* de valuations de $K[x]$ appartenant à $\mathcal{E}$.

Nous rappelons qu'une pseudo-valuation ζ de $K[x]$ est une application ζ de $K[x]$ à valeurs dans $\Gamma \cup \{\infty\}$ vérifiant les propriétés

$$\zeta(fg) = \zeta(f) + \zeta(g) \quad \text{et} \quad \zeta(f+g) \geq \inf\bigl(\zeta(f), \zeta(g)\bigr) \ ,$$

mais pouvant prendre la valeur ∞ pour des éléments $f \neq 0$. L'ensemble

$$\mathcal{S}(\zeta) \ = \ \{f \in K[x] \mid \zeta(f) = \infty\}$$

est appelé le *noyau* de la pseudo-valuation ζ, c'est un idéal premier de $K[x]$, en particulier si $\mathcal{S}(\zeta)$ est non réduit à (0), c'est-à-dire si ζ n'est pas une valuation, il est engendré par un polynôme irréductible unitaire P. La pseudo-valuation ζ définit alors une valuation μ du corps $L = K[x]/(P)$ et nous avons une bijection entre l'ensemble des pseudo-valuations ζ de $\mathcal{E}(K[x], \nu)$ dont le noyau est égal à l'idéal (P) et l'ensemble $\mathcal{E}(L, \nu)$ des valuations du corps L qui prolongent la valuation ν.

À toute valuation ou pseudo-valuation μ de $\mathcal{E}$ nous pouvons associer une famille *admise* $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{F}$, que nous notons $\mathcal{A}(\mu)$, nous rappelons que cette famille n'est pas unique mais définie à équivalence près. La famille $\mathcal{A}$ est une famille admissible, c'est-à-dire est réunion de familles *admissibles simples* $\mathcal{S}^{(j)}$, pour j parcourant J, avec $J = \{1, \ldots, N\}$ ou $J = \mathbb{N}^*$, chaque famille simple $\mathcal{S}^{(j)}$étant constituée d'une partie *discrète* $\mathcal{D}^{(j)}$ et d'une partie *continue* $\mathcal{C}^{(j)}$, la dernière famille continue $\mathcal{C}^{(N)}$ pouvant être éventuellement vide.

Nous pouvons écrire la famille $\mathcal{A}$ sous la forme $\mathcal{A} = \bigl(\mu_l\bigr)_{l \in I}$, où I est un ensemble totalement ordonné, chaque valuation μ_l étant définie soit comme *valuation augmentée*, soit comme *valuation augmentée limite*. Dans le premier cas nous avons

$$\mu_l \ = \ [\mu_{l-1} \ ; \ \mu_l(\phi_l) = \gamma_l] \ ,$$

et ϕ_l est un *polynôme-clé* définissant la valuation μ_l à partir de la valuation μ_{l-1}, et dans le deuxième cas nous avons

$$\mu_l \ = \ \bigl[\bigl(\mu_\alpha\bigr)_{\alpha \in A} \ ; \ \mu_l(\phi_l) = \gamma_l \ \bigr] \ ,$$

et ϕ_l est un *polynôme-clé limite* définissant la valuation μ_l à partir de la famille continue $\bigl(\mu_\alpha\bigr)_{\alpha \in A}$.

Nous notons respectivement $\bigl(\phi_l\bigr)_{l \in I}$ et $\bigl(\gamma_l\bigr)_{l \in I}$ les familles de polynômes et de valeurs associées à la famille de valuations $\mathcal{A}$. Nous disons que la famille $\mathcal{A}$ est *complète* si l'ensemble I possède un plus grand élément $\bar{l}$, dans ce cas la valuation ou la pseudo-valuation μ est la valuation $\mu_{\bar{l}}$, sinon nous disons que la famille $\mathcal{A}$ est *ouverte*.

Si la famille $\mathcal{A}$ est associée à une pseudo-valuation ζ de noyau $\mathcal{S}(\zeta) = (P)$ non trivial, la famille est complète et la pseudo-valuation ζ est la valuation augmentée ou la valuation augmentée limite $\mu_{\bar{l}}$ associée au polynôme $\phi_{\bar{l}} = P$ et à la valeur $\gamma_{\bar{l}} = \infty$.

Plus généralement quand la famille $\mathcal{A}$ associée à une valuation μ est complète, nous disons que la valuation μ est *bien spécifiée*, dans ce cas le polynôme-clé ou polynôme-clé limite $\phi_{\bar{l}}$ qui définit la valuation μ comme valuation augmentée ou comme valuation augmentée limite est appelé le polynôme *définissant* μ. Dans le cas où l'ensemble I possède un plus grand élément $\bar{l}$, nous définissons I^* comme I privé de $\bar{l}$, sinon nous posons $I^* = I$, et nous définissons la sous-famille $\mathcal{A}^* = \bigl(\mu_l\bigr)_{l \in I^*}$.

La première valuation μ_1 de la famille $\mathcal{A}$ est obtenue à partir de la valuation ν de K grâce à un polynôme ϕ_1 unitaire de degré un et à une valeur γ_1. Nous considèrerons parfois que la valuation $\nu = \mu_0$ appartient à la famille $\mathcal{A}$ et par abus de notation nous considèrerons que 0 est le plus petit élément de l'ensemble I. La valuation μ_1 est ainsi considérée comme une valuation augmentée, définie par le polynôme ϕ_1.

Si μ et μ' sont deux valuations appartenant à la même sous-famille simple $\mathcal{S}$ d'une famille admissible $\mathcal{A}$ telles que μ' est obtenue comme valuation augmentée $\mu' = [\mu\ ;\ \mu'(\phi') = \gamma']$, nous disons que (μ, μ') forment *un couple de valuations successives* de la famille $\mathcal{A}$.

Nous appelons Γ_{μ_l} le groupe des ordres de la valuation μ_l, alors pour tout couple (μ_k, μ_l) de valuations successives de $\mathcal{A}$ nous avons $\Gamma_{\mu_l} = \Gamma_{\mu_k} \oplus \mathbb{Z}\gamma_l$, d'où l'égalité

$$[\Gamma_l : \Gamma_k] \;=\; \tau_l$$

où τ_l est le plus petit entier $t > 0$ tel que $t\gamma_l$ appartienne à Γ_{μ_k} si γ_l appartient à $\Gamma_{\mu_l} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, et où τ_l est $+\infty$ sinon.

Pour toute valuation μ de $K[x]$, nous notons $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ l'algèbre graduée associée et nous notons Δ_μ sa composante $\big(\mathrm{gr}_\mu K[x]\big)_0$ de degré 0. Rappelons que si μ_1 est une valuation augmentée $\mu_1 = [\mu\ ;\ \mu_1(\phi_1) = \gamma_1]$ ou une valuation augmentée limite $\mu_1 = \big[\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu_1(\phi_1) = \gamma_1\big]$, nous pouvons déterminer l'algèbre graduée $\mathrm{gr}_{\mu_1} K[x]$ associée à la valuation μ_1 à partir de celle associée à la valuation μ, ou à celles associées aux valuations μ_α ([Va 1] Théorème 1.7 et Théorème 1.26).

Plus précisément si μ_1 est une valuation augmentée $\mu_1 = [\mu\ ;\ \mu_1(\phi_1) = \gamma_1]$, l'application naturelle g de $\mathrm{gr}_\mu K[x]$ dans $\mathrm{gr}_{\mu_1} K[x]$ induit un isomorphisme

$$G\colon \big(\mathrm{gr}_\mu K[x]/(H_\mu(\phi))\big)[T] \longrightarrow \mathrm{gr}_{\mu_1} K[x]\ ,$$

qui envoie T sur $G(T) = H_{\mu_1}(\phi_1)$.

Nous rappelons les hypothèses 1 et 2 introduites par MacLane (cf. [McL 1], [Va 1]).

Hypothèse 1 pour la valuation μ et le polynôme ϕ_1: Il existe q et q' dans $K[x]$ vérifiant qq' μ-équivalent à 1 et $\mu(q) = -\mu(q') = \mu(\phi_1)$.

Hypothèse 2 pour le couple de valuations (μ, μ_1): Supposons que γ_1 appartienne à $\Gamma_\mu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et appelons τ_1 le plus petit entier $t > 0$ tel que $t\gamma_1 \in \Gamma_\mu$, alors il existe p et $p' = p'(\tau_1\gamma_1)$ dans $K[x]$ vérifiant pp' μ_1-équivalent à 1 et $\mu_1(p) = \mu(p) = -\mu_1(p') = -\mu(p') = \tau_1\gamma - 1$.

Si nous supposons que l'hypothèse 1 est vérifiée pour μ et ϕ_1, alors le noyau de la composante de degré 0 $g_0\colon \Delta_\mu \to \Delta_{\mu_1}$ est l'idéal engendré par $\varphi_1 = H_\mu(q'\phi_1)$, et nous avons:

- si γ_1 n'appartient pas à $\Gamma_\mu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$$\big(\Delta_\mu/(\varphi_1)\big) \;\xrightarrow{\sim}\; \Delta_{\mu_1}\ ,$$

- si γ_1 appartient à $\Gamma_\mu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et si l'hypothèse 2 est vérifiée pour (μ, μ_1)

$$\big(\Delta_\mu/(\varphi_1)\big)[S] \;\xrightarrow{\sim}\; \Delta_{\mu_1}\ ,$$

avec $S = H_{\mu_1}\big(p'(\tau_1\gamma_1){\phi_1}^{\tau_1}\big)$ (cf. [Va 1] Remarque 1.5).

Si μ_1 est la valuation augmentée limite $\mu_1 = \big[\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu_1(\phi_1) = \gamma_1\big]$ d'une famille continue $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha\in A}$, nous définissons l'algèbre graduée $\mathbf{gr_A} = \mathrm{gr}_{\mu_\alpha} K[x]/(H_{\mu_\alpha}(\phi_\beta))$ qui ne dépend pas du couple $\alpha < \beta$ dans A, et l'application naturelle de $\mathrm{gr}_{\mu_\alpha} K[x]$ dans $\mathrm{gr}_{\mu_1} K[x]$ induit un isomorphisme d'algèbres graduées:

$$Q\colon \mathbf{gr_A}[T] \;\xrightarrow{\sim}\; \mathrm{gr}_{\mu_1} K[x]\ ,$$

qui envoie T sur $Q(T) = H_{\mu_1}(\phi_1)$. Nous appelons $\mathbf{\Delta_A}$ la composante de degré 0 de $\mathbf{gr_A}$.

Tous les groupes de valuation Γ_{μ_α} sont égaux et nous notons ce groupe $\mathbf{\Gamma_A}$, nous pouvons alors introduire l'hypothèse suivante.

Hypothèse 3 pour la famille $\mathcal{C}$: Pour tout γ dans $\mathbf{\Gamma_A}$ il existe p et $p' = p'(\gamma)$ dans $K[x]$ vérifiant $pp'(\gamma) \underset{\mu_\theta}{\sim} 1$ et $\mu_\theta(p) = -\mu_\theta(p'(\gamma)) = \gamma$, où θ est le plus petit élément de l'ensemble A.

Si nous supposons que la famille $\mathcal{C}$ vérifie l'hypothèse 3, alors le morphisme Q induit un isomorphisme en degré 0:

- si γ_1 n'appartient pas à $\mathbf{\Gamma_A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$$Q_0 \colon \mathbf{\Delta_A} \xrightarrow{\sim} \Delta_{\mu_1} \ ,$$

- si γ_1 appartient à $\mathbf{\Gamma_A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$$Q_0 \colon \mathbf{\Delta_A}[S] \xrightarrow{\sim} \Delta_{\mu_1} \ ,$$

qui envoie S sur $H_{\mu_1}(p'{\phi_1}^{\tau_1})$, où nous appelons τ_1 le plus petit entier positif t tel que $t\gamma_1$ appartienne à $\mathbf{\Gamma_A}$ et où nous supposons qu'il existe p et $p'(\tau_1\gamma_1) = p'$ dans $K[x]$ tels que pp' soit μ_α-équivalent à 1 pour α suffisamment grand et tels que $\mu_\alpha(p') = -\tau_1\gamma_1$ (cf. [Va 3] Proposition 2.2).

Nous rappelons que toute valuation μ appartenant à une famille admissible $\mathcal{A}$ est une valuation *bien spécifiée* (cf. [Va 3]), c'est-à-dire est obtenue soit comme valuation augmentée $\mu = [\mu_0 \ ; \ \mu(\phi) = \gamma]$, soit comme valuation augmentée limite $\mu = \big[\big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A} \ ; \ \mu(\phi) = \gamma\big]$.

Pour une telle valuation μ, si nous appelons μ_0 la valuation définissant μ comme valuation augmentée dans le premier cas, soit la première valuation μ_θ de la famille continue dans le deuxième cas, et si nous appelons Γ_0 le groupe des valeurs Γ_{μ_0} (qui est égal au groupe $\mathbf{\Gamma_A}$ dans le deuxième cas), nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.1. ([Va 3], Proposition 1.6 et Remarque 1.2) *Pour tout δ appartenant à Γ_0 il existe f dans $K[x]$ avec* $\deg f < \deg \phi$ *tel que $\mu_0(f) = \mu(f)$.*

Nous en déduisons qu'il existe f_0 avec $\deg f_0 < \deg \phi$ *qui est μ-équivalent à f, et que f est μ-unitaire, c'est-à-dire il existe f' dans $K[x]$ tel que ff' est μ-équivalent à* 1.

Nous déduisons du lemme précédent que les hypothèses 1, 2 et 3 sont vérifiées pour tout couple (μ_k, μ_l) de valuations successives et pour chacune des familles continues $\mathcal{C}^{(j)}$ apparaissant dans $\mathcal{A}$. Plus précisément nous avons le résultat suivant.

Proposition 2.2. *Soit (μ_k, μ_l) un couple de valuations successives de la famille admissible $\mathcal{A}$, alors nous pouvons trouver:*

- q'_k dans $K[x]$ tel que $H_{\mu_k}(q'_k)$ soit inversible dans $\mathrm{gr}_{\mu_k} K[x]$ *et tel que $\mu_k(q'_k\phi_l) = 0$;*

- p'_l dans $K[x]$ tel que $H_{\mu_l}(p'_l)$ soit inversible dans $\mathrm{gr}_{\mu_l} K[x]$ *et tel que $\mu_k\big(p'_l{\phi_l}^{\tau_l}\big) = 0$, dans le cas où γ_l appartient à $\Gamma_{\mu_k} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.*

Soit $\mathcal{C} = \big(\mu_\alpha\big)_{\alpha \in A}$ une sous-famille continue de la famille admissible $\mathcal{A}$, alors pour tout $\alpha < \beta$ dans A nous pouvons trouver $p'(\gamma_\alpha)$ dans $K[x]$ tel que $H_{\mu_\alpha}(p'(\gamma_\alpha))$ soit inversible dans $\mathrm{gr}_{\mu_\alpha} K[x]$ *et tel que $\mu_\alpha(p'(\gamma_\alpha)\phi_\beta) = 0$.*

Preuve. Si (μ_k, μ_l) est un couple de valuations successives, le polynôme-clé ϕ_l est de la forme $\phi_l = {\phi_k}^{r_k} + \ldots + g_0$, dans le cas où μ_k est une valuation augmentée c'est une conséquence du théorème 9.4 de [McL 1] ou du thórème 1.11 de [Va 1], et dans le cas où μ_k est une valuation augmentée limite c'est une conséquence de la proposition 1.3 de [Va 3]. Nous en déduisons que $\mu_k(\phi_l)$ appartient au sous-groupe Γ_0 de Γ_{μ_k}, d'où l'existence du polynôme q'_k grâce au lemme 2.1.

De même si $\tau_l\gamma_l$ appartient au sous-groupe Γ_{μ_k} de Γ_{μ_l}, nous déduisons du lemme 2.1 l'existence du polynôme p'_l.

Si μ_θ est la première valuation de la sous-famille continue $\mathcal{C}$, alors μ_θ est une valuation augmentée, $\mu_\theta = (\mu_0 \ ; \ \mu_\theta(\phi_\theta) = \phi_\theta]$, et le groupe Γ_0 est égal à $\Gamma_{\mu_\theta} = \mathbf{\Gamma_A}$. L'existence du polynôme $p'(\gamma_\alpha)$ est encore une conséquence du lemme 2.1. $\square$

Remarque 2.3. Si la valuation μ_k n'est pas la dernière valuation de la famille $\mathcal{A}$, il existe une valuation μ_l telle que (μ_k, μ_l) est un couple de valuations successives. Si nous écrivons le polynôme-clé ϕ_l sous la forme $\phi_l = {\phi_k}^{r_k} + \ldots + g_0$, nous avons $r_k\gamma_k \in \Gamma_0$, par conséquent γ_k appartient à $\Gamma_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et nous pouvons définir l'entier s_k par $r_k = \tau_k s_k$.

Remarque 2.4. Les entiers τ_l et s_l, ainsi que les polynômes q'_k et p'_l sont bien définis, c'est-à-dire qu'ils ne dépendent que de la valuation μ_l ou de la valuation μ_k et non du couple de valuations successives. En effet si la valuation μ_l appartient à la partie discrète $\mathcal{D}^{(j)}$ d'une sous-famille simple de $\mathcal{A}$, le couple (μ_k, μ_l) est déterminé entièrement par μ_l, et si la valuation μ_l appartient à la partie continue $\mathcal{C}^{(j)}$ d'une sous-famille simple, nous avons $\mu_k(\phi_l) = \gamma_k$ et $\tau_l = s_l = 1$.

Pour tout $j \geq 2$, la première valuation $\mu_1^{(j)}$ de la sous-famille simple $\mathcal{S}^{(j)}$ n'apparaît pas comme valuation augmentée, par conséquent n'est jamais le deuxième terme d'un couple (μ_k, μ_l) de valuations successives. Par contre $\mu_1^{(j)}$ est obtenue comme valuation augmentée limite de la sous-famille continue $\mathcal{C}^{(j-1)} = \left(\mu_\alpha^{(j-1)}\right)_{\alpha\in A^{(j-1)}}$ de la sous-famille simple précédente.

Proposition 2.5. *Il existe une famille croissante de corps $\left(F_k\right)_{k\in I^*}$, avec F_0 égal au corps résiduel κ_ν de la valuation ν de K, telle que pour tout couple (μ_k, μ_l) de valuations successives de $\mathcal{A}$ nous avons:*

- si γ_l appartient à $\Gamma_{\mu_k} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$$\Delta_{\mu_l} \;=\; F_k[S_l] \;, \quad \textit{avec } S_l = H_{\mu_l}\left(p'_l\phi_l^{\tau_l}\right) \;;$$

- si γ_l n'appartient pas à $\Gamma_{\mu_k} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$$\Delta_{\mu_l} \;=\; F_k \;.$$

De plus si l appartient à I^*, F_l est un extension finie de F_k de degré s_l.

Preuve. La proposition est une généralisation du résultat de MacLane (cf. [McL 1] Theorem 12.1 et [Va 1] Théorème 1.12) et se démontre par récurrence. En effet si nous savons que Δ_k est de la forme $F[S_k]$ avec F corps et $S = H_{\mu_k}\left(p'_k\phi_k^{\tau_k}\right)$, alors nous trouvons que pour tout couple (μ_k, μ_l) de valuations successives, Δ_{μ_l} est égal à $F_k[S_l]$ où F_k est le corps $F[S_k]/(\varphi_l)$ où φ_l est un polynôme de degré s_l en S_k défini par $\varphi_l = H_{\mu_k}(q'_k\phi_l)$.

Il suffit donc de montrer que pour toute sous-famille admissible simple $\mathcal{S}^{(j)}$ de $\mathcal{A}$, la partie homogène $\Delta_{\mu_1^{(j)}}$ de degré 0 de l'algèbre graduée associée à la première valuation $\mu_1^{(j)}$ est un anneau de polynômes $F[S]$ en une variable à coefficients dans un corps F, si $\mu_1^{(j)}$ n'est pas la dernière valuation de la famille $\mathcal{A}$.

Si $\mu_1^{(j)}$ est la première valuation μ_1 de la famille $\mathcal{A}$, c'est-à-dire pour $j = 1$, nous avons Δ_{μ_1} qui est égal à $\kappa_\nu[S_1]$, avec $S_1 = H_{\mu_1}\left(p'_1{\phi_1}^{\tau_1}\right)$, où $\tau_1 = [\Gamma_{\mu_1} : \Gamma_\nu]$.

Si $j \geq 2$ $\Delta_{\mu_1^{(j)}}$ est de la forme $\mathbf{\Delta_A}[S]$ où $\mathbf{\Delta_A}$ est l'anneau associé à la partie continue $\mathcal{C}^{(j-1)}$ de la sous-famille $\mathcal{S}^{(j-1)}$. L'anneau $\mathbf{\Delta_A}$ est isomorphe à $\Delta_{\mu_\beta}/(\varphi_\alpha)$ où (μ_α, μ_β) est un couple de valuations successives de $\mathcal{A}$ appartenant à $\mathcal{C}^{(j-1)}$, avec $\phi_\alpha = H_{\mu_\alpha}\left(p'(\gamma_\alpha\phi_\beta\right)$, et nous en déduisons par récurrence sur j que c'est bien un corps (cf. [Va 3]) . □

Remarque 2.6. Nous avons montré de plus que si μ_k est la première valuation $\mu_1^{(j)}$ d'une sous-famille simple $\mathcal{S}^{(j)}$, et si nous notons $F_0^{(j)}$ le corps tel que Δ_{μ_k} soit égal à $F_0^{(j)}[S]$, alors F_k est une extension algébrique finie de $F_0^{(j)}$ de degré s_k. En effet nous avons $S = H_{\mu_k}\left(p'_k{\phi_k}^{\tau_k}\right)$ et le corps F_k est égal à $\Delta_{\mu_k}/(\varphi_l)$ où $\varphi_l = H_{\mu_k}(q'_l\phi_l)$ avec $\phi_l = {\phi_k}^{\tau_k s_k} + \ldots + g_0$.

Grâce à la proposition précédente nous pouvons étudier le degré de l'extension F_m/F_k pour deux valuations μ_k et μ_l appartenant à la même sous-famille simple de $\mathcal{A}$. Nous voulons maintenant étudier ce qui se passe quand nous considérons deux valuations n'appartenant pas à la même sous-famille simple.

Soit $\mathcal{A} = \big(\mu_l\big)_{l\in I}$ une famille admissible de valuations de $K[x]$, réunion des sous-familles simples $\mathcal{S}^{(j)} = \big(\mu_1^{(j)}, \ldots, \mu_{n_j}^{(j)}; (\mu_\alpha^{(j)})_{\alpha\in A^{(j)}}\big)$, pour j parcourant J. Pour toute valuation $\mu_k^{(j)}$ de la sous-famille $\mathcal{S}^{(j)}$ nous notons $\Gamma_k^{(j)}$, $F_k^{(j)}$, $s_k^{(j)}$, $r_k^{(j)}$ et $\tau_k^{(j)}$ respectivement le groupe des valeurs, le corps et les entiers définis précédemment associés à la valuation.

Nous définissons aussi le groupe $\Gamma_0^{(j)}$ et le corps $F_0^{(j)}$ de la manière suivante. Si $j = 1$, alors nous posons $\Gamma_0^{(j)} = \Gamma_\nu$ et $F_0^{(j)} = \kappa_\nu$, et si $j \geq 2$ nous posons $\Gamma_0^{(j)} = \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{A}^{(j-1)}}$ groupe des valeurs des valuations $\mu_\alpha^{(j-1)}$ appartenant à la partie continue de la sous-famille simple précédente $\mathcal{S}^{(j-1)}$ et $F_0^{(j)} = \mathbf{\Delta}_{\mathbf{A}^{(j-1)}}$ corps associé aux valuations $\mu_\alpha^{(j-1)}$.

Définition 2.7. *Nous appelons saut d'ordre $j-1$ de la famille admissible $\mathcal{A}$ le nombre rationnel $s^{(j-1)}(\mathcal{A}) = s^{(j-1)}$ défini par:*

$$\deg\phi_1^{(j)} \ = \ s^{(j-1)}(\mathcal{A}).\deg\phi_\alpha^{(j-1)} \ ,$$

où $\phi_1^{(j)}$ est le polynôme-clé limite définissant la valuation $\mu_1^{(j)}$ et où $\phi_\alpha^{(j-1)}$ est un polynôme-clé associé à la famille continue $\mathcal{C}^{(j-1)}$.

Si la famille admissible $\mathcal{A}$ est d'ordre fini N, c'est-à-dire pour $J = \{1, \ldots, N\}$, nous appelons saut total de la famille le nombre rationnel $s^{tot} = s^{tot}(\mathcal{A})$ défini par:

$$s^{tot}(\mathcal{A}) \ = \ \prod_{j=2}^{N} s^{(j-1)}(\mathcal{A}) \ .$$

Remarque 2.8. Si nous supposons que l'ensemble des valeurs $\Lambda^{(j-1)} = \big\{\gamma_\alpha^{(j-1)} \mid \alpha \in A^{(j-1)}\big\}$ admet une borne supérieure, alors nous savons que le développement du polynôme-clé limite $\phi_1^{(j)}$ selon les puissances de $\phi_\alpha^{(j-1)}$ est de la forme $\phi_1^{(j)} = \big(\phi_\alpha^{(j-1)}\big)^s + g_{s-1,\alpha}\big(\phi_\alpha^{(j-1)}\big)^{s-1} + \ldots + g_{0,\alpha}$, pour tout α suffisamment grand dans $A^{(j-1)}$ (cf. [Va 2] Théorème 3.7).

Nous en déduisons que le saut d'ordre $j-1$ est un entier, $s^{(j-1)}(\mathcal{A}) = s$.

Proposition 2.9. *Le degré du polynôme-clé $\phi_k^{(j)}$ associé à la valuation $\mu_k^{(j)}$, avec $1 \leq k \leq n_j$ et $j \in J$, est égal à:*

$$\deg\phi_k^{(j)} \ = \ \big[\Gamma_{k-1}^{(j)} : \Gamma_\nu\big]\big[F_{k-1}^{(j)} : \kappa_\nu\big] \prod_{u=1}^{j-1} s^{(u)} \ .$$

De même le degré du polynôme-clé $\phi_\alpha^{(j)}$ associé à une valuation $\mu_\alpha^{(j)}$, avec $\alpha \in A^{(j)}$ $j \in J$, est égal à:

$$\deg\phi_\alpha^{(j)} \ = \ \big[\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{A}^{(j)}} : \Gamma_\nu\big]\big[\mathbf{\Delta}_{\mathbf{A}^{(j)}} : \kappa_\nu\big] \prod_{u=1}^{j-1} s^{(u)} \ .$$

Preuve. D'après ce qui précède, nous voyons que si $(\mu_k^{(j)}, \mu_l^{(j)})$ est un couple de valuations successives appartenant à la sous-famille $\mathcal{S}^{(j)}$, avec $\mu_k^{(j)}$ dans la partie continue, nous avons l'égalité:

$$\deg\phi_l^{(j)} \ = \ \big[\Gamma_k^{(j)} : \Gamma_{k-1}^{(j)}\big]\big[F_k^{(j)} : F_{k-1}^{(j)}\big]\deg\phi_k^{(j)} \ ,$$

où $\Gamma_{k-1}^{(j)}$ et $F_{k-1}^{(j)}$ sont bien définies pour toute valuation $\mu_k^{(j)}$, $1 \leq k \leq n_j$.

Nous en déduisons par récurrence sur k que pour toute valuation $\mu_l^{(j)}$ appartenant à la partie discrète de la sous-famille simple $\mathcal{S}^{(j)}$, nous avons l'égalité:

$$\deg\phi_l^{(j)} \ = \ \big[\Gamma_{l-1}^{(j)} : \Gamma_0^{(j)}\big]\big[F_{l-1}^{(j)} : F_0^{(j)}\big]\deg\phi_1^{(j)} \ ,$$

et pour toute valuation $\mu_\alpha^{(j)}$ appartenant à la partie continue de la sous-famille simple $\mathcal{S}^{(j)}$, nous avons l'égalité:

$$\deg\phi_\alpha^{(j)} \ = \ \big[\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{A}^{(j)}} : \Gamma_0^{(j)}\big]\big[\mathbf{\Delta}_{\mathbf{A}^{(j)}} : F_0^{(j)}\big]\deg\phi_1^{(j)} \ .$$

Nous trouvons le résultat en faisant une récurrence sur j, en utilisant les égalités $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{A}^{(j-1)}} = \Gamma_0^{(j)}$ et $\mathbf{\Delta}_{\mathbf{A}^{(j-1)}} = F_0^{(j)}$ et la définition des nombres $s^{(u)}$. □

Soit L une extension algébrique monogène de K, c'est-à-dire de la forme $L = K(\theta) = K[x]/(P)$, avec $P(x)$ polynôme unitaire de degré $d = [L : K]$. Alors tout prolongement μ à L d'une valuation ν de K correspond à une pseudo-valuation ζ de $K[x]$ dont le noyau $\mathcal{S}(\zeta) = \{f \in K[x] \mid \zeta(f) = +\infty\}$ est égal à l'idéal (P) de $K[x]$. Nous appelons *famille admissible associée à* μ la famille admissible associée à la pseudo-valuation ζ et nous la notons $\mathcal{A}(\mu)$.

Nous notons $e(\mu/\nu)$ l'indice de ramification et $f(\mu/\nu)$ le degré de l'extension résiduelle de l'extension $(L, \mu)/(K, \nu)$.

Corollaire 2.10. *Soit $\mathcal{A}(\mu)$ la famille admissible associée au prolongement μ de la valuation ν de K. Nous avons alors l'égalité:*

$$[L : K] \ = \ e(\mu/\nu) f(\mu/\nu) s^{tot}\big(\mathcal{A}(\mu)\big) \ .$$

En particulier, si μ est l'unique prolongement de ν à L, le défaut de l'extension $(L, \mu)/(K, \nu)$ est égal au saut total de la famille admissible $\mathcal{A}(\mu)$.

Preuve. Si ζ est une pseudo-valuation de $K[x]$ de noyau (P), la famille admissible associée $\mathcal{A}$ est complète, et la pseudo-valuation ζ est la valution augmentée ou la valuation augmentée limite $\mu_k^{(j)}$ associée au polynôme $\phi_k^{(j)} = P$ et à la valeur $\gamma_k^{(j)} = \infty$.

Dans le cas où $= \mu_k^{(j)}$ est une valuation augmentée, $\mu_k^{(j)} = [\mu_{k-1}^{(j)} \ ; \ \zeta(P) = \infty]$, il suffit alors de vérifier que nous avons les égalités $\Gamma_{k-1}^{(j)} = \Gamma_\mu$ et $F_{k-1}^{(j)} = \kappa_\mu$ (cf. [McL 2] Theorem 9.1 et [Va 1] Proposition 2.7) et nous déduisons le résultat de la proposition 2.9.

Dans le cas où $= \mu_k^{(j)}$ est une valuation augmentée limite, $\mu_k^{(j)} = \big[\big(\mu_\alpha^{(j-1)}\big) \ ; \ \zeta(P) = \infty\big]$, nous avons encore les égalités $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{A}^{(j-1)}} = \Gamma_\mu$ et $\mathbf{\Delta}_{\mathbf{A}^{(j-1)}} = \kappa_\mu$ (cf. [Va 1] Proposition 2.8), et nous déduisons le résultat de la proposition 2.9. □

Lemme 2.11. *Pour toute famille admissible $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{F}(K[x], \nu)$, et pour tout j, $2 \le j \le N$, le saut d'ordre $j-1$ vérifie*

$$s^{(j-1)}(\mathcal{A}) \ > \ 1 \ .$$

Preuve. Comme le polynôme $\phi_1^{(j)}$ est un polynôme-clé limite pour la sous-famille continue $\mathcal{C}^{(j-1)} = \big(\mu_\alpha^{(j-1)}\big)_{\alpha \in A^{(j-1)}}$ de $\mathcal{A}$, il vérifie les inégalités strictes $\mu_\alpha^{(j-1)}(\phi_1^{(j)}) < \mu_\beta^{(j-1)}(\phi_1^{(j)})$ pour tout $\alpha < \beta$ dans $A^{(j-1)}$, par conséquent nous avons l'ingalité $\deg \phi_\alpha^{(j-1)} < \deg \phi_1^{(j)}$. □

Proposition 2.12. *Soit $(L, \mu)/(K, \nu)$ une extension finie monogène de corps valués, nous avons l'égalité*

$$[L : K] \ = \ e(\mu/\nu) f(\mu/\nu)$$

si et seulement si la famille admissible $\mathcal{A}(\mu)$ associée au prolongement μ de ν est constituée d'une seule famille simple, i.e. $N = 1$.

Preuve. C'est une conséquence directe de la définition du saut total, du corollaire 2.10 et du lemme 2.11. □

Remarque 2.13. Comme la famille admissible $\mathcal{A}(\mu)$ est complète, c'est-à-dire comme la pseudo-valuation ζ de $K[x]$ qui définit la valuation μ appartient à la famille, la dernière sous-famille simple $\mathcal{S}^{(N)}$ de $\mathcal{A}(\mu)$ est toujours discrète et finie.

Par conséquent la famille admissible $\mathcal{A}(\mu)$ est constituée d'une seule famille simple si et seulement si elle est finie et nous pouvons l'écrire

$$\mathcal{A}(\mu) \ = \ \big(\mu_1, \ldots, \mu_n\big) \ ,$$

où chaque valuation μ_i est une valuation augmentée, $\mu_i = [\mu_{i-1} \ ; \ \mu_i(\phi_i) = \gamma_i]$, $1 \le i \le n$, où nous posons comme d'habitude $\mu_0 = \nu$. De plus les polynômes-clés ϕ_i vérifient

1. $\deg\phi_{i-1}$ divise $\deg\phi_i$ pour $i = 2, \ldots, N$;
2. $\deg\phi_1 = 1$ et $\deg\phi_N = [L : K]$.

3 Exemples

Pour que l'extension de corps valués $(L, \mu)/(K, \nu)$ vérifie l'égalité $[L : K] = e(\mu/\nu)f(\mu/\nu)$, c'est-à-dire d'après le corollaire 2.10 pour que le saut total de la famille $\mathcal{A}(\mu)$ soit trivial, $s^{tot}\big(\mathcal{A}(\mu)\big) = 1$, il faut que la valuation μ soit l'unique prolongement de la valuation ν de K à L et que le défaut de L/K en μ soit trivial, $d(L/K, \mu) = 1$.

Nous voulons donner deux exemples d'extension $(L, \mu)/(K, \nu)$ pour lesquelles nous avons l'inégalité stricte $s^{tot}(\mathcal{A}) > 1$. Dans le premier exemple la valuation μ est l'unique prolongement de la valuation ν à l'extension L de K et le saut est égal au défaut, $s^{tot}\big(\mathcal{A}(\mu)\big) = d(L/K, \nu)$. Dans le deuxième exemple l'extension est sans défaut, car la valuation ν est discrète de rang 1, mais il existe plusieurs valuations μ de L qui prolongent la valuation ν.

Exemple 3.1. Le premier exemple est un exemple classique, étudié par F.-V. Kuhlmann dans [Ku], et étudié en détail du point de vue des familles admissibles à la fin de l'article [Va 1], nous renvoyons à ces deux articles pour les démonstrations.

Soient F un corps de caractéristique $p > 0$, $K_0 = F(t)$ une extension transcendante pure de F munie de la valuation t-adique ν_t; soient $K_l = F\big(t^{1/p^l}\big)$ pour tout $l \geq 1$ et nous définissons le corps K par $K = F\big(t^{1/p^l} \mid l \in \mathbb{N}\big) = \bigcup K_l$. Le corps K est une extension purement inséparable de $F(t)$ et nous prenons pour valuation ν l'unique extension à K de la valuation t-adique ν_t. Le groupe des ordres Γ_ν de la valuation ν sur K est égal à $(1/p^\infty)\mathbb{Z} = \bigcup_{l\in\mathbb{N}} 1/p^l\mathbb{Z}$ et le corps résiduel κ_ν est égal à F. Nous prenons pour L l'extension $L = K(\theta)$ de K engendrée par la racine θ du polynôme d'Artin-Schreier $G(X) = X^p - X - 1/t$, L est une extension séparable de K de degré p. Il existe une unique valuation μ de L qui prolonge la valuation ν et l'extension $(L, \mu)/(K, \nu)$ est immédiate, nous en déduisons que le défaut $d(L/K, \nu)$ de l'extension L/K est égale à p.

Nous appelons $\mathcal{A}$ la famille admissible associée à la pseudo-valuation ζ de $K[x]$ de noyau $\mathcal{S}(\zeta) = (G)$ qui définit la valuation μ de L, d'après le corollaire 2.10 nous trouvons aussi que le saut total de la famille $s^{tot}(\mathcal{A})$ est égal à p. En effet la famille admissible $\mathcal{A}$ est constitué de deux sous-familles admissibles simples $\mathcal{S}^{(1)}$ et $\mathcal{S}^{(2)}$ définies de la manière suivante.

La famille $\mathcal{S}^{(1)}$ est égale à

$$\mathcal{S}^{(1)} \ = \ \mathcal{D}^{(1)} \cup \mathcal{C}^{(1)} \ = \ \big(\mu_1^{(1)}\big) \cup \big(\mu_\alpha^{(1)}\big)_{\alpha\in A} \ ,$$

où $\mu_1^{(1)}$ est la valuation de Gauss $\mu_1^{(1)} = [\nu\ ;\ \mu_1^{(1)}(\phi_1^{(1)}) = \gamma_1^{(1)}]$, avec $\phi_1^{(1)} = x$ et $\gamma_1^{(1)} = -1/p$, et où la sous-famille continue $\mathcal{C}^{(1)} = \big(\mu_\alpha^{(1)}\big)_{\alpha\in A}$ vérifie $A = \{\alpha \in \mathbb{N}\ ,\ \alpha \geq 2\}$ et pour tout α la valuation $\mu_\alpha^{(1)}$ est la valuation augmentée $\mu_\alpha^{(1)} = \big[\mu_1^{(1)}\ ;\ \mu_\alpha^{(1)}(\phi_\alpha^{(1)}) = \gamma_\alpha^{(1)}\big]$, avec $\phi_\alpha^{(1)} = x - t^{-1/p} + \ldots + t^{-1/p^{\alpha-1}}$ et $\gamma_\alpha^{(1)} = -1/p^\alpha$.

La famille $\mathcal{S}^{(2)}$ ne contient que la pseudo-valuation ζ, c'est-à-dire

$$\zeta \ = \ \mu_1^{(2)} \ = \ \Big[\big(\mu_\alpha^{(1)}\big)_{\alpha\in A}\ ;\ \mu_1^{(2)}(\phi_1^{(2)}) = \gamma_1^{(2)}\Big] \ ,$$

avec $\phi_1^{(2)} = G$ et $\gamma_1^{(2)} = \infty$.

Nous vérifions alors que le saut total $s^{tot}(\mathcal{A})$ est égal à

$$s^{tot}(\mathcal{A}) \ = \ s^{(1)}(\mathcal{A}) \ = \ \deg G/\deg\phi_\alpha^{(1)} \ = \ p \ .$$

Dans le deuxième exemple nous considérons un corps k algébriquement clos de caractéristique nulle et nous prenons pour corps valué (K, ν) l'extension transcendante pure $K = k(y)$ munie de la valuation y-adique, $\nu = \nu_y$. Nous choisissons un polynôme unitaire irréductible P dans $K[x]$ qui appartient aussi à l'anneau des polynômes $k[x,y]$ et nous définissons l'extension L de K par $L = K[x]/(P)$.

Géométriquement cet exemple correspond à une courbe affine plane C définie par $C = Spec\ R$ où R est l'anneau quotient $R = k[x,y]/(P)$. Le lien entre l'étude des valuations μ de L qui prolongent la valuation ν de K et la résolution des singularités de la courbe C, ainsi que le lien entre la famille admissible $\mathcal{A}(\mu)$ et les racines approchées du polynôme P sont étudiés plus en détail dans l'article [Va 5]. En particulier le nombre de ces valuations μ est égal au nombre de *branches analytiques* de la courbe C au point o correspondant à l'idéal maximal $\mathfrak{m} = (x,y)$ de R, et nous déduisons alors de la proposition 2.12 que si la singularité (C,o) n'est pas unibranche, la famille admissible $\mathcal{A}(\mu)$ associée à une valuation μ qui prolonge ν n'est pas finie.

Exemple 3.2. Nous prenons

$$P \;=\; x^4 + y^2x^3 + y^3(y^2-2)x^2 - y^5x + y^6 \;.$$

Il existe deux valuations μ et μ' de $L = K[x]/(P)$ qui prolongent la valuation y-adique ν du corps $K = k(y)$. Nous appelons $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mu)$ et $\mathcal{A}' = \mathcal{A}(\mu')$ les familles admissibles associées respectivement aux pseudo-valuations ζ et ζ' de $K[x]$ qui définissent les valuations μ et μ'. Ces deux familles sont constituées de deux sous-familles admissibles simples, la première famille simple est formée d'une partie discrète, contenant une unique valuation, et d'une partie continue, la deuxième est formée uniquement de la valuation augmentée limite.

Plus précisément pour la valuation μ nous avons les familles suivantes.

$\mathcal{A} = \mathcal{S}^{(1)} \sqcup \mathcal{S}^{(2)}$ avec :

$$\mathcal{S}^{(1)} \;=\; \left(\mu_1^{(1)}, \left(\mu_\alpha^{(1)}\right)_{\alpha\in A^{(1)}}\right) : \quad \mu_1^{(1)} = \left[\nu\ ;\ \mu_1^{(1)}(\phi_1^{(1)}) = \gamma_1^{(1)}\right]\ , \quad \phi_1^{(1)} = x \quad \text{et} \quad \gamma_1^{(1)} = 3/2\ ,$$

$$A^{(1)} = \{\alpha \in \mathbb{N} \mid \alpha \geq 2\} \quad \text{et} \quad \mu_\alpha^{(1)} = \left[\mu_1^{(1)}\ ;\ \mu_\alpha^{(1)}(\phi_\alpha^{(1)}) = \gamma_\alpha^{(1)}\right]\ ,$$

$$\mathcal{S}^{(2)} \;=\; \left(\mu_1^{(2)}\right) : \quad \mu_1^{(2)} = \left[\left(\mu_\alpha^{(1)}\right)_{\alpha\in A^{(1)}}\ ;\ \mu_1^{(2)}(\phi_1^{(2)}) = \gamma_1^{(2)}\right] = \zeta\ , \quad \phi_1^{(2)} = P \quad \text{et} \quad \gamma_1^{(2)} = \infty\ .$$

Les polynômes-clés $\phi_\alpha^{(1)}$ sont de degré 2, et nous avons:
pour $\alpha = 2$, $\phi_2^{(1)} = x^2 - y^3$ et $\gamma_2^{(1)} = 7/2$,
pour $\alpha = 3$, $\phi_3^{(1)} = x^2 + y^2x - y^3$ et $\gamma_3^{(1)} = 9/2$,
pour $\alpha = 4$, $\phi_4^{(1)} = x^2 + (y^2 - y^3)x - y^3$ et $\gamma_4^{(1)} = 11/2$, etc ...

Les groupes des valeurs des valuations ν et μ sont respectivement $\Gamma_\nu = \mathbb{Z}$ et $\Gamma_\mu = (1/2)\mathbb{Z}$, et les corps résiduels sont $\kappa_\nu = \kappa_\mu = k$, nous obtenons ainsi l'indice de ramification $e(\mu/\nu) = 2$, le degré résiduel $f(\mu/\nu) = 1$ de l'extension $(L,\mu)/(K,\nu)$. Le saut total de la famille est égal par définition à $s^{tot}(\mathcal{A}) = s^{(1)}(\mathcal{A}) = \deg\phi_1^{(2)}/\deg\phi_\alpha^{(1)} = 2$, nous vérifions que nous avons bien l'égalité

$$4 \;=\; [L:K] \;=\; e(\mu/\nu)f(\mu/\nu)s^{tot}(\mathcal{A})\ .$$

De la même manière pour la valuation μ' nous avons les familles suivantes.

$\mathcal{A}' = \mathcal{S'}^{(1)} \sqcup \mathcal{S'}^{(2)}$ avec :

$$\mathcal{S'}^{(1)} \;=\; \left({\mu'}_1^{(1)}, \left({\mu'}_\alpha^{(1)}\right)_{\alpha\in A'^{(1)}}\right) : \quad {\mu'}_1^{(1)} = \left[\nu\ ;\ {\mu'}_1^{(1)}({\phi'}_1^{(1)}) = {\gamma'}_1^{(1)}\right]\ , \quad {\phi'}_1^{(1)} = x \quad \text{et} \quad {\gamma'}_1^{(1)} = 3/2\ ,$$

$$A'^{(1)} = \{\alpha \in \mathbb{N} \mid \alpha \geq 2\} \quad \text{et} \quad {\mu'}_\alpha^{(1)} = \left[{\mu'}_1^{(1)}\ ;\ {\mu'}_\alpha^{(1)}({\phi'}_\alpha^{(1)}) = {\gamma'}_\alpha^{(1)}\right]\ ,$$

$$\mathcal{S'}^{(2)} \;=\; \left({\mu'}_1^{(2)}\right) : \quad {\mu'}_1^{(2)} = \left[\left({\mu'}_\alpha^{(1)}\right)_{\alpha\in A'^{(1)}}\ ;\ {\mu'}_1^{(2)}({\phi'}_1^{(2)}) = {\gamma'}_1^{(2)}\right] = \zeta'\ , \quad {\phi'}_1^{(2)} = P \quad \text{et} \quad {\gamma'}_1^{(2)} = \infty\ .$$

Les polynômes-clés ${\phi'}_\alpha^{(1)}$ sont de degré 2, et nous avons:
pour $\alpha = 2$, ${\phi'}_2^{(1)} = x^2 - y^3$ et ${\gamma'}_2^{(1)} = 9/2$,
pour $\alpha = 3$, ${\phi'}_3^{(1)} = x^2 + y^3x - y^3$ et ${\gamma'}_3^{(1)} = 11/2$,
pour $\alpha = 4$, ${\phi'}_4^{(1)} = x^2 + (y^3 + y^4)x - y^3$ et ${\gamma'}_4^{(1)} = 13/2$, etc ...

Nous trouvons encore pour groupes de valeurs $\Gamma_\nu = \mathbb{Z}$ et $\Gamma_{\mu'} = (1/2)\mathbb{Z}$, et pour corps résiduels $\kappa_\nu = \kappa_{\mu'} = k$, d'où l'indice de ramification $e(\mu'/\nu) = 2$ et le degré résiduel $f(\mu'/\nu) = 1$ de l'extension $(L, \mu')/(K, \nu)$. Le saut total de la famille est encore égal à $s^{tot}(\mathcal{A}') = 2$ et nous avons l'égalité

$$4 \ = \ [L : K] \ = \ e(\mu'/\nu)f(\mu'/\nu)s^{tot}(\mathcal{A}') \ .$$

Nous renvoyons à l'article [Va 5] pour expliquer comment nous trouvons les deux valuations μ et μ' qui prolongent la valuation ν ainsi que les familles admissibles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ associés.

Nous pouvons remarquer que les familles pseudo-convergentes de polynômes $\left(\phi_\alpha^{(1)}\right)_{\alpha \in A^{(1)}}$ et $\left({\phi'}_\alpha^{(1)}\right)_{\alpha \in A'^{(1)}}$ convergent dans l'anneau $k[[y]][x]$ respectivement vers ϕ et ϕ' qui sont les deux diviseurs du polynôme P dans $k[[y]][x]$. Nous pouvons écrire ϕ et ϕ' sous la forme

$$\phi = x^2 + (y^2 - u)x - y^3 \quad \text{et} \quad \phi' = x^2 + ux - y^3 \ ,$$

où u est solution dans l'anneau des séries formelles $k[[y]]$ de l'équation $(y^2 - u)u = y^5$.

Nous en déduisons la relation

$$\phi\phi' = x^4 + y^2x^3 + \big((y^2 - u)u - 2y^3\big)x^2 - y^5x + y^6 \ = \ x^4 + y^2x^3 + y^3(y^2 - 2)x^2 - y^5x + y^6 = P \ .$$

References

[En] O. Endler: *Valuation Theory*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, (1972).

[Ka 1] I. Kaplansky: Maximal fields with valuations. Duke Math. J. **9** (1942), 303-321.

[Ka 2] I. Kaplansky: Maximal fields with valuations, II. Duke Math. J. **12** (1945), 243-248.

[Ku] F;-V. Kuhlmann: Valuation theoric and model theoric aspects of local uniformization, dans *Resolution of Singularities - A Research Textbook in Tribute to Oscar Zariski*, Progress. in Mathematics **181**,Birkhäuser Verlag Basel (2000).

[McL 1] S. MacLane: A construction for absolute values in polynomial rings. Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 363-395.

[McL 2] S. MacLane: A construction for prime ideals as absolute values of an algebraic field. Duke Math. J. **2** (1936), 492-510.

[Ri] P. Ribenboim: *Théorie des valuations*, Les Presses Universitaires de Montréal, (1964).

[Va 1] M. Vaquié: Extension d'une valuation, à paraître dans Trans. Amer. Math. Soc..

[Va 2] M. Vaquié: Famille admise associée à une valuation de $K[x]$, dans *Singularités franco-japonaises*, Séminaires et Congrès **10**, Soc. Math. Fr. (2005).

[Va 3] M. Vaquié: Algèbre graduée associée à une valuation de $K[x]$, à paraître dans *Singularities in Geometry and Topology 2004*, Advanced Studies in Pure Mathematics.

[Va 4] M. Vaquié: Valuations, dans *Resolution of Singularities - A Research Textbook in Tribute to Oscar Zariski*, Progress. in Mathematics **181**,Birkhäuser Verlag Basel (2000).

[Va 5] M. Vaquié: Extension de valuation et polygône de Newton, prépublication (2006).

[Va 6] M. Vaquié: Extension de valuation et famille admise, en préparation.