Valuations

Michel Vaquié

Contents

Introduction

La notion de place d'un corps K, notion qui est plus ou moins équivalente à la notion de valuation de K, a été introduite par Dedekind et Weber en 1882. Pour étudier les courbes algébriques planes et trouver une version algébrique des constructions de Riemann qui évite en particulier toute considération topologique ou transcendante, ils utilisent l'analogie entre la théorie des nombres algébriques et la théorie des fonctions algébriques d'une variable. Ils considèrent donc un corps K, extension finie du corps des fractions rationnelles $\mathbb{C}(X)$, et pour définir les points de l'équivalent de la Surface de Riemann correspondant à K, c'est à dire la courbe projective non singulière ayant comme corps des fonctions K, ils définissent les places de K.
A la suite des travaux de Dedekind et Weber, Hensel poursuit l'analogie entre la surface de Riemann d'un corps de fonctions algébriques et les idéaux premiers d'un corps de nombres K. Il développe la théorie des nombres p-adiques qui permet d'associer à tout élément x de K une "série p-adique" de la forme $\sum \alpha_i p^{i/e}$.
En 1913 Kürschak définit la notion de valeur absolue, et en particulier de valeur absolue ultramétrique, généralisant ainsi la valeur absolue p-adique. Et c'est Krull qui définit et étudie la notion générale de valuation en 1931 (cf. la note historique de [Bo] pour un exposé plus précis).
Les premiers travaux sur les places, et par conséquent sur les valuations se trouvent ainsi dans le domaine de l'arithmétique (Ostrowski, Deuring). Pour une approche selon ce point de vue, ainsi que du point de vue des corps valués complets et de la théorie des modèles, je renvoie à l'article de Kuhlmann dans ce volume [Ku], et à sa bibliographie. En particulier l'auteur s'y intéresse au problème du prolongement d'une valuation à une extension du corps et plus précisément à la théorie de la ramification que je n'aborde pas dans cet article. (Nous pouvons la considérer comme une généralisation au cas des valuations quelconques de la théorie de la ramification pour une valuation discrète de rang un telle qu'elle est exposée dans l'étude des corps locaux (cf. [Se]).)
Les valuations ont aussi joué un rôle très important en géométrie algébrique, en particulier avec les travaux de Zariski, puis d'Abhyankar. Leur étude était motivée par le problème de la résolution des singularités. Plus récemment l'étude des valuations pour aborder de manière totalement nouvelle le problème de la résolution des singularités a été entreprise, notamment par Spivakovsky [Sp 2], [Sp 3] et Teissier [Te]. Je renvoie pour le problème de l'uniformisation locale et de la résolution des singularités suivant les idées originales de Zariski à l'article de Cossart dans ce volume [Co].

Dans cet article je donne une présentation des résultats élémentaires principaux sur les valuations avec leur démonstration. Ces résultats sont bien connus et se trouvent dans les livres d'algèbre commutative (par exemple dans [Bo], [Na], [Z-S]). Je donne aussi les résultats nécessaires sur la Variété de Riemann pour comprendre comment Zariski obtient la résolution des singularités à partir du théorème d'uniformisation locale; ainsi que le théorème d'Abhyankar sur les valuations dominant un anneau local noethérien.

Je voudrais aussi signaler le rôle des valuations dans l'étude des idéaux d'un anneau local, étude de leurs propriétés asymptotiques, de leur multiplicité, etc... Je renvoie au livre de Rees [Re] pour cette approche et pour une bibliographie plus détaillée. Pour finir je voudrais mentionner l'approche très originale des valuations d'un corps K extension de type fini de $\mathbb{Q}$ donnée par Morgan et Shalen [M-S]. Plus précisément ils s'intéressent à une variété algebrique X_o définie sur $\mathbb{Q}$, ou sur une extension finie de $\mathbb{Q}$, dont le corps des fonctions $F(X_o)$ est égal à K, et ils considèrent la variété algébrique complexe X obtenue à partir de X_o par extension des scalaires. Ils peuvent alors décrire toutes les valuations de K en considérant des suites de points sur X, c'est à dire sans avoir besoin de regarder des variétés obtenues à partir de X_o par des éclatements.

Je remercie Bernard Teissier, Vincent Cossart et Franz-Viktor Kuhlmann pour les corrections, les remarques et les conseils qui m'ont permis d'apporter certaines précisions et de rendre plus claires plusieurs parties de ce texte.

1 Anneau de valuation

Soient A et B deux anneaux locaux d'idéaux maximaux respectifs $\max(A)$ et $\max(B)$, nous disons que B domine A si $A \subset B$ et $\max(A) = A \cap \max(B)$; si nous supposons l'inclusion $A \subset B$ alors la deuxième condition est équivalente à $\max(A) \subset \max(B)$.
La relation "B domine A", que nous notons $A \preceq B$, est une relation d'ordre sur l'ensemble des anneaux locaux. Si nous avons la relation $A \preceq B$, alors l'injection de A dans B définit un isomorphisme du corps résiduel $\kappa(A) = A/\max(A)$ sur un sous-corps du corps résiduel $\kappa(B) = B/\max(B)$.

Remarque. Si A est un anneau local noethérien le complété $\hat{A}$ de A pour la valuation $\max(A)$-adique domine A.
Soient A et B deux anneaux intègres avec $A \subset B$, alors pour tout idéal premier $\mathcal{Q}$ de B l'anneau localisé $B_{\mathcal{Q}}$ domine $A_{\mathcal{P}}$, où $\mathcal{P}$ est l'idéal premier de A défini par $\mathcal{P} = A \cap \mathcal{Q}$.

Définition. Soit V un anneau intègre contenu dans un corps K; alors V est un anneau de valuation de K si K est le corps des fractions de V et si V est un élément maximal de l'ensemble des sous-anneaux locaux de K ordonné par la relation de domination: i.e. V est un anneau local et si W est un sous-anneau local de K qui domine V, alors $W = V$.
Soit V un anneau intègre, V est un anneau de valuation si V est un anneau de valuation de son corps des fractions.

Avant de donner les propriétés caractéristiques des anneaux de valuation, nous allons rappeler le théorème suivant [Ma].

Théorème de Cohen-Seidenberg. *Soient A et B deux anneaux avec $A \subset B$ et B entier sur A, alors pour tout idéal premier $\mathcal{P}$ de A il existe un idéal premier $\mathcal{Q}$ de B au dessus de $\mathcal{P}$, c'est à dire tel que $\mathcal{P} = A \cap \mathcal{Q}$.*

Théorème 1.1. *Soit V un anneau intègre contenu dans un corps K, alors les conditions suivantes sont équivalentes:*
a) V est un anneau de valuation de K;
b) soit x un élément de K, si x n'appartient pas à l'anneau V alors son inverse x^{-1} appartient à V;
c) K est le corps des fractions de V et l'ensemble des idéaux de V est totalement ordonné par la relation d'inclusion.

Preuve. a) $\Rightarrow$ b): soit x un élément du corps K, $x \neq 0$, nous allons montrer que x ou x^{-1} appartient à V. Si x est entier sur V, nous considérons l'anneau $W = V[x]$. D'après le théorème de Cohen-Seidenberg, il existe un idéal premier $\mathcal{Q}$ de W au dessus de l'idéal maximal de V. L'anneau local $W_{\mathcal{Q}}$ domine alors l'anneau V, d'où $W \subset W_{\mathcal{Q}} = V$, et x appartient à V.

Si x n'est pas entier sur V, nous considérons l'anneau $W = V[x^{-1}]$. Comme x n'est pas entier sur V, x^{-1} n'est pas un élément inversible de l'anneau W, en effet toute relation de la forme $x^{-1}.w = 1$ avec $w \in W = V[x^{-1}]$, i.e. $w = \sum a_j x^{-j}$, donnerait une relation de dépendance intégrale de x sur V. Par conséquent il existe un idéal maximal $\mathcal{Q}$ de W contenant x^{-1} et soit V' le localisé $V' = W_{\mathcal{Q}}$. Comme x^{-1} appartient à l'idéal $\mathcal{Q}$, le morphisme composé $V \to W = V[x^{-1}] \to k = W/\mathcal{Q}$ est surjectif, et son noyau $V \cap \mathcal{Q}$ est l'idéal maximal de V. Nous en déduisons que V' est un sous-anneau de K qui domine V, par conséquent $V' = V$ et x^{-1} appartient à V.
b) $\Rightarrow$ c): soient $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ deux idéaux de V et nous supposons que $\mathcal{J}$ n'est pas inclus dans $\mathcal{I}$. Alors il existe un élément x de $\mathcal{J}$ n'appartenant pas à $\mathcal{I}$ et pour tout élément y appartenant à $\mathcal{I}$, $y \neq 0$, nous avons $x \notin (y)V$; par conséquent x/y est un élément de K n'appartenant pas à V et nous en déduisons que y/x appartient à V, c'est à dire $y \in (x)V$, d'où $y \in \mathcal{J}$. Nous avons ainsi montré que $\mathcal{I}$ est inclus dans $\mathcal{J}$ et il est clair aussi que K est le corps des fractions de V.
c) $\Rightarrow$ a): comme l'ensemble des idéaux de V est totalement ordonné par l'inclusion V possède un seul idéal maximal $\max(V)$. Soit W un sous-anneau local de K qui domine V et soit x appartenant à W, nous allons montrer que x appartient aussi à V; nous pouvons écrire $x = a/b$ avec $a \in V$ et $b \in V$. Si l'idéal $(a)V$ est inclus dans $(b)V$ alors x appartient à V. Si l'idéal $(b)V$ est inclus dans $(a)V$ alors x^{-1} appartient à V, nous en déduisons x et x^{-1} appartiennent tous les deux à W d'où $x^{-1} \notin \max(W)$ et $x^{-1} \notin \max(V)$ car W domine V. L'élément x^{-1} de K vérifie alors $x^{-1} \in V$ et $x^{-1} \notin \max(V)$ par conséquent, comme V est local, x appartient à V.

Remarque. En "a) $\Rightarrow$ b)" nous avons montré que tout anneau de valuation est intégralement clos.

Nous pouvons remplacer la condition c) par la condition équivalente suivante:

c') K est le corps des fractions de V et l'ensemble des idéaux principaux de V est totalement ordonné par la relation d'inclusion. Nous en déduisons en particulier que tout idéal de type fini de V est un idéal principal.

Nous allons maintenant montrer l'existence d'anneaux de valuation.

Proposition 1.2. *Soit A un sous-anneau d'un corps K et soit h un morphisme de A dans un corps algébriquement clos L, il existe alors un anneau de valuation V de K et un morphisme h' de V dans L tel que V contienne A, h' prolonge h et* $\max(V) = h'^{-1}(0)$.

Preuve. Nous considérons l'ensemble $\mathcal{H}$ formés des couples (B, f), où B est un sous-anneau de K et f est un homomorphisme de B dans L; nous définissons sur cet ensemble la relation d'ordre $(B, f) \preceq (C, g)$ par $B \subset C$ et g prolonge f. L'ensemble $\mathcal{H}$ muni de cette relation d'ordre est un ensemble inductif, i.e. toute partie totalement ordonnée admet une borne supérieure - si nous avons la partie $\big((B_\alpha, f_\alpha)\big)$ il suffit de prendre pour borne supérieure le couple (B, f) où B est l'union des B_α et où f est défini par les restrictions f_α. D'après le lemme de Zorn nous en déduisons que $\mathcal{H}$ admet un élément maximal (W, g). Si nous appelons $\mathcal{P}$ le noyau du morphisme $g\colon W \to L$, l'anneau V cherché est le localisé $V = W_{\mathcal{P}}$.

Corollaire. *Tout sous-anneau local A d'un corps K est dominé par au moins un anneau de valuation de K.*

Preuve. Il suffit d'appliquer la proposition précédente à $h\colon A \to L$, où L est une cloture algébrique du corps résiduel $A/\max(A)$.

Remarque. Le plus souvent nous nous donnerons un corps de base k et nous considérerons uniquement des corps K extensions de k et les sous-anneaux A qui sont des k-algèbres. Nous trouvons comme précédemment le résultat d'existence suivant.

Soit A une sous k-algèbre de K et soit h un k-morphisme de A dans un corps algébriquement clos L, il existe alors un anneau de valuation V de K qui est une k-algèbre et un k-morphisme h' de V dans L tel que V contienne A, h' prolonge h et $\max(V) = h'^{-1}(0)$.

2 Valuation

Dans la suite Γ est un groupe commutatif totalement ordonné, en particulier Γ est un groupe sans torsion. Nous notons Γ^+ le sous-ensemble des éléments "positifs" et nous avons:

$$\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^- \,,\; \Gamma^+ \cap \Gamma^- = \{0\} \quad \text{et} \quad \alpha \geq \beta \Longleftrightarrow \alpha - \beta \in \Gamma^+ \,.$$

Nous adjoignons au groupe Γ un élément $+\infty$ et nous appelons Γ_∞ l'ensemble ainsi obtenu: $\Gamma_\infty = \Gamma \cup \{+\infty\}$. Nous munissons cet ensemble d'une relation d'ordre total en posant pour tout α dans Γ, $\alpha < +\infty$ et nous posons aussi:

$$\text{pour tout } \alpha \in \Gamma \,, (+\infty) + \alpha = (+\infty) + (+\infty) = +\infty \,.$$

Définition. Soit A un anneau, nous appelons valuation de A à valeurs dans Γ une application $\nu\colon A \to \Gamma_\infty$ vérifiant les conditions suivantes:
1) $\nu(x.y) = \nu(x) + \nu(y)$ pour tout $x, y \in A$,
2) $\nu(x+y) \geq \inf\big(\nu(x), \nu(y)\big)$ pour tout $x, y \in A$,
3) $\nu(1) = 0$ et $\nu(0) = +\infty$.

Remarque. Si nous supposons que l'application ν vérifie les conditions 1) et 2) et ne prend pas uniquement la valeur $+\infty$, alors nous avons obligatoirement $\nu(1) = 0$. Plus généralement pour tout élément z de A vérifiant $z^n = 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons encore $\nu(z) = 0$ car le groupe Γ est sans torsion, en particulier $\nu(-1) = 0$.

Définition. L'unique valuation ν de A vérifiant $\nu(x) = 0$ pour tout x appartenant à A^* est appelée valuation impropre de A.

Proposition 2.1. *Soit ν une valuation d'un anneau A, pour toute famille finie $\big(x_1, \ldots, x_n\big)$ d'éléments de A nous avons l'inégalité:*

$$\nu\big(\sum_{i=1}^{n} x_i\big) \geq \inf\nolimits_{1 \leq i \leq n}\big(\nu(x_i)\big)\,.$$

De plus s'il existe un indice k tel que pour tout $i \neq k$ nous ayons l'inégalité stricte $\nu\big(x_i\big) > \nu\big(x_k\big)$, alors nous avons l'égalité:

$$\nu\big(\sum_{i=1}^{n} x_i\big) = \inf\nolimits_{1 \leq i \leq n}\big(\nu(x_i)\big) = \nu(x_k)\,.$$

Preuve. La première partie se démontre par récurrence sur n en utilisant l'axiome 2) de la définition d'une valuation. Pour la deuxième partie nous pouvons nous ramener grâce à ce qui précède au cas $n = 2$. Si x et y sont deux éléments de A avec $\nu(x) < \nu(y)$, nous déduisons de la définition les deux inégalités $\nu(x+y) \geq \nu(x)$ et $\nu(x) \geq \inf\big(\nu(x+y), \nu(-y)\big)$, et comme nous avons $\nu(-y) = \nu(y) > \nu(x)$ nous trouvons l'égalité cherchée.

Remarque. Si ν est une valuation de A à valeurs dans Γ et si $f\colon B \to A$ est un morphisme d'anneaux, l'application composée $\nu \circ f\colon B \to \Gamma_\infty$ définit une valuation de B à valeurs dans Γ.

Remarque. Pour toute valuation ν d'un anneau A à valeurs dans Γ, l'image réciproque $\nu^{-1}(+\infty)$ est un idéal premier $\mathcal{P}$ de A. L'application $\bar{\nu}\colon A/\mathcal{P} \to \Gamma_\infty$ déduite de ν par passage au quotient définit une valuation de l'anneau intègre $A/\mathcal{P}$ telle que l'image réciproque de $+\infty$ est réduite à 0.

Proposition 2.2. *Soient A un anneau intègre de corps des fractions K et ν une valuation de A à valeurs dans Γ telle que pour tout $x \neq 0$ nous ayons $\nu(x) \neq +\infty$. Alors il existe une valuation μ de K et une seule qui prolonge ν.*
De plus $\mu\big(K^*\big)$ est le sous-groupe de Γ engendré par $\nu\big(A^*\big)$.

Preuve. Pour tout x dans K^* il existe y et z appartenant à A^* tels que $x = y/z$, il suffit alors de poser $\mu(x) = \nu(y) - \nu(z)$. Nous vérifions immédiatement que $\mu(x)$ ne dépend pas des éléments y et z choisis et que l'application μ ainsi définie est une valuation de K qui prolonge ν, et qu'elle est unique. Par construction il est clair que $\mu\bigl(K^*\bigr)$ est le sous-groupe de Γ engendré par le semi-groupe $\nu\bigl(A^*\bigr)$.

Nous allons montrer maintenant la relation qui existe entre les valuations d'un corps K et les anneaux de valuations de ce corps.

Proposition 2.3. *Soit ν une valuation d'un corps K à valeurs dans un groupe Γ. Alors l'ensemble A des éléments x de K vérifiant $\nu(x) \geq 0$ est un anneau de valuation de K, dont l'idéal maximal* $\max(A)$ *est l'ensemble des x vérifiant $\nu(x) > 0$.*
Réciproquement, si V est un anneau de valuation de K nous pouvons lui associer une valuation ν de K à valeurs dans un groupe Γ_V telle que l'anneau V soit l'image réciproque $\nu^{-1}\bigl(\Gamma_V^+\bigr)$.

Preuve. Nous déduisons des axiomes d'une valuation que l'ensemble A des éléments x de K vérifiant l'inégalité $\nu(x) \geq 0$ est un sous-anneau de K et nous déduisons de la condition b) du théorème 1.1 que c'est un anneau de valuation de K. De plus, commme A est local, un élément x de K vérifie $\nu(x) = 0$ si et seulement si x et x^{-1} appartiennent à A, c'est à dire si et seulement si x appartient à $A \setminus \max(A)$.

Pour la réciproque, plus généralement nous considérons un anneau intègre C de corps des fractions K; l'ensemble $U(C)$ des éléments inversibles de C est un sous-groupe du groupe multiplicatif K^* et nous notons Γ_C le groupe quotient. La relation de divisibilité dans C: $x|y \iff y \in (x)C$, définit une structure de groupe ordonné sur Γ_C. Plus précisément, si nous notons respectivement $\bar{x}$ et $\bar{y}$ les classes des éléments x et y de K^* dans le groupe quotient $\Gamma_C = K^*/U(C)$, alors la relation est définie par $\bar{x} \leq \bar{y} \iff \exists z \in C$ tel que $y = zx$. La relation "$\leq$" est bien définie sur l'espace quotient $K^*/U(C)$, en effet la relation $\bar{x} \leq \bar{y}$ ne dépend pas des représentants x et y choisis. Cette relation est une relation d'ordre sur le groupe Γ_C, compatible avec la structure de groupe, et qui correspond à la relation d'ordre définie par l'inclusion sur l'ensemble des idéaux principaux de l'anneau C. Nous déduisons alors de la remarque suivant le théorème 1.1 que le groupe Γ_C est totalement ordonné si et seulement si C est un anneau de valuation de K. Comme C est un anneau local nous avons l'égalité $U(C) = C \setminus \max(C)$. L'application canonique $\nu\colon K^* \to \Gamma_C = K^*/U(C)$ est alors une valuation de K telle que l'anneau C est égal à l'anneau de valuation associé $\bigl\{x \in K \,/\, \nu(x) \geq 0\bigr\}$.

Définition. L'anneau de valuation V de K associé à la valuation ν est appelé l'anneau de la valuation ν et le corps $\kappa(V) = V/\max(V)$ est appelé le corps résiduel de la valuation. Le sous-groupe $\nu\bigl(K^*\bigr)$ de Γ est appelé groupe des ordres ou groupe des valeurs de ν. Nous déduisons de ce qui précède qu'il est isomorphe au groupe quotient $\Gamma_V = K^*/U(V)$.

Pour toute valuation ν d'un corps K, nous noterons R_ν son anneau de valuation, κ_ν son corps résiduel et Γ_ν son groupe des ordres.

Définition. Nous disons que deux valuations ν et ν' de K sont équivalentes si elles ont même anneau.

Proposition 2.4. *Deux valuations ν et ν' d'un corps K sont équivalentes si et seulement si il existe un isomorphisme de groupes ordonnés λ de $\nu\big(K^*\big)$ dans $\nu'\big(K^*\big)$ tel que $\nu' = \lambda \circ \nu$.*

Preuve. En effet il suffit de remarquer que par définition la valuation détermine l'anneau V et réciproquement l'anneau V de la valuation détermine le groupe des ordres: $\Gamma = K^*/U(V)$, ainsi que le sous-ensemble des éléments "positifs": $\Gamma^+ = V^*/U(V)$.

3 Hauteur d'une valuation

Nous supposons toujours que Γ est un groupe commutatif totalement ordonné.

Définition. Soit Γ un groupe totalement ordonné, une partie Δ de Γ est appelée un segment si pour tout élément α appartenant à Δ, tout élément β de Γ compris entre α et $-\alpha$, i.e. β vérifiant soit $-\alpha \leq \beta \leq \alpha$ soit $\alpha \leq \beta \leq -\alpha$, appartient à Δ. Un sous-groupe Γ' de Γ est appelé un sous-groupe isolé si Γ' est à la fois un sous-groupe propre de Γ et un segment.

Proposition 3.1. *Le noyau d'un homomorphisme croissant de Γ dans un groupe ordonné est un sous-groupe isolé de Γ.*
Réciproquement si Γ' est un sous-groupe isolé de Γ, le groupe quotient Γ/Γ' possède une structure naturelle de groupe ordonné telle que $\Gamma \to \Gamma/\Gamma'$ soit un homorphisme croissant.

Nous considérons une valuation ν d'un corps K à valeurs dans le groupe Γ, avec Γ égal au groupe des ordres, i.e. nous supposons que ν est surjective, et soit V l'anneau de valuation associé à ν. Pour toute partie A de V contenant 0 nous définissons le sous-ensemble Δ_A de Γ comme le complémentaire dans Γ_∞ de $\big(\nu(A)\big) \cup \big(-\nu(A)\big)$.

Théorème 3.2. *Si $\mathcal{I}$ est un idéal propre de V le sous-ensemble $\Delta_{\mathcal{I}}$ est un segment de Γ. L'application $\mathcal{I} \mapsto \Delta_{\mathcal{I}}$ est une bijection de l'ensemble des idéaux de V sur l'ensemble des segments de Γ, et nous avons l'équivalence:*

$$\mathcal{I} \subset \mathcal{J} \Longleftrightarrow \Delta_{\mathcal{J}} \subset \Delta_{\mathcal{I}}\,.$$

Le segment $\Delta_{\mathcal{I}}$ est un sous-groupe isolé de Γ si et seulement si $\mathcal{I}$ est un idéal premier de V.

Preuve. Soit b un élément de Γ^+ n'appartenant pas au sous-ensemble $\Delta_{\mathcal{I}}$, il suffit de montrer que pour tout a dans Γ nous avons: $a \geq b \Longrightarrow a \notin \Delta_{\mathcal{I}}$. Par hypothèse sur b il existe un élément x de l'idéal $\mathcal{I}$ tel que $b = \nu(x)$, comme l'application ν

est surjective nous déduisons de l'inégalité $a \geq b$ l'existence d'un élément y de l'anneau V tel que $\nu(y) = a - b$. Alors xy appartient à l'idéal $\mathcal{I}$ de V et $a = \nu(xy)$ n'appartient pas à $\Delta_{\mathcal{I}}$.

Réciproquement si Δ est un segment de Γ, il faut montrer que le sous-ensemble $\{x \in V \,/\, \nu(x) \notin \Delta\}$ est un idéal de V:

$$\begin{aligned}
x \in \mathcal{I} \text{ et } y \in V \quad &\Rightarrow \quad \nu(x) \notin \Delta\,,\ \nu(x) \text{ et } \nu(y) \geq 0 \\
&\Rightarrow \quad \nu(x) + \nu(y) \notin \Delta \\
&\Rightarrow \quad xy \in \mathcal{I}; \\
x \text{ et } y \in \mathcal{I} \quad &\Rightarrow \quad \nu(x) \text{ et } \nu(y) \notin \Delta \\
&\Rightarrow \quad \nu(x+y) \notin \Delta \text{ car } \nu(x+y) \geq \inf\big(\nu(x), \nu(y)\big), \\
&\Rightarrow \quad x + y \in \mathcal{I}.
\end{aligned}$$

La relation $\mathcal{I} \subset \mathcal{J} \iff \Delta_{\mathcal{J}} \subset \Delta_{\mathcal{I}}$ est évidente, d'où la bijection car l'ensemble des idéaux de V et l'ensemble des segments de Γ sont totalement ordonnés par l'inclusion. L'idéal $\mathcal{I}$ de V est un idéal premier si et seulement si le complémentaire $V \smallsetminus \mathcal{I}$ est stable par multiplication, c'est à dire si et seulement si son image $\nu\big(V \smallsetminus \mathcal{I}\big)$ est stable par addition, ce qui est bien équivalent à la condition $\Delta_{\mathcal{I}}$ sous-groupe de Γ.

Définition. Le rang "rang(Γ)" d'un groupe totalement ordonné Γ est égal au nombre de ses sous-groupes isolés si ceux ci sont en nombre fini, et est infini sinon.
La hauteur ou le rang de la valuation ν d'un corps K est le rang du groupe des valeurs Γ, et nous le notons $\mathrm{ht}(\nu)$ ou $\mathrm{rang}(\nu)$.

Remarque. Au lieu de considérer les segments Δ du groupe Γ, nous pouvons considérer les sous-ensembles majeurs M, c'est à dire les sous-ensembles M de Γ vérifiant: $x \in M$ et $y \geq x \implies y \in M$. Nous obtenons une bijection croissante entre l'ensemble des sous-ensembles majeurs M de Γ et l'ensemble des sous V-modules $\mathcal{M}$ de K, bijection définie par $M \mapsto \mathcal{M} = \big\{x \in K \,/\, \nu(x) \in M \cap \{+\infty\}\big\}$.

Pour tout élément α du groupe $\Gamma = \Gamma_\nu$, nous pouvons définir les idéaux $\mathcal{P}_\alpha\big(R_\nu\big)$ et $\mathcal{P}_{\alpha+}\big(R_\nu\big)$ de l'anneau de valuation $V = R_\nu$ par:

$$\mathcal{P}_\alpha\big(R_\nu\big) = \big\{x \in R_\nu \,/\, \nu(x) \geq \alpha\big\} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{\alpha+}\big(R_\nu\big) = \big\{x \in R_\nu \,/\, \nu(x) > \alpha\big\}\,.$$

Nous pouvons définir aussi une algèbre de Rees associée par:

$$\mathcal{A}_\nu\big(R_\nu\big) = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} \mathcal{P}_\alpha\big(R_\nu\big) v^{-\alpha} \subset R_\nu[v^\Gamma]\,.$$

Ces idéaux et cette algèbre graduée jouent un rôle important dans l'étude de la valuation ν (cf. [Te]).

Remarque. Si l'anneau de valuation V n'est pas noethérien, il peut avoir d'autres idéaux que les idéaux $\mathcal{P}_\alpha(V)$ et $\mathcal{P}_{\alpha+}(V)$. Nous allons donner deux exemples d'un anneau de valuation V et d'un idéal $\mathcal{P}$ de V qui n'est pas de cette forme.

Exemple 1. Si le groupe des ordres de la valuation est égal à $\mathbb{Q}$, pour tout nombre réel $\beta > 0$ appartenant à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ l'ensemble $\mathcal{P} = \{x \in V \,/\, \nu(x) \geq \beta\}$, qui est égal aussi à $\{x \in V \,/\, \nu(x) > \beta\}$ car $\beta \notin \Gamma$, est un idéal de l'anneau de valuation V. Mais il n'existe pas d'élément α appartenant à $\Gamma = \mathbb{Q}$ tel que cet idéal soit égal à $\mathcal{P}_\alpha(V)$ ou à $\mathcal{P}_{\alpha+}(V)$. Si la valuation ν est de hauteur supérieure ou égale à 2 et si $\mathcal{P}$ est un idéal premier de l'anneau de valuation V, distinct de (0) et de l'idéal maximal, il n'existe pas d'élément α appartenant au groupe des ordres Γ de ν tel que l'idéal $\mathcal{P}$ soit égal à $\mathcal{P}_\alpha(V)$ ou à $\mathcal{P}_{\alpha+}(V)$.

Corollaire. *La hauteur de la valuation ν est égale à la dimension de l'anneau de valuation V associé à ν.*

Preuve. En effet la hauteur de la valuation ν est égale au nombre de sous-groupes isolés de Γ, donc au nombre d'idéaux premiers propres de l'anneau V. Comme l'ensemble de ces idéaux est totalement ordonné par l'inclusion ce nombre, s'il est fini, est la dimension de l'anneau V.

Proposition 3.3. *Soient K un corps et V un anneau de valuation de K.*
a) Tout anneau local R vérifiant $V \subset R \subset K$ est un anneau de valuation de K. L'idéal maximal $\max(R)$ *de R est contenu dans l'anneau V et est un idéal premier de V.*
b) L'application $\mathcal{P} \mapsto V_\mathcal{P}$ est une bijection décroissante de l'ensemble des idéaux premiers $\mathcal{P}$ de V dans l'ensemble des anneaux locaux R tels que $V \subset R \subset K$. La bijection réciproque est définie par $R \mapsto \max(R)$.

Preuve. De la condition b) du théorème 1.1 nous déduisons que l'anneau R est un anneau de valuation et que son idéal maximal $\max(R)$ est inclus dans V. Comme $\max(R)$ est un idéal premier de R, c'est aussi un idéal premier de V.
Pour tout idéal premier $\mathcal{P}$ de V, l'anneau localisé $V_\mathcal{P}$ vérifie bien $V \subset V_\mathcal{P} \subset K$, et l'application $\mathcal{P} \mapsto V_\mathcal{P}$ est strictement décroissante. De plus nous vérifions que l'idéal maximal $\mathcal{P}V_\mathcal{P}$ du localisé est égal à l'idéal premier $\mathcal{P}$ de V.

Nous voyons ainsi que l'étude des idéaux premiers $\mathcal{P}$ de V, c'est à dire l'étude des sous-groupes isolés du groupe des ordres Γ, se ramène à l'étude des anneaux R vérifiant $V \subset R \subset K$.

Soit V l'anneau de valuation associé à une valuation ν de K de groupe des valeurs Γ, et nous supposons que ν est de rang fini r. Nous notons $\mathcal{P}_i$, V_i et Δ_i, $0 \leq i \leq r$, respectivement les idéaux premiers de V, les sous-anneaux de K contenant V et les sous-groupes isolés de Γ, avec les relations: $\mathcal{P}_i = \max(V_i)$ et $V_i = V_{\mathcal{P}_i}$; $\Delta_i = \Delta_{\mathcal{P}_i}$, c'est à dire le complémentaire de $\big(\nu(\mathcal{P}_i)\big) \cup \big(-\nu(\mathcal{P}_i)\big)$ dans Γ. Nous notons Γ_i le groupe quotient Γ/Δ_i qui est un groupe totalement ordonné.
Nous avons alors les inclusions:

$$\begin{array}{l}(0) = \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{P}_{r-1} \subset \mathcal{P}_r = \max(V)\\ V = V_r \subset V_{r-1} \subset \ldots \subset V_1 \subset V_0 = K\\ (0) = \Delta_r \subset \Delta_{r-1} \subset \ldots \subset \Delta_1 \subset \Delta_0 = \Gamma.\end{array}$$

Le groupe des ordres de la valuation ν_i associée à l'anneau de valuation $V_i = V_{\mathcal{P}_i}$ est alors le groupe quotient $\Gamma_i = \Gamma/\Delta_i$ et l'application $\nu_i\colon K^* \to \Gamma_i$ est la composée de l'application $\nu\colon K^* \to \Gamma$ et de l'application canonique $\Gamma \to \Gamma_i$. Nous vérifions aussi que l'inclusion de $U(V) = V \smallsetminus \mathcal{P}_r$ dans $U(V_i) = V_i \smallsetminus \mathcal{P}_i$ définit l'application canonique du groupe $\Gamma = K^*/U(V)$ dans le groupe quotient $\Gamma_i = K^*/U(V_i)$ (cf. Proposition 4.1).

Exemple 2. La valuation impropre de K, c'est à dire la valuation ν définie par $\nu(x) = 0$ pour tout $x \in K^*$, est l'unique valuation de hauteur nulle.

Exemple 3. La valuation ν de K est de hauteur 1 si et seulement si le groupe des ordres Γ de ν est isomorphe à un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. C'est équivalent à dire que le groupe Γ est archimédien, c'est à dire que pour tout α et β dans Γ avec $\beta > 0$, il existe un entier n tel que $n\beta \geq \alpha$. L'anneau de valuation V associé à ν est de dimension 1, et nous déduisons de la proposition précédente que l'anneau V est maximal parmi les sous-anneaux propres de K.

Exemple 4. La valuation ν est une valuation discrète de K si son groupe des ordres Γ est un groupe discret de rang fini, i.e. isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$. En particulier nous disons que la valuation ν est discrète de rang 1 si son groupe des ordres est isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, et nous pouvons toujours supposer qu'il est égal à $\mathbb{Z}$; nous disons que l'anneau associé V est un anneau de valuation discrète de rang 1.

Proposition 3.4. *Soit A un anneau local intègre distinct de son corps des fractions K. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*
a) A est un anneau de valuation discrète de rang 1;
b) A est un anneau principal;
c) l'idéal maximal $\max(A)$ *est principal et l'anneau A est noethérien;*
d) A est un anneau de valuation noethérien.

Preuve. a) $\Rightarrow$ b): par hypothèse le groupe des ordres est isomorphe à $\mathbb{Z}$, les seuls segments sont alors de la forme $[-n, n]$, pour $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent tout idéal $\mathcal{I}$ de A est un idéal du type $\mathcal{P}_n$ et est engendré par tout élément x de l'anneau A vérifiant $\nu(x) = n$ où $n = \nu(\mathcal{I}) = \inf\{\nu(y) \,/\, y \in \mathcal{I}\}$.
b) $\Rightarrow$ c): évident.
c) $\Rightarrow$ d): nous allons définir une valuation ν sur A appelée la valuation $\mathcal{M}$-adique, où $\mathcal{M}$ est l'idéal maximal $\max(A)$ de A. Comme A est noethérien nous avons $\bigcap_{n\geq 0} \mathcal{M}^n = (0)$, par conséquent pour tout élément non nul x de A nous pouvons définir $\nu(x)$ comme le plus grand entier n tel que x appartienne à $\mathcal{M}^n$, c'est à dire $\nu(x) \geq n \iff x \in \mathcal{M}^n$. Si nous appelons u un générateur de l'idéal maximal $\mathcal{M}$ de A, tout élément x de A s'écrit sous la forme $x = yu^n$ avec $n = \nu(x)$ et où y est un élément inversible de A. Tout élément z de K s'écrit alors $z = yu^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et y élément inversible de A, nous en déduisons que ν est bien une valuation discrète de rang 1 de K et que A est l'anneau associé.

d) $\Rightarrow$ a): si A est noethérien, toute suite croissante d'idéaux de A est stationnaire, par conséquent toute suite décroissante d'éléments de Γ^+ doit aussi être stationnaire. Alors le groupe Γ est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Remarque. Si ν est une valuation discrète de rang 1, nous supposons que son groupe des ordres Γ est égal à $\mathbb{Z}$, c'est à dire que la valuation ν est bien la valuation $\mathcal{M}$-adique définie précédemment, où $\mathcal{M}$ est l'idéal maximal de l'anneau de valuation A. Alors tout élément u de K vérifiant $\nu(u) = 1$ est un générateur de l'idéal maximal $\mathcal{M}$ de A. Un tel élément u est appelé une uniformisante. De plus les seuls idéaux de A sont les idéaux $\big(u^n\big)A$.

Définition. Le rang rationnel d'un groupe commutatif Γ est la dimension du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Le rang rationnel d'une valuation ν d'un corps K est le rang rationnel de son groupe des ordres Γ, nous le notons rang rat.(ν) = rang rat.$(\Gamma) = \dim_{\mathbb{Q}}\big(\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}\big)$.

Le rang rationnel d'un groupe Γ est nul si et seulement si Γ est un groupe de torsion. Le rang rationnel d'un groupe Γ est égal au plus grand entier r tel qu'il existe r éléments de Γ linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$, si le rang rationnel est fini.

Proposition 3.5. *Soient Γ un groupe commutatif et Γ' un sous-groupe de Γ. Alors nous avons l'égalité:*

$$\textit{rang rat.}(\Gamma) = \textit{rang rat.}(\Gamma') \ + \textit{rang rat.}\big(\Gamma/\Gamma'\big)\,.$$

Si le groupe Γ est totalement ordonné nous avons l'inégalité:

$$\textit{rang}(\Gamma) \leq \textit{rang}(\Gamma') \ + \textit{rang rat.}\big(\Gamma/\Gamma'\big)\,.$$

En particulier nous avons toujours l'inégalité rang$(\Gamma) \leq$ rang rat.(Γ), d'où pour toute valuation ν l'inégalité:

$$\textit{ht}(\nu) \leq \ \textit{rang rat.}(\nu)\,.$$

Preuve. L'égalité rang rat.(Γ) = rang rat.$(\Gamma')+$ rang rat.$\big(\Gamma/\Gamma'\big)$ est immédiate par définition du rang rationnel (et car $\mathbb{Q}$ est plat sur $\mathbb{Z}$).

Pour démontrer l'inégalité nous allons montrer par récurrence sur n que si nous avons une suite strictement croissante de longueur n, $\Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \ldots \subset \Gamma_n$, de sous-groupes isolés de Γ, alors nous avons: $n \leq \mathrm{rang}(\Gamma') + \mathrm{rang\ rat.}\big(\Gamma/\Gamma'\big)$.

C'est évident pour $n = 0$. Supposons que c'est vrai à l'ordre $n-1$, par hypothèse de récurrence appliquée à Γ_{n-1} nous avons:

$$n-1 \leq \mathrm{rang}(\Gamma' \cap \Gamma_{n-1}) \ + \mathrm{rang\ rat.}\big(\Gamma_{n-1}/\Gamma' \cap \Gamma_{n-1}\big)\,.$$

Si $\Gamma' \cap \Gamma_{n-1}$ est égal à Γ', c'est à dire si Γ' est inclus dans Γ_{n-1}, nous avons:

$$n-1 \leq \mathrm{rang}(\Gamma') + \mathrm{rang\ rat.}\big(\Gamma_{n-1}/\Gamma'\big)\,;$$

comme le groupe Γ/Γ_{n-1} est totalement ordonné, il est sans torsion et vérifie rang rat.$\big(\Gamma/\Gamma_{n-1}\big) \geq 1$. Nous déduisons alors de la première partie de la proposition rang rat.$\big(\Gamma_{n-1}/\Gamma'\big) \leq$ rang rat.$\big(\Gamma/\Gamma'\big) - 1$, d'où l'inégalité cherchée. Si $\Gamma' \cap \Gamma_{n-1}$ n'est pas égal à Γ', c'est un sous-groupe isolé propre de Γ', d'où:

$$\mathrm{rang}(\Gamma') \geq \mathrm{rang}(\Gamma' \cap \Gamma_{n-1}) + 1$$

et nous déduisons de rang rat.$\big(\Gamma/\Gamma'\big) \geq$ rang rat.$\big(\Gamma_{n-1}/\Gamma' \cap \Gamma_{n-1}\big)$, l'inégalité cherchée.

Définition. Un groupe Γ est divisible s'il vérifie la propriété suivante:

$$\text{pour tout } x \in \Gamma\,,\ \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*\,,\, \exists x' \in \Gamma \quad \text{tel que} \quad nx' = x\,.$$

Pour tout groupe sans torsion Γ il existe un plus petit groupe divisible le contenant, c'est à dire un groupe Γ^* divisible vérifiant $\Gamma \subset \Gamma^*$ et tout groupe divisible Γ" contenant Γ contient aussi Γ^*. Nous appelons le groupe Γ^* la fermeture divisible de Γ, c'est le groupe $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Il peut aussi être défini comme l'ensemble quotient de $\big\{(\gamma, m, n) \in \Gamma \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\big\}$ par la relation d'équivalence $(\gamma, m, n) \simeq (\gamma', m', n') \Longleftrightarrow n'm\gamma = nm'\gamma'$.

Remarque. Tout groupe divisible totalement ordonné Γ de rang fini h, est isomorphe à un groupe ordonné Γ' de la forme

$$\Gamma' = \big(\Gamma_1 \oplus \ldots \oplus \Gamma_h\big)\,,$$

où chaque Γ_i est un groupe divisible archimédien, i.e. est un sous-groupe de $\big(\mathbb{R}, +\big)$, et où l'ordre sur Γ' est l'ordre lexicographique [Ab 2]. Nous déduisons de ce résultat et de l'existence de la fermeture divisible que tout groupe totalement ordonné Γ de rang fini h est isomorphe à un sous-groupe ordonné de $\big(\mathbb{R}^h, +\big)_{lex}$.

Exemple 5. Il existe des groupes ordonnés qui ne sont isomorphes à aucun groupe de la forme $\Gamma = \big(\Gamma_1 \oplus \ldots \oplus \Gamma_h\big)_{lex}$. Soit Γ le sous-groupe ordonné de $G = \big(\mathbb{R}^2, +\big)_{lex}$ engendré par les éléments $\alpha_k = \big(1/2^k, 0\big)$, pour $k \geq 0$, et l'élément $\beta = \big(1/3, 1/3\big)$. Le groupe Γ est un sous-groupe non divisible de rang rationnel deux. Tout sous-groupe isolé $\bar{\Gamma}$ de Γ est de la forme $\Gamma \cap \bar{G}$, où $\bar{G}$ est un sous-groupe isolé de $\big(\mathbb{R}^2, +\big)_{lex}$. Nous vérifions que le sous-groupe $\bar{\Gamma}$ défini par $\bar{\Gamma} = \Gamma \cap \big(\{0\} \times \mathbb{R}\big)$ est égal à $\big(\{0\} \times \mathbb{Z}\big)$ et nous en déduisons que Γ est un groupe ordonné de rang deux. Si Γ pouvait s'écrire sous la forme $\big(\Gamma_1 \oplus \Gamma_2\big)_{lex}$, alors Γ_1 et Γ_2 seraient deux sous-groupes de Γ vérifiant que Γ_1 est isomorphe au groupe quotient $\Gamma' = \Gamma/\bar{\Gamma}$ et que Γ_2 est égal à $\bar{\Gamma}$. Le groupe Γ' est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ et l'application canonique de Γ dans Γ' est la projection $\gamma = (x, y) \longmapsto x$. Alors comme Γ' est engendré par les éléments $1/2^k$, $k \geq 0$ et $1/3$, il devrait exister des éléments γ_k et δ dans le sous-groupe Γ_1 de la forme $\gamma_k = \big(1/2^k, y_k\big)$ et $\delta = \big(1/3, z\big)$. Par construction les éléments $\gamma_k - \alpha_k$, $k \geq 0$, et $\delta - \beta$ sont dans le sous-groupe $\bar{\Gamma}$, par conséquent les y_k et $z - 1/3$ sont des entiers. De plus pour tout $k \geq 0$, $\gamma_0 - 2^k\gamma_k$ appartient à l'intersection $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$, donc est nul et nous en déduisons $y_0 = 0$. De même $\gamma_0 - 3\delta$ est nul et nous en déduisons $z = 0$, ce qui contredit la condition $z - 1/3 \in \mathbb{Z}$.

Nous pouvons remarquer que si nous munissons ce groupe Γ de l'ordre lexicographique inverse, ou ce qui revient au même si nous considérons le sous-groupe $\tilde{\Gamma}$ de $\left(\mathbb{R}^2, +\right)_{lex}$ engendré par les éléments $\tilde{\alpha}_k = \left(0, 1/2^k\right)$, pour $k \geq 0$, et l'élément $\beta = \left(1/3, 1/3\right)$, nous pouvons trouver une décomposition $\tilde{\Gamma} = \left(\tilde{\Gamma}_1 \oplus \tilde{\Gamma}_2\right)_{lex}$, où $\tilde{\Gamma}_1$ est le sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$ engendré par β et où $\tilde{\Gamma}_2$ est le sous-groupe isolé engendré par les $\tilde{\alpha}_k$, $k \geq 0$.

4 Valuations composées

Soit ν une valuation d'un corps K, d'anneau de valuation V et de groupe des ordres Γ. Nous supposons que le rang de ν est strictement plus grand que 1, par conséquent il existe une valuation ν' de K dont l'anneau de valuation V' contient l'anneau V. Nous appelons $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ les idéaux maximaux respectifs de V et V', alors $\mathcal{P}'$ est un idéal premier de V et V' est égal au localisé $V_{\mathcal{P}'}$. Nous appelons Γ' le groupe des ordres de la valuation ν' et nous appelons $\bar{\Gamma}$ le sous-groupe isolé de Γ correspondant à l'idéal premier $\mathcal{P}'$ de V.

Proposition 4.1. *a) Le groupe des ordres Γ' est naturellement isomorphe au groupe quotient $\Gamma/\bar{\Gamma}$.*
b) L'anneau quotient $\bar{V} = V/\mathcal{P}'$ est un anneau de valuation du corps résiduel $\bar{K} = \kappa(V') = V'/\mathcal{P}'$, et la valuation associée $\bar{\nu}$ admet pour groupe des ordres le groupe $\bar{\Gamma}$.

Preuve. a) Les valuations ν et ν' peuvent être définies comme les applications naturelles $\nu\colon K^* \to K^*/U(V) = \Gamma$ et $\nu'\colon K^* \to K^*/U(V') = \Gamma'$. Nous déduisons de $V \subset V'$ et $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$ que $U(V) = V \smallsetminus \mathcal{P}$ est inclus dans $V' \smallsetminus \mathcal{P}' = U(V')$, d'où un morphisme surjectif de groupes ordonnés $\phi\colon \Gamma \to \Gamma'$ tel que $\nu' = \phi \circ \nu$. Nous voulons montrer que le noyau de ϕ est le sous-groupe $\bar{\Gamma}$, pour cela il suffit de montrer qu'un élément α de Γ^+ appartient à $\mathrm{Ker}\phi$ si et seulement s'il appartient à $\bar{\Gamma}^+$. Soit $\alpha = \nu(x)$, c'est à dire α est l'image de $x \in V$ dans $\Gamma^+ = V^*/U(V)$; alors α appartient à $\mathrm{Ker}\phi$ si et seulement si x appartient à $U(V') = V \smallsetminus \mathcal{P}'$. Or d'après le théorème 3.2, le sous-groupe isolé $\bar{\Gamma}$ associé à l'idéal premier $\mathcal{P}'$ de V est défini par $\bar{\Gamma} \cap \Gamma^+ = \bar{\Gamma}^+ = \nu\left(V \smallsetminus \mathcal{P}'\right)$, d'où $\mathrm{Ker}\phi \cap \Gamma^+ = \bar{\Gamma}^+$.
b) Comme V est un anneau de valuation de K, l'anneau $\bar{V} = V/\mathcal{P}'$ est un anneau de valuation de $\bar{K} = V'/\mathcal{P}'$, il suffit par exemple de considérer la condition b) du théorème 1.1. Le groupe des ordres de la valuation $\bar{\nu}$ de associée à $\bar{V}$ est isomorphe au groupe $\bar{K}^*/U(\bar{V})$ et il suffit alors de trouver une suite exacte:

$$0 \longrightarrow \bar{K}^*/U(\bar{V}) \longrightarrow K^*/U(V) \longrightarrow K^*/U(V') \longrightarrow 0\,.$$

Nous définissons un morphisme $\bar{K}^* \to K^*/U(V)$ de la manière suivante: soit $\bar{x} \in \bar{K}$ correspondant à la classe d'un élément x de V' et comme $\bar{x} \neq 0$, x n'appartient pas à l'idéal $\mathcal{P}'$, nous associons alors à $\bar{x}$ l'élément $\hat{x}$ classe de x dans $K^*/U(V)$. Montrons que ce morphisme est bien défini: si $\bar{x}$ est égal à $\bar{y}$, $x - y$ appartient à l'idéal $\mathcal{P}'$; nous avons alors $\nu(x-y) \notin \bar{\Gamma}$. Par hypothèse x et y n'appartiennent pas à $\mathcal{P}'$, c'est à dire $\nu(x)$ et $\nu(y)$ sont dans $\bar{\Gamma}$ et comme $\bar{\Gamma}$ est un sous-groupe isolé de Γ nous avons forcément $\nu(x) = \nu(y)$, c'est à dire $\hat{x} = \hat{y}$ dans $K^*/U(V)$. Il est ensuite facile de vérifier que nous avons une suite exacte de groupes qui respecte la structure de groupes ordonnés.

Définition. La valuation ν est appelée la valuation composée avec les valuations ν' et $\bar{\nu}$ et nous écrivons $\nu = \nu' \circ \bar{\nu}$.

Corollaire. *Si ν est la valuation composée avec les valuations ν' et $\bar{\nu}$ nous avons les égalités:*

$$\mathit{rang}(\nu) = \mathit{rang}(\nu') \;+\; \mathit{rang}(\bar{\nu})$$

$$\mathit{rang\ rat.}(\nu) = \mathit{rang\ rat.}(\nu') \;+\; \mathit{rang\ rat.}(\bar{\nu})\,.$$

Preuve. Nous appelons Γ, Γ' et $\bar{\Gamma}$ les groupes des ordres respectifs des valuations ν, ν' et $\bar{\nu}$. Nous avons alors un isomorphisme de groupes ordonnés entre Γ' et le groupe quotient $\Gamma/\bar{\Gamma}$. La deuxième égalité est exactement l'égalité de la proposition 3.5. Pour démontrer la première égalité il suffit de vérifier que si $\bar{\Gamma}$ est un sous-groupe isolé d'un groupe totalement ordonné Γ nous avons:

$$\operatorname{rang}(\Gamma) = \;\operatorname{rang}(\bar{\Gamma}) \;+\; \operatorname{rang}(\Gamma/\bar{\Gamma})\,.$$

Réciproquement il est toujours possible de définir la valuation composée ν d'une valuation ν' de K et d'une valuation $\bar{\nu}$ du corps résiduel $\kappa_{\nu'}$.

Proposition 4.2. *La valuation composée $\nu = \nu' \circ \bar{\nu}$ de la valuation ν' de K et de la valuation $\bar{\nu}$ du corps résiduel $\kappa_{\nu'}$ est la valuation de K associée au sous-anneau V de l'anneau $R_{\nu'}$ défini par $V = \big\{x \in R_{\nu'} \,/\, \bar{\nu}(\bar{x}) \geq 0\big\}$.*

Preuve. Comme V est l'image inverse de l'anneau $R_{\bar{\nu}}$ associé à la valuation $\bar{\nu}$ du corps résiduel $\kappa_{\nu'}$ par l'application canonique $\iota\colon R_{\nu'} \longrightarrow \kappa_{\nu'}$, c'est un anneau de valuation de K, associé à une valuation ν. Nous pouvons alors vérifier que la valuation ν ainsi définie est bien la valuation composée $\nu' \circ \bar{\nu}$.

En particulier la donnée des deux valuations ν' et $\bar{\nu}$ respectivement sur les corps K et $\kappa_{\nu'}$ nous donne une extension du groupe des ordres Γ' de ν' par le groupe des ordres $\bar{\Gamma}$, c'est à dire une suite exacte:

$$0 \longrightarrow \bar{\Gamma} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \Gamma' \longrightarrow 0\,.$$

Nous allons donner une description du groupe ordonné Γ et de la valuation composée $\nu = \nu' \circ \bar{\nu}$ à partir de cette suite exacte. Nous choisissons une section $\underline{x}$ de la valuation ν', c'est à dire pour tout élément γ du groupe Γ', nous choisissons x_γ dans K tel que $\nu'(x_\gamma) = \gamma$; et nous supposons en plus que les éléments x_γ vérifient $x_{-\gamma} = x_\gamma^{-1}$, et $x_0 = 1$. Alors pour tout couple (γ, γ') de $\Gamma' \times \Gamma'$, nous appelons

$z_{\gamma,\gamma'}$ l'image de $\dfrac{x_\gamma . x_{\gamma'}}{x_{\gamma+\gamma'}}$ dans $\kappa_{\nu'}^*$, et nous définissons une application $F_{\underline{x}}$ de $\Gamma' \times \Gamma'$ dans $\bar{\Gamma}$ par: $F_{\underline{x}}(\gamma,\gamma') = \bar{\nu}(z_{\gamma,\gamma'})$.

Proposition 4.3. *L'application $F_{\underline{x}}$ définit un élément de* $\mathrm{Ext}^1(\Gamma',\bar{\Gamma})$ *qui correspond à la suite exacte*

$$0 \longrightarrow \bar{\Gamma} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \Gamma' \longrightarrow 0$$

associée à la composition des valuations $\nu = \nu' \circ \bar{\nu}$, où Γ est le groupe des ordres de ν. Plus précisément le groupe Γ est l'ensemble produit $\Gamma' \times \bar{\Gamma}$ muni de la loi interne:

$$(\gamma_1,\bar{\delta}_1) + (\gamma_2,\bar{\delta}_2) = \big(\gamma_1+\gamma_2, \bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_2 + F_{\underline{x}}(\gamma_1,\gamma_2)\big)\,,$$

et muni de l'ordre lexicographique induit par les ordres sur Γ' et $\bar{\Gamma}$. La valuation composée ν à valeurs dans Γ est définie en posant pour tout y appartenant à K^*, $\nu(y) = (\gamma,\bar{\delta})$ dans $\Gamma' \times \bar{\Gamma}$, avec $\gamma = \nu'(y)$ et $\bar{\delta} = \bar{\nu}(z)$ où z est l'image de (y/x_γ) dans $\kappa_{\nu'}^*$ par l'application ι.

Preuve. Nous vérifions que nous définissons ainsi une loi de groupe sur $\Gamma' \times \bar{\Gamma}$, pour cela il suffit de remarquer que nous avons les égalités:

$$\begin{aligned}
&F_{\underline{x}}(\gamma,-\gamma) = 0 \;\text{ pour tout } \gamma \in \Gamma'\,,\\
&F_{\underline{x}}(\gamma_1,\gamma_2) + F_{\underline{x}}(\gamma_1+\gamma_2,\gamma_3) = F_{\underline{x}}(\gamma_1,\gamma_2+\gamma_3) + F_{\underline{x}}(\gamma_2,\gamma_3) \;\text{ pour tout } \gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\,.
\end{aligned}$$

Pour montrer que l'ordre lexicographique munit $\Gamma' \times \bar{\Gamma}$ d'une structure de groupe ordonné il faut vérifier la relation suivante:

$$(\gamma_1,\bar{\delta}_1) \geq (\gamma_2,\bar{\delta}_2) \Longrightarrow \big(\gamma_1+\gamma,\bar{\delta}_1+\bar{\delta}+F_{\underline{x}}(\gamma_1,\gamma)\big) \geq \big(\gamma_2+\gamma,\bar{\delta}_2+\bar{\delta}+F_{\underline{x}}(\gamma_2,\gamma)\big)\,;$$

où la relation d'ordre $\geq$ est définie par $(\gamma_1,\bar{\delta}_1) \geq (\gamma_2,\bar{\delta}_2)$ si et seulement si $\gamma_1 > \gamma_2$ ou $\gamma_1 = \gamma_2$ et $\bar{\delta}_1 \geq \bar{\delta}_2$. Vérifions que l'application ν définie par $\nu(y) = (\gamma,\bar{\delta})$, avec $\gamma = \nu'(y)$ et $\bar{\delta} = \bar{\nu}\big(\iota(y/x_\gamma)\big)$ est une valuation. Soient y' et y'' deux éléments de K^* dont les valuations respectives sont $\nu(y') = (\gamma',\bar{\delta}')$ et $\nu(y'') = (\gamma'',\bar{\delta}'')$.
1) $\nu(y'.y'') = \nu(y') + \nu(y'')$, il suffit de remarquer que nous avons les égalités suivantes:

$$\begin{aligned}
\gamma' + \gamma'' &= \nu'(y') + \nu'(y'') = \nu'(y'.y'') = \gamma\,,\\
\bar{\delta}' + \bar{\delta}'' + F_{\underline{x}}(\gamma',\gamma'') &= \bar{\nu}\big(\iota(y'/x_{\gamma'})\big) + \bar{\nu}\big(\iota(y''/x_{\gamma''})\big) + \bar{\nu}\big(\iota(x_{\gamma'}.x_{\gamma''}/x_{\gamma'+\gamma''})\big)\\
&= \bar{\nu}\big(\iota(y'/x_{\gamma'}).\iota(y''/x_{\gamma''}).\iota(x_{\gamma'}.x_{\gamma''}/x_\gamma)\big)\\
&= \bar{\nu}\big(\iota(y'.y''/x_\gamma)\big) = \bar{\delta}\,.
\end{aligned}$$

2) $\nu(y'+y'') \geq \inf\big(\nu(y'),\nu(y'')\big)$, nous allons considérer les trois cas suivants:

si $\nu'(y'') > \nu'(y')$, alors $\nu'(y'+y'') = \gamma'$ et $\iota(y'+y''/x_{\gamma'}) = \iota(y'/x_{\gamma'})$, ce qui implique $\bar{\nu}\big(\iota(y'+y''/x_{\gamma'})\big) = \bar{\delta}'$, c'est à dire $\nu(y'+y'') = \nu(y')$;

si $\nu'(y'') = \nu'(y') = \gamma'$ et $\bar{\nu}\big(\iota(y''/x_{\gamma'})\big) > \bar{\nu}\big(\iota(y'/x_{\gamma'})\big) = \bar{\delta}'$, alors nous avons encore $\nu'(y'+y'') = \gamma'$, (en effet nous déduisons de $\bar{\delta}'' > \bar{\delta}'$ que $\iota(y'+y''/x_{\gamma'}) =$

$\iota(y'/x_{\gamma'}) + \iota(y''/x_{\gamma'})$ est non nul, d'où $\nu'(y' + y'') = \gamma'$) et nous avons aussi $\bar{\nu}\big(\iota(y' + y''/x_{\gamma'})\big) = \bar{\nu}\big(\iota(y'/x_{\gamma'})\big) = \bar{\delta}'$, c'est à dire $\nu(y' + y'') = \nu(y')$;

si $\nu'(y'') = \nu'(y') = \gamma'$ et $\bar{\nu}\big(\iota(y''/x_{\gamma'})\big) = \bar{\nu}\big(\iota(y'/x_{\gamma'})\big) = \bar{\delta}'$, soit $\nu'(y' + y'') > \gamma'$ et nous avons alors $\nu(y' + y'') > \inf\big(\nu(y'), \nu(y'')\big)$, soit $\nu'(y' + y'') = \gamma'$ et nous avons $\bar{\nu}\big(\iota(y' + y''/x_{\gamma'})\big) \geq \inf(\bar{\delta}', \bar{\delta}'')$, d'où $\nu(y' + y'') \geq \inf\big(\nu(y'), \nu(y'')\big)$.

3) $\nu(1) = 0$ car nous avons choisi $x_0 = 1$.

Pour montrer que la valuation ν est égale à la valuation composée $\nu' \circ \bar{\nu}$, il faut montrer que l'anneau de valuation associé R_ν est le sous-anneau de $R_{\nu'}$ défini par $R_\nu = \iota^{-1}\big(R_{\bar{\nu}}\big)$, où ι est l'application canonique de $R_{\nu'}$ dans $\kappa_{\nu'}$, c'est à dire il faut montrer que pour tout y dans K^* nous avons:

$$\nu(y) \geq 0 \Longleftrightarrow \nu'(y) \geq 0 \text{ et } \bar{\nu}(\iota(y)) \geq 0\,.$$

Par définition de l'ordre sur $\Gamma = \Gamma' \times \bar{\Gamma}$, nous avons $\nu(y) = (\gamma, \bar{\delta}) \geq 0$ si et seulement si $\gamma > 0$ ou $\gamma = 0$ et $\bar{\delta} \geq 0$: dans le cas $\gamma > 0$, nous avons $\nu'(y) > 0$, d'où $\iota(y) = 0$ dans $\kappa_{\nu'}$ et $\bar{\delta} = \bar{\nu}\big(\iota(y)\big) = +\infty$, dans le cas $\gamma = 0$, nous avons $\nu'(y) = 0$ et $\bar{\delta} = \bar{\nu}(\iota(y))$ car $x_0 = 1$.

Remarque. Si la suite exacte $0 \longrightarrow \bar{\Gamma} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow \Gamma' \longrightarrow 0$ est scindée, le groupe des ordres Γ de la valuation composée $\nu = \nu' \circ \bar{\nu}$ est isomorphe au groupe produit $(\Gamma' \times \bar{\Gamma})$ muni de l'ordre lexicographique. En particulier si la valuation ν' est une valuation discrète de rang un, c'est à dire pour $\Gamma' \simeq \mathbb{Z}$, la suite exacte est toujours scindée et nous pouvons décrire la valuation composée $\nu = \nu' \circ \bar{\nu}$, de la manière suivante. L'idéal maximal de l'anneau de valuation $R_{\nu'}$ est engendré par un élément u et à tout élément non nul x de K nous pouvons associer l'élément non nul $\bar{y}$ du corps résiduel $\kappa_{\nu'}$ obtenu comme classe de $y = x.u^{-\nu'(x)}$. La valuation composée ν est alors définie par $\nu(x) = \big(\nu'(x), \bar{\nu}(\bar{y})\big)$.

5 Prolongement d'une valuation

Soient K un corps et L une extension de K. Si μ est une valuation de L, la restriction de μ à K est une valuation ν de K dont le groupe des ordres Γ_ν est un sous-groupe du groupe des ordres Γ_μ de μ. De plus l'anneau de valuation V de ν est égal à $W \cap K$, où W est l'anneau de valuation de μ, et W domine V.

Définition. Dans la situation précédente nous disons que la valuation μ de L prolonge la valuation ν de K ou que la valuation μ est un prolongement de ν.

Remarque. Si V et W sont deux anneaux de valuation respectivement de K et de L, où L est une extension de K, W domine V si et seulement si $V = W \cap K$. En effet si W domine V, V est inclus dans $W \cap K$; et si x est un élément de K n'appartenant pas à V, son inverse x^{-1} appartient à $\max(V)$, donc à $\max(W)$, par conséquent x n'appartient pas à W. Réciproquement si V est égal à $W \cap K$, V est inclus dans W; et si x est dans $\max(V)$, son inverse x^{-1} n'appartient pas à V, par conséquent n'appartient pas à W et x est dans $\max(W)$.

Remarque. Pour toute valuation ν de K, il existe au moins une valuation μ de L qui prolonge ν. En effet l'anneau de valuation V de ν est un sous-anneau local de L, et d'après le corollaire à la proposition 1.2 il existe un anneau de valuation W de L qui domine V. Grâce à la remarque précédente nous en déduisons que la valuation μ associée à W prolonge la valuation ν.

Nous nous proposons d'étudier les extensions Γ_μ et κ_μ respectivement du groupe des valeurs Γ_ν et du corps résiduel κ_ν d'une valuation ν de K, correspondant à un prolongement μ de ν à une extension L de K donnée.

Nous allons d'abord étudier le cas où L est une extension algébrique de K. Nous notons respectivement Γ_ν et Γ_μ, et V et W, les groupes des ordres, et les anneaux de valuations, associés à ν et μ. Nous notons κ_ν et κ_μ les corps résiduels respectifs des valuations ν et μ, c'est à dire les corps définis par $\kappa_\nu = V/\max(V)$ et $\kappa_\mu = W/\max(W)$.

Définition. L'indice de ramification de μ par rapport à ν est égal à l'indice du groupe des ordres Γ_ν dans Γ_μ:

$$e(\mu/\nu) = \left[\Gamma_\mu : \Gamma_\nu\right].$$

Le degré résiduel de μ par rapport à ν est égal au degré de l'extension du corps résiduels κ_ν dans le corps κ_μ:

$$f(\mu/\nu) = \left[\kappa_\mu : \kappa_\nu\right].$$

L'indice de ramification $e(\mu/\nu)$ et le degré résiduel $f(\mu/\nu)$ sont des éléments de $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Remarque. Si L' est une extension de L et si μ' est une valuation de L' qui prolonge μ, alors μ' prolonge ν et nous avons les égalités:

$$e(\mu'/\nu) = e(\mu'/\mu)e(\mu/\nu) \text{ et } f(\mu'/\nu) = f(\mu'/\mu)f(\mu/\nu).$$

En particulier $e(\mu'/\nu)$, (resp. $f(\mu'/\nu)$,) est fini si et seulement si $e(\mu'/\mu)$ et $e(\mu/\nu)$, (resp. $f(\mu'/\mu)$ et $f(\mu/\nu)$,) sont finis.

Proposition 5.1. *Si L est une extension finie de K de degré n nous avons l'égalité:*

$$e(\mu/\nu)f(\mu/\nu) \leq n.$$

En particulier l'indice de ramification $e(\mu/\nu) = \left[\Gamma_\mu : \Gamma_\nu\right]$ et le degré résiduel $f(\mu/\nu) = \left[\kappa_\mu : \kappa_\nu\right]$ sont finis.

Preuve. Soient r et s deux entiers avec $r \leq e(\mu/\nu)$ et $s \leq f(\mu/\nu)$; il suffit de montrer que nous avons $rs \leq n$. Par hypothèse il existe r éléments $x_1, x_2, \ldots, x_r$ de L tels que pour tout couple (i,j), avec $i \neq j$, $\mu(x_i) \not\equiv \mu(x_j) \operatorname{mod}\Gamma_\nu$. De même il existe s éléments $y_1, y_2, \ldots, y_s$ de W dont les images $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_s$ dans κ_μ sont linéairement indépendants sur κ_ν. Il suffit de montrer que les rs éléments $x_i y_k$,

$1 \leq i \leq r$ et $1 \leq k \leq s$, sont indépendants sur K. Supposons que ce n'est pas le cas et qu'il existe une relation linéaire non triviale entre eux: $(*) \sum a_{i,k} x_i y_k = 0$, avec $a_{i,k} \in K$.

Nous choisissons un indice (j,m) tel que pour tout (i,k) nous avons l'inégalité $\mu(a_{j,m} x_j y_m) \leq \mu(a_{i,k} x_i y_k)$; en particulier $a_{j,m} \neq 0$. Pour $i \neq j$, nous avons l'inégalité $\mu(a_{j,m} x_j y_m) \neq \mu(a_{i,k} x_i y_k)$; en effet si nous avions égalité, $\mu(x_j) - \mu(x_i)$ serait égal à $\nu(a_{i,k}) - \nu(a_{j,m})$ car $\mu(y_k)$ est nul pour tout y_k vérifiant $\bar{y}_k \neq 0$ et car μ prolonge ν, et nous aurions alors la relation $\mu(x_j) \equiv \mu(x_i) \,\mathrm{mod}\Gamma_\nu$, ce qui est impossible pour $i \neq j$. En multipliant la relation $(*)$ par $(a_{j,m} x_j)^{-1}$, nous obtenons alors une relation: $\sum b_k y_k + z = 0$, avec $b_k = a_{j,k}/a_{j,m} \in W \cap K$ et $z \in \max(W)$. Nous obtenons ainsi dans le corps $\kappa_\mu = W/\max(W)$ la relation $\sum \bar{b}_k \bar{y}_k = 0$, avec $\bar{b}_m = 1$. C'est une relation non triviale de dépendance linéaire sur κ_ν des $\bar{y}_k$, ce qui est impossible par hypothèse sur les y_k.

Proposition 5.2. *Si L est une extension algébrique de K, alors le groupe quotient Γ_μ/Γ_ν est un groupe de torsion et κ_μ est une extension algébrique de κ_ν.*

Preuve. Nous pouvons écrire $L = \varinjlim L_\alpha$, avec L_α extensions finies de K. Alors, si nous posons $\Gamma_\alpha = \mu\big(L_\alpha^*\big)$, le groupe Γ_μ est réunion de la famille filtrante des sous-groupes Γ_α. D'après la proposition précédente, le groupe Γ_ν est un sous-groupe d'indice fini dans chacun des groupes Γ_α, par conséquent le groupe Γ_μ/Γ_ν est de torsion. De même, si nous notons κ_α le corps résiduel associé à la valuation μ sur L_α, le corps κ_μ est égal à $\varinjlim \kappa_\alpha$, où les κ_α sont des extensions finies de κ_ν, par conséquent est une extension algébrique de κ_ν.

Nous pouvons aussi montrer directement que pour tout élément δ de Γ_μ, il existe un entier $k \neq 0$ tel que $k.\delta$ appartienne à Γ_ν. Pour cela nous utilisons la méthode du polygone de Newton.

Soit Γ un groupe ordonné et nous définissons la droite D de l'espace $\mathbb{Z} \times \Gamma$ comme le sous-ensemble $D = \big\{(n,\gamma) \in \mathbb{Z} \times \Gamma \,/\, q\gamma + \alpha n + \beta = 0\big\}$, où $q \in \mathbb{Z}$, et α et $\beta \in \Gamma$. La pente $p(D)$ de la droite D d'équation $q\gamma + \alpha n + \beta = 0$ est l'élément $p(D) = -\alpha/q$ appartenant à $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Chaque droite D définit deux demi-espaces $H^D_{\geq}$ et $H^D_{\leq}$ de $\mathbb{Z} \times \Gamma$ par:

$$H^D_{\geq} = \big\{(n,\gamma) \in \mathbb{Z} \times \Gamma \,/\, q\gamma + \alpha n + \beta \geq 0\big\}$$

$$H^D_{\leq} = \big\{(n,\gamma) \in \mathbb{Z} \times \Gamma \,/\, q\gamma + \alpha n + \beta \leq 0\big\}\,.$$

Pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{Z} \times \Gamma$ nous définissons son enveloppe convexe $Conv(A)$ par $Conv(A) = \bigcap H$, où H parcourt l'ensemble des demi-espaces de $\mathbb{Z} \times \Gamma$ contenant A. Une face F de $Conv(A)$ est un sous-ensemble F de $Conv(A)$ défini par $F = Conv(A) \cap D$, où D est une droite de $\mathbb{Z} \times \Gamma$ vérifiant:

$Conv(A)$ est contenu dans l'un des demi-espaces $H^D_{\geq}$ ou $H^D_{\leq}$ définis par D,
$F = Conv(A) \cap D$ contient au moins deux points distincts.

Nous définissons la pente $p(F)$ de la face F comme la pente de la droite D qui définit F. Soit ν une valuation d'un corps K à valeurs dans Γ_ν, alors pour tout polynôme $P(X) = a_0X^d + a_1X^{d-1} + \ldots + a_d$ de $K[X]$, nous définissons dans $\mathbb{Z} \times \Gamma_\nu$ le polygone de Newton $N(P)$ de $P(X)$ comme l'enveloppe convexe $Conv(\mathrm{Supp}(P))$ du support de $P(X)$, avec $\mathrm{Supp}(P) = \{(d-j, \nu(a_j)) \,/\, a_j \neq 0, 0 \leq j \leq d\}$. Soit L une extension algébrique de K et soit z appartenant à L, nous appelons polygone de Newton de z sur K et nous notons $N_K(z)$ le polygone de Newton du polynôme minimal de z sur K.

Proposition 5.3. *Pour toute valuation μ de L qui prolonge ν il existe une face F du polygone de Newton $N_K(z)$ de z sur K dont la pente $p(F)$ est égale à $-\mu(z)$. En particulier il existe un entier k non nul tel que $k.\mu(z)$ appartienne à Γ_ν.*

Preuve. Soit $P(X) = X^d + a_1X^{d-1} + \ldots + a_d$ le polynôme minimal de z sur K; comme $P(z)$ est nul, pour toute valuation μ de L la valeur minimale des $\mu(a_jz^{d-j})$, $0 \leq j \leq d$, est atteinte pour au moins deux termes distincts, c'est à dire qu'il existe $i > j$ tels que pour tout k nous ayons $\mu(a_kz^{d-k}) \geq \mu(a_iz^{d-i}) = \mu(a_jz^{d-j})$. Si la valuation μ est un prolongement de ν et si nous posons $\delta = \mu(z)$, nous trouvons $\nu(a_k) + (d-k)\delta \leq \nu(a_i) + (d-i)\delta = \nu(a_j) + (d-j)\delta$.

Soit D la droite de $\mathbb{Z} \times \Gamma_\nu$ qui passe les points $(d-i, \nu(a_i))$ et $(d-j, \nu(a-j))$ appartenant au polygone de Newton $N_K(z)$ de z, c'est à dire la droite D d'équation $q\gamma + \alpha n + \beta = 0$, avec $q = i-j$, $\alpha = \nu(a_i) - \nu(a_j)$ et $\beta = ((d-i)\nu(a_j) - (d-j)\nu(a_i))$. L'élément $\delta = \mu(z)$ de Γ_μ vérifie $(i-j)\delta = \nu(a_i) - \nu(a_j)$, c'est à dire que $-\delta$ est égal à la pente $p(D)$ de la droite D et en particulier δ appartient à $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Pour tout k, $0 \leq k \leq d$, nous avons $\nu(a_k) + (d-k)\delta \leq \nu(a_i) + (d-i)\delta$, c'est à dire que tout point $(d-k, \nu(a_k))$ de $N_K(z)$ appartient au demi-espace $H^D_{\geq}$ d'équation $q\gamma + \alpha n + \beta \geq 0$. Comme $F = D \cap N_K(z)$ contient les deux points distincts $(d-i, \nu(a_i))$ et $(d-j, \nu(a-j))$ nous en déduisons que F est une face de $N_K(z)$ dont la pente $p(F)$ est égale à $-\mu(z)$.

Remarque. Nous déduisons du raisonnement précédent que si L est une extension algébrique finie de degré n de K, alors pour tout élément α du groupe Γ_μ nous avons $N\alpha$ qui appartient à Γ_ν, avec $N = n!$.

Corollaire. *Si L est une extension algébrique de K, le rang de la valuation μ de L est égal au rang de la valuation ν de K De plus si L est une extension finie de K, la valuation μ est discrète si et seulement si la valuation ν l'est aussi.*

Preuve. La première partie du corollaire est une conséquence du résultat suivant. Si H est un sous-groupe d'un groupe totalement ordonné G, l'application définie par $F \mapsto F \cap H$ est une surjection de l'ensemble des sous-groupes isolés de G dans l'ensemble des sous-groupes isolés de H. De plus cette application est bijective si le groupe quotient G/H est un groupe de torsion.

Si L est une extension finie de K, le sous-groupe Γ_ν est d'indice fini dans le groupe Γ_μ, et d'après ce qui précède l'application $\Delta'_i \mapsto \Delta_i = \Delta_i \cap \Gamma_\nu$ définit une bijection de l'ensemble des sous-groupes isolés de Γ_μ dans l'ensemble des sous-groupes isolés de Γ_ν. Soient $\Delta_i \subset \Delta_{i+1}$ deux sous groupes-isolés successifs d'un groupe totalement ordonné Γ, le groupe quotient est de hauteur 1, c'est à dire est isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Alors si le groupe Γ est discret le groupe quotient Δ_{i+1}/Δ_i est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$, c'est à dire est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Réciproquement si tous les groupes quotients Δ_{i+1}/Δ_i sont isomorphes à $\mathbb{Z}$, le groupe Γ est discret. Il suffit donc de montrer l'équivalence:

$$\Delta'_{i+1}/\Delta'_i \simeq \mathbb{Z} \iff \Delta_{i+1}/\Delta_i \simeq \mathbb{Z}\,.$$

Comme Δ_{i+1}/Δ_i est un sous-groupe non trivial du groupe Δ'_{i+1}/Δ'_i, nous avons $\Delta'_{i+1}/\Delta'_i \simeq \mathbb{Z} \Longrightarrow \Delta_{i+1}/\Delta_i \simeq \mathbb{Z}$; Réciproquement comme Δ_{i+1}/Δ_i est d'indice fini dans Δ'_{i+1}/Δ'_i, nous avons $\Delta_{i+1}/\Delta_i \simeq \mathbb{Z} \Longrightarrow \Delta'_{i+1}/\Delta'_i \simeq \mathbb{Z}$.

Remarque. Dans le cas d'une extension algébrique finie L de K nous pouvons aussi étudier l'ensemble de toutes les valuations μ_i, définies à équivalence près, qui prolongent une valuation ν de K. Nous pouvons aussi nous intéresser au complété $\hat{K}$ de K pour la valuation ν ainsi qu'aux complétés respectifs $\hat{L}_i$ de L pour les valuations μ_i [Bo]. Comme nous n'avons pas besoin de ces résultats dans la suite de l'exposé, nous n'aborderons pas ces problèmes ici.

Nous allons étudier maintenant le cas d'une extension transcendante de K. Nous considérons une valuation ν d'un corps K, de groupe des ordres Γ, et un prolongement ν' de ν à un corps K', extension transcendante de K, de groupe des ordres Γ'. Nous appelons respectivement V et V' et $\kappa = V/\max(V)$ et $\kappa' = V'/\max(V')$ les anneaux de valuation et les corps résiduels de ν et ν'. Nous voulons alors étudier les grandeurs suivantes:

$\text{dim.alg.}_K K'$ = degré de transcendance de l'extension K'/K,

$\text{dim.alg.}_\kappa \kappa'$ = degré de transcendance de l'extension κ'/κ,

rang rat.$\big(\Gamma'/\Gamma\big)$ = rang rationnel du groupe quotient Γ'/Γ,

qui est égal d'après la proposition 3.5 à rang rat.$(\nu')-$ rang rat.(ν) et est toujours supérieur ou égal à rang$(\nu')-$ rang(ν) = dim $V'-$ dim V.

Nous commençons par étudier le cas d'une extension transcendante monogène $K' = K(X)$.

Proposition 5.4. *Soit ν une valuation d'un corps K, de groupe des ordres Γ et de corps résiduel κ.*
a) Si Γ'' est un groupe totalement ordonné contenant Γ et si ξ est un élément de Γ'' vérifiant la condition $n.\xi \in \Gamma \Longrightarrow n = 0$, il existe une valuation ν' et une seule du corps $K' = K(X)$ prolongeant ν, à valeurs dans Γ'' et telle que $\nu'(X) = \xi$. Dans ce cas le groupe des ordres Γ' de la valuation ν' est égal au sous-groupe $\Gamma + \mathbb{Z}.\xi$ de Γ'' et le corps résiduel κ' de ν' est égal à κ.
b) Il existe une valuation ν' et une seule du corps $K' = K(X)$ qui prolonge ν telle que $\nu'(X) = 0$ et telle que l'image t de X dans le corps résiduel κ' soit transcendante sur κ. Dans ce cas le groupe des ordres Γ' de la valuation ν' est égal à Γ et le corps résiduel κ' de ν' est égal à $\kappa(t)$.

Remarque. Il peut exister d'autres prolongements ν' de la valuation ν à l'extension monogène $K' = K(X)$, tels que le groupe quotient Γ'/Γ est un groupe de torsion non trivial et tels que le corps résiduel κ' est une extension algébrique non triviale de κ.

Remarque. Dans deux articles [McL 1] et [McL 2] MacLane donne une description explicite du prolongement d'une valuation ν de K à une extension transcendante $K(x)$ ou à une extension algébrique séparable $K[x]$, dans le cas où ν est une valuation discrète de rang un. Il construit une suite finie ou infinie (ν_k) de valuations qui sont des approximations successives du prolongement cherché. Pour cela il définit par récurrence la valuation ν_k à partir de la valuation ν_{k-1} et d'un polynôme $\phi_k(x)$ de $K[x]$, appelé “polynôme clé”.

Preuve de la proposition. Nous vérifions d'abord que pour tout élément ξ d'un groupe ordonné Γ'' contenant Γ, l'application ν' de $K' = K(X)$ dans Γ'' définie pour tout $P = \sum a_j X^j$ appartenant à $K[X]$ par l'égalité $\nu'(P) = \inf_j \big(\nu(a_j) + j.\xi\big)$ est un valuation de K' qui prolonge ν.

Dans le premier cas, si la valuation μ est un prolongement de ν qui vérifie $\mu(X) = \xi$, nous avons toujours l'inégalité $\mu\big(\sum a_j X^j\big) \geq \inf_j \big(\nu(a_j) + j.\xi\big)$. Par hypothèse sur ξ, tous les éléments $\nu(a_j) + j.\xi$ de Γ'' sont distincts, par conséquent nous avons en fait l'égalité $\mu\big(\sum a_j X^j\big) = \inf_j \big(\nu(a_j) + j.\xi\big)$ (cf. Proposition 2.1). La valuation μ est donc la valuation ν' définie précédemment et a pour groupe des ordres $\Gamma + \mathbb{Z}.\xi$. Tout élément x de $K' = K(X)$ peut s'écrire sous la forme $x = X^n b(1+u)$, avec $n \in \mathbb{Z}$, $b \in K^*$ et $u \in K'$, $\nu'(u) > 0$; nous en déduisons que si $\nu'(x)$ est nul, alors nous avons $n.\xi + \nu(b) = 0$, c'est à dire $n = 0$ et $\nu(b) = 0$, par conséquent le corps résiduel κ' est égal à κ.

Dans le deuxième cas, quitte à multiplier l'élément x de K' par un élément de K^*, nous pouvons toujours supposer que x s'écrit sous la forme $x = \sum a_j X^j$ avec $\nu(a_j) \geq 0$ pour tout j, i.e. $a_j \in V$, et que l'un des $\nu(a_j)$ est nul. Alors, comme précédemment, si la valuation μ est un prolongement de ν qui vérifie $\mu(X) = 0$, nous avons l'inégalité $\mu(x) \geq \inf_j \big(\nu(a_j)\big) = 0$.

L'image $\bar{x}$ de x dans le corps résiduel κ_μ est égale à $\sum \bar{a}_j t^j$, où nous notons $\bar{a}_j$ l'image de a_j dans κ, et $\bar{x}$ est nul si et seulement si nous avons l'inégalité stricte $\mu(x) > 0$. Par hypothèse sur la valuation μ, l'élément t est transcendant sur κ et comme l'un des $\bar{a}_j$ est non nul, $\bar{x}$ ne peut pas être nul et nous avons $\mu(x) = 0$, c'est à dire que la valuation μ est la valuation ν' définie par $\nu'\big(\sum a_j X^j\big) = \inf_j \big(\nu(a_j)\big)$. Réciproquement la valuation ν' de K' définie par $\nu'\big(\sum a_j X^j\big) = \inf_j \big(\nu(a_j)\big)$ a pour groupe des ordres Γ, et le même raisonnement que précédemment permet de vérifier que l'image t de X est transcendante sur κ. Il reste alors à montrer que le corps résiduel κ' est égal à $\kappa(t)$, ce qui se déduit directement du fait que K' est égal à $K(X)$.

Nous revenons au cas général, K' est une extension de K de degré de transcendance $\text{dim.alg.}_K K'$ et ν' est un prolongement à K' d'une valuation ν de K.

Théorème 5.5. *Soient $x_1, x_2, \ldots, x_s$ des éléments de l'anneau de valuation V' dont les images canoniques $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_s$ dans κ' sont algébriquement indépendantes sur κ, et soient $y_1, y_2, \ldots, y_r$ des éléments de K' tels que les images canoniques de $\nu'(y_1), \nu'(y_2), \ldots, \nu'(y_r)$ dans le groupe quotient Γ'/Γ sont linéairement* *indépendantes sur* $\mathbb{Z}$. *Alors les* $r+s$ *éléments* $x_1,\ldots,x_s,y_1,\ldots,y_r$ *de* K' *sont algébriquement indépendants sur* K *et la restriction* ν'' *de* ν' *au sous-corps* $K''=K(x_1,\ldots,x_s,y_1,\ldots,y_r)$ *de* K' *admet* $\Gamma''=\Gamma+\mathbb{Z}.\nu'(y_1)+\ldots+\mathbb{Z}.\nu'(y_r)$ *pour groupe des ordres et* $\kappa''=\kappa(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_s)$ *pour corps résiduel.*

Pour un polynôme $f=\sum a_{(\underline{\beta},\underline{\gamma})}x^{\underline{\beta}}y^{\underline{\gamma}}$ *de* $K[x_1,\ldots,x_s,y_1,\ldots,y_r]$, *la valuation de* f *est égale au minimum des valuations des monômes de* f:

$$\nu''(f)=\inf_{(\underline{\beta},\underline{\gamma})}\nu''\Big(a_{(\underline{\beta},\underline{\gamma})}x^{\underline{\beta}}y^{\underline{\gamma}}\Big)=\inf_{(\underline{\beta},\underline{\gamma})}\Big(\nu\big(a_{(\underline{\beta},\underline{\gamma})}\big)+\sum_{1\le j\le r}\gamma_j\nu'(y_j)\Big).$$

Preuve. Nous faisons une démonstration par récurrence sur $r+s$. Le théorème est évident pour $r+s=0$. Nous supposons que le résultat est démontré pour r' et s' avec $r'\le r$, $s'\le s$ et $r'+s'\le r+s-1$; alors quitte à remplacer K par $K(x_1,\ldots,x_{s'},y_1,\ldots,y_{r'})$ et Γ par $\Gamma+\mathbb{Z}.\nu'(y_1)+\ldots+\mathbb{Z}.\nu'(y_{r'})$, nous pouvons nous ramener aux deux cas suivants:
1) $r=1$ et $s=0$, c'est à dire il existe x dans V' dont l'image $\bar{x}$ dans κ' est transcendante sur κ;
2) $r=0$ et $s=1$, c'est à dire il existe y dans K' dont l'image $\xi=\nu'(y)$ dans Γ' vérifie $n.\xi\in\Gamma\Longrightarrow n=0$.

De la proposition 5.2 sur le prolongement de ν à une extension algébrique de K, nous déduisons dans le cas 1) que x est transcendant sur K et dans le cas 2) que y est transcendant sur K. Le théorème se déduit alors de la proposition précédente.

Corollaire. *a) Nous avons l'inégalité:*

$$\textit{rang rat.}\big(\Gamma'/\Gamma\big)\ +\ \textit{dim.alg.}_{\kappa}\kappa'\ \le\ \textit{dim.alg.}_K K'\,.$$

De plus, si nous avons égalité et si K' *est une extension de type fini de* K *le groupe* Γ'/Γ *est un* $\mathbb{Z}$*-module de type fini et* κ' *est une extension de type fini de* κ.
b) Nous avons l'inégalité:

$$\textit{rang}(\nu')\ +\ \textit{dim.alg.}_{\kappa}\kappa'\ \le\ \textit{rang}(\nu)\ +\ \textit{dim.alg.}_K K'\,.$$

De plus, si nous avons égalité, si K' *est une extension de type fini de* K *et si* Γ *est le groupe* $\mathbb{Z}^h$ *muni de l'ordre lexicographique,* Γ' *est isomorphe au groupe* $\mathbb{Z}^{h'}$ *muni de l'ordre lexicographique et* κ' *est une extension de type fini de* κ.

Preuve. a) L'inégalité est une conséquence directe du théorème. Si K' est une extension de type fini de K alors $d=\text{dim.alg.}_K K'$ est fini, par conséquent $r=\text{rang}\big(\Gamma'/\Gamma\big)$ et $s=\text{dim.alg.}_{\kappa}\kappa'$ sont aussi finis. Nous supposons que nous avons l'égalité $r+s=d$.

Soit ν'' le prolongement de ν au sous-corps $K''=K(x_1,\ldots,x_s,y_1,\ldots,y_r)$ de K' obtenue par restriction de ν'. Son groupe des ordres Γ'' est isomorphe au sous-groupe $\Gamma+\mathbb{Z}.\nu'(y_1)+\ldots+\mathbb{Z}.\nu'(y_r)$ de Γ' et son corps résiduel κ'' est isomorphe à $\kappa(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_s)$. Par hypothèse K' est une extension algébrique finie de K'' et nous

déduisons de la proposition 5.1 que Γ'/Γ'' est un groupe fini et que κ' est une extension algébrique finie de κ'', par conséquent Γ'/Γ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini et κ' une extension de type fini de κ.
b) L'inégalité est une conséquence de l'inégalité précédente et de l'inégalité suivante démontrée à la proposition 3.5: $\mathrm{rang}(\Gamma') \leq \mathrm{rang}(\Gamma) + \mathrm{rang\ rat.}\big(\Gamma'/\Gamma\big)$. Si nous avons égalité en b) alors nous avons égalité dans a), par conséquent Γ'/Γ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini et κ' une extension de type fini de κ. De plus le rang rationnel du groupe Γ'/Γ est égal à son rang, par conséquent si Γ est isomorphe à $\mathbb{Z}^h$ muni de l'ordre lexicographique alors Γ' est aussi isomorphe à $\mathbb{Z}^{h'}$ muni de l'ordre lexicographique avec $h' = h + \mathrm{rang}\big(\Gamma'/\Gamma\big)$.

Remarque. Par récurrence sur le degré de transcendance de l'extension K'/K, $d = \mathrm{dim.alg.}_K K'$, nous déduisons de la remarque suivant la proposition 5.4 que pour tout triplet (h, r, s) vérifiant $1 \leq h \leq r \leq d - s \leq d$ ou $0 = h = r \leq d - s \leq d$, et pour toute valuation ν de K, il existe un prolongement ν' de ν à K' tel que nous ayons rang $\big(\Gamma'/\Gamma\big) = h$, rang rat.$\big(\Gamma'/\Gamma\big) = r$ et $\mathrm{dim.alg.}_K K' = s$. Mais dans le cas où le groupe Γ est soit réduit à $\{0\}$, c'est à dire si la valuation ν de K est la valuation impropre, soit de la forme $\big(\mathbb{R}^h, +\big)_{lex}$, il est impossible de trouver une valuation ν' qui corresponde aux valeurs $0 = h < r$.

Exemple 6. Soit un corps K muni d'une valuation ν, alors d'après le théorème 5.5, il existe une unique valuation ν' de l'extension transcendante pure $K' = K(x_1, \ldots, x_s)$ de K telle que $\nu'(x_i) = 0$ pour tout x_i et telle que les images canoniques $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_s$ dans le corps résiduel $\kappa_{\nu'}$ sont algébriquement indépendantes sur κ_ν, c'est à dire que ν' est la valuation définie par:

$$\nu'\Big(\sum a_{\underline{\beta}} x^{\underline{\beta}}\Big) = \inf_{\underline{\beta}}\Big(\nu\big(a_{\underline{\beta}}\big)\Big)\,.$$

La valuation ν' est appelée valuation de Gauss.

Toute valuation μ d'une extension L de K prolongeant une valuation ν telle que $\mathrm{dim.alg.}_{\kappa_\nu} \kappa_\mu = \mathrm{dim.alg.}_K L = s$, est le prolongement d'une valuation de Gauss ν' d'une extension transcendante pure $K' = K(x_1, \ldots, x_s)$ de K telle que L est algébrique sur K'.

Définition. Soit ν une valuation d'un corps K et soit μ un prolongement de ν à une extension L de K tel que les groupes des ordres Γ_ν et Γ_μ et les corps résiduels κ_ν et κ_μ soient égaux, c'est à dire que nous supposons que les inclusions naturelles de Γ_ν dans Γ_μ et de κ_ν dans κ_μ sont des isomorphismes, c'est à dire que nous avons $e(\mu/\nu) = 0$ et $f(\mu/\nu) = 0$. Nous disons alors que (L, μ) est un extension immédiate de (K, ν). Par exemple si $\hat{K}$ est le complété de K pour la valuation ν et si $\hat{\nu}$ est l'unique valuation de $\hat{K}$ qui prolonge ν, $(\hat{K}, \hat{\nu})$ est une extension immédiate de (K, ν). Un corps K muni d'une valuation ν est dit maximal s'il n'existe aucune extension propre immédiate de (K, ν). Les propriétes de ces corps ont été en particulier étudiées par Kaplansky [Ka 1], [Ka 2].

6 Centre d'une valuation

Soient K un corps et ν une valuation de K, nous appelons R_ν l'anneau de valuation de ν et $\mathcal{M}_\nu$ son idéal maximal.

Définition. Soit A un sous-anneau de K sur lequel la valuation ν est positive, c'est à dire un anneau A inclus dans R_ν, alors le centre de la valuation ν dans A est l'idéal $\mathcal{P}$ de A défini par $\mathcal{P} = A \cap \mathcal{M}_\nu$.

Remarque. Le centre $\mathcal{P}$ de la valuation est un idéal premier de A. Si A est un anneau local , le centre de la valuation ν dans A est l'idéal maximal $\mathcal{M}$ de A si et seulement si l'anneau de valuation R_ν domine A. En particulier, le centre $\mathcal{P}$ de la valuation ν dans l'anneau A est l'unique idéal premier $\mathcal{Q}$ de A tel que l'anneau R_ν de la valuation domine le localisé $A_{\mathcal{Q}}$.

Nous avons vu dans la démonstration du théorème 1.1, que tout anneau de valuation est intégralement clos. Nous allons montrer que la cloture intégrale du localisé d'un anneau A en un de ses idéaux premiers $\mathcal{P}$ peut être définie grâce aux valuations de A ayant $\mathcal{P}$ pour centre.

Soient K un corps et A un sous-anneau de K, en particulier le corps K est une extension du corps des fractions L de A. Nous considérons $\mathcal{P}$ un idéal premier de A et nous appelons $N(\mathcal{P})$ l'ensemble des valuations ν de K, positives sur A et dont le centre dans A est l'idéal $\mathcal{P}$.

Théorème 6.1. *La fermeture intégrale $\left(A_{\mathcal{P}}\right)'$ du localisé $A_{\mathcal{P}}$ dans le corps K est égale à l'intersection des anneaux de valuations R_ν associés aux valuation de $N(\mathcal{P})$:*

$$\left(A_{\mathcal{P}}\right)' = \bigcap_{\nu \in N(\mathcal{P})} R_\nu \,.$$

Preuve. Quitte à remplacer l'anneau A par son localisé $A_{\mathcal{P}}$, nous pouvons supposer que l'anneau A est local, d'idéal maximal $\mathcal{P}$. Si la valuation ν de K appartient à l'ensemble $N(\mathcal{P})$, alors l'anneau A est inclus dans l'anneau de valuation R_ν. Comme cet anneau est intégralement clos la fermeture intégrale de A de K est aussi incluse dans R_ν, d'où $(A)' \subset \bigcap_{\nu \in N(\mathcal{P})} R_\nu$.

Réciproquement soit y un élément de K qui n'est pas entier sur A, alors y^{-1} est un élément non inversible de l'anneau $A\left[y^{-1}\right]$ et il existe un idéal maximal $\mathcal{M}$ de cet anneau contenant y^{-1}. Nous appelons B le localisé de $A\left[y^{-1}\right]$ en $\mathcal{M}$, et d'après le corollaire de la proposition 1.2 il existe un anneau de valuation R_ν de K qui domine B. Comme l'élément y^{-1} appartient à $\mathcal{M}$, il appartient aussi à l'idéal maximal $\mathcal{M}_\nu$ de R_ν. Et comme R_ν domine B, nous avons $A \subset B \subset R_\nu$ et il reste à montrer que l'idéal $\mathcal{M}_\nu \cap A = \mathcal{M} \cap A$ est maximal. Pour cela nous vérifions que si un élément x de A admet un inverse x^{-1} dans B alors x^{-1} appartient à A, c'est encore une conséquence du fait que y n'est pas entier sur A.

Remarque. Si nous supposons que le corps K est une extension de degré fini du corps des fractions L de A et si nous supposons que l'anneau A est noethérien, ou plus généralement que A est un anneau de Krull, nous pouvons remplacer l'ensemble $N(\mathcal{P})$ par un sous-ensemble N' vérifiant:

pour tout $\nu \in N'$, ν est une valuation discrète de rang un;

pour tout $x \in A_{\mathcal{P}}$, il n'existe qu'un nombre fini de valuations $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_r$ appartenant à N' telles que $\nu_i(x) > 0$.

Nous nous intéressons maintenant à une variété algébrique X et nous voulons définir le centre dans X d'une valuation ν d'un corps K, extension du corps des fonctions $F(X)$ de X.

Considérons d'abord le cas d'un schéma affine $X = \operatorname{Spec} A$, où A est un sous-anneau du corps K, et une valuation ν de K. Si A est inclus dans l'anneau R_ν de la valuation ν, alors le centre de ν dans A est l'idéal premier $\mathcal{P}$ de A défini par $\mathcal{P} = A \cap \mathcal{M}_\nu$. Cet idéal définit un fermé Z intègre, i.e. irréductible et réduit, du schéma X. Si A n'est pas inclus dans l'anneau R_ν de la valuation nous prenons pour fermé Z l'ensemble vide.

Nous voulons généraliser la notion de centre d'une valuation ν pour tout schéma X, nous supposerons que X est irréductible et réduit de corps des fonctions $F(X)$ et nous considérons une valuation ν d'un corps K, extension de $F(X)$.

Proposition 6.2. *Le sous-ensemble Z de X formé des points x dont l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est inclus dans l'anneau R_ν, $Z = \{x \in X \,/\, \mathcal{O}_{X,x} \subset R_\nu\}$, est un fermé irréductible du schéma X, qui peut être vide.*

Définition. Le centre de la valuation ν dans X est le point générique du sous-schéma intègre Z de X obtenu en mettant la structure de schéma réduit sur le fermé Z défini précédemment, quand Z est non vide. Plus précisément, le centre de la valuation ν dans X est l'unique point x de X, quand il existe, dont l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est dominé par l'anneau R_ν de la valuation. Nous appellerons parfois centre de la valuation le fermé Z. Ainsi par centre nous pouvons considérer soit un sous-schéma fermé intègre Z, soit le point générique x de ce schéma, soit dans le cas affine l'idéal premier $\mathcal{P}$ qui définit ce fermé.

Preuve de la proposition. Il suffit de vérifier que si X est un schéma affine $X = \operatorname{Spec} A$, le fermé Z de X défini par le centre $\mathcal{P}$ de la valuation ν dans l'anneau A, a bien pour support l'ensemble des points x de X tels que $\mathcal{O}_{X,x} \subset R_\nu$. Il s'agit de montrer que pour tout idéal premier $\mathcal{Q}$ de l'anneau A, nous avons l'équivalence suivante: $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q} \iff A_{\mathcal{Q}} \subset R_\nu$.

Supposons d'abord que $\mathcal{P}$ est inclus $\mathcal{Q}$. Tout élément x de $A_{\mathcal{Q}}$ peut s'écrire sous la forme $x = u/v$, avec $u \in A$ et $v \in A \setminus \mathcal{Q}$, nous avons alors $\nu(u) \geq 0$ et $\nu(v) = 0$, d'où $\nu(x) \geq 0$. Réciproquement, si v appartient à $A \setminus \mathcal{Q}$, l'élément $x = 1/v$ appartient à $A_{\mathcal{Q}}$; nous avons donc l'inégalité $\nu(x) \geq 0$, d'où $\nu(v) \leq 0$ et v n'appartient pas à $\mathcal{P}$.

Si X est un schéma intègre quelconque, il peut arriver que la valuation ν n'ait pas de centre dans X. Par exemple si X est un schéma affine $X = \operatorname{Spec} A$, la valuation ν a un centre dans X si et seulement si l'anneau A est inclus dans l'anneau R_ν. Mais dans certains cas nous pouvons affirmer l'existence d'un centre dans X pour toute valuation ν.

Avant de donner une condition sur la variété X pour que toute valuation ν d'une extension K du corps des fonctions $F(X)$ ait un centre dans X, rappelons le rôle que jouent les anneaux de valuation dans l'étude locale des morphismes de schémas. Plus précisément nous pouvons définir des critères valuatifs de séparation et de propreté pour un morphisme de schémas $f\colon X \longrightarrow Y$, en considérant les diagrammes commutatifs de la forme:

$$\begin{array}{ccc} U = \operatorname{Spec} K & \xrightarrow{g} & X \\ \big\downarrow{\scriptstyle i} & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ T = \operatorname{Spec} V & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

où V est un anneau de valuation d'un corps K et où i est le morphisme naturel de $U = \operatorname{Spec} K$ dans $T = \operatorname{Spec} V$.

Nous avons ainsi les deux critères valuatifs suivants [EGA], Proposition 7.2.3 et Théorème 7.3.8; [Ha], chapitre II, Theorem 4.3 et Theorem 4.7:

Critère valuatif de séparation. *Soit $f\colon X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas, avec X noethérien. Le morphisme f est séparé si et seulement si pour tout anneau de valuation V, pour tout couple de morphismes (g,h) de $\big(U \xrightarrow{i} T\big)$ dans $\big(X \xrightarrow{f} Y\big)$, il existe au plus un morphisme $\bar{h}$ de T dans X tel que $f \circ \bar{h} = h$.*

Critère valuatif de propreté. *Soit $f\colon X \longrightarrow Y$ un morphisme de type fini de schémas, avec X noethérien. Le morphisme f est propre si et seulement si pour tout anneau de valuation V, pour tout couple de morphismes (g,h) de $\big(U \xrightarrow{i} T\big)$ dans $\big(X \xrightarrow{f} Y\big)$, il existe un et un seul morphisme $\bar{h}$ de T dans X tel que $f \circ \bar{h} = h$.*

Le critère valuatif de séparation signifie que pour tout diagramme commutatif de la forme:

$$\begin{array}{ccc} U = \operatorname{Spec} K & \xrightarrow{g} & X \\ \big\downarrow{\scriptstyle i} & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ T = \operatorname{Spec} V & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

il existe au plus un morphisme $\bar{h}$ de T dans X tel que le nouveau diagramme soit encore commutatif, et le critère valuatif de propreté assure en plus l'existence d'un tel morphisme $\bar{h}$.

Dans le cas d'un anneau de valuation discrète V, nous pouvons aussi considérer le schéma T comme un germe de courbe régulière et U comme l'ouvert constitué par le point générique η de T. Alors le critère valuatif de séparation signifie que pour tout morphisme h de T dans Y, il y a unicité du relèvement $\bar{h}$ de h de T dans X une fois que l'image du point générique η de T a été fixée, et le critère valuatif de propreté signifie qu'il y a existence et unicité du relèvement.

Soit k un corps et soit X une variété définie sur k, c'est à dire un schéma intègre de type fini sur k, nous avons un morphisme naturel $f\colon X \to \operatorname{Spec} k$ et par définition, la variété X est complète si et seulement si le morphisme f est propre. Nous considérons un corps K, extension du corps des fonctions $F(X)$ de la variété X, et une valuation ν de K telle que l'anneau R_ν associé est une k-algèbre. En particulier, nous en déduisons que la restriction de ν à k est la valuation impropre, c'est à dire la valuation ν vérifie $\nu(x) = 0$ pour tout élément x de k^*.

Proposition 6.3. *Si la variété X est complète, toute valuation ν vérifiant la condition précédente a un centre dans X.*

Preuve. Par hypothèse, nous avons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} K & \xrightarrow{\bar{g}} & X \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \operatorname{Spec} R_\nu & \xrightarrow{g} & \operatorname{Spec} k \end{array}$$

D'après le critère valuatif de propreté, il existe alors un unique morphisme h de $\operatorname{Spec} R_\nu$ dans X qui rend le diagramme commutatif, c'est à dire tel que $h \circ i = \bar{g}$ et $f \circ h = g$. L'image du point fermé $\mathcal{M}_\nu$ de $\operatorname{Spec} R_\nu$ par le morphisme h est le centre de la valuation ν dans X.

Proposition 6.4. *Soit X un k-schéma intègre excellent complet de corps des fonctions $F(X) = K$. Pour toute valuation ν de K, impropre sur k, la dimension du centre de ν sur X est inférieure ou égale à dim.alg.$_k\kappa_\nu$. De plus il existe un Y éclaté de X tel que le centre de ν sur Y est de dimension égale à dim.alg.$_k\kappa_\nu$.*

Preuve. Soit x le centre de la valuation ν sur X et soit $Z = \overline{\{x\}}$ le fermé engendré. Nous notons A l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ et $\mathcal{M}$ son idéal maximal et nous déduisons de l'inclusion de $F(Z) = A/\mathcal{M}$ dans $\kappa_\nu = R_\nu/\mathcal{M}_\nu$ l'inégalité $\dim Z \leq$ dim.alg.$_k\kappa_\nu$.

Si l'inégalité est stricte, nous prenons une base de transcendance $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ de l'extension $F(Z) \subset \kappa_\nu$, avec $\bar{x}_i$ dans κ_ν image de $x_i = \dfrac{p_i}{q} \in R_\nu,\ 1 \leq i \leq n$, et $q, p_1, \ldots, p_n$ appartenant à A. Nous considérons alors un idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_X$ localement engendré par $q, p_1, \ldots, p_n$ et Y l'éclaté de X le long de $\mathcal{I}$. Le centre Z' de ν sur Y vérifie $F(Z)\big(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\big) \subset F(Z')$, par conséquent Z' est de dimension dim.alg.$_k\kappa_\nu$.

7 Variété de Riemann

Dans ce paragraphe nous suivons la présentation donnée par Zariski et Samuel dans leur livre [Z-S], Chapitre 7, Paragraphe 17. Nous nous proposons d'étudier l'ensemble S de toutes les valuations d'un corps K donné, mais comme cet ensemble est trop gros nous allons faire la restriction suivante. Nous nous donnons un sous-anneau k du corps K, le plus souvent k sera un sous-corps de K, et nous nous restreignons aux valuations ν de K dont la restriction à k est impropre, c'est à dire aux valuations ν de K qui vérifient $\nu(x) = 0$ pour tout x dans k^*.

Définition. La Variété de Riemann, ou la Variété de Riemann-Zariski, de K relativement à k, ou Variété de Riemann de K/k, est l'ensemble $S = S(K/k)$ de toutes les valuations ν de K dont la restriction à k est impropre.

Remarque. Si k' est la fermeture intégrale de k dans K, alors les Variétés de Riemann $S(K/k)$ et $S(K/k')$ peuvent être identifiées; il existe une bijection canonique entre ces deux ensembles.

Remarque. Si k est un corps et si K est une extension algébrique de k, alors la seule valuation ν de K qui prolonge la valuation impropre de k est la valuation impropre de K d'après le corollaire de la proposition 5.2. Dans ce cas la Variété de Riemann $S(K/k)$ est réduite à un seul élément. Nous donnerons parfois une définition un peu différente de la Variété de Riemann et nous la noterons $S^*(K/k)$: c'est l'ensemble des valuations propres ν de K dont la restriction à k est impropre. Dans le cas d'une extension algébrique K de k, nous trouvons alors que la Variété de Riemann $S^*(K/k)$ est l'ensemble vide.

Dans la suite nous étudions le cas où le corps K est une extension de type fini, ou de degré de transcendance fini, d'un sous-corps k. Les valuations ν appartenant à $S(K/k)$ sont les valuations de K qui prolongent la valuation impropre de k. Nous pouvons munir les espaces $S = S(K/k)$ et $S^*(K/k)$ d'une topologie.

Définition. Pour tout sous-anneau A du corps K contenant le sous-anneau k, nous appelons $E(A)$ l'ensemble des valuations ν de S qui sont positives sur A, c'est à dire l'ensemble défini par $E(A) = \{\nu \in S(K/k) \,/\, A \subset R_\nu\}$, où nous notons R_ν l'anneau de la valuation ν. Nous définissons la topologie de la Variété de Riemann S en prenant comme base d'ouverts la famille E constituée des ensembles $E(A)$, où A parcourt l'ensemble des sous k-algèbres de type fini de K, c'est à dire où A est de la forme $k[x_1, \ldots, x_n]$, avec les x_j appartenant à K. Nous appelons cette topologie, la topologie de Zariski sur $S(K/k)$.

Il faut vérifier que nous définissons bien ainsi une base d'ouverts, pour cela il suffit de vérifier que l'intersection de deux éléments de E est encore un élément de E. Si A et A' sont deux sous-anneaux de K, nous notons $[A, A']$ le sous-anneau de K engendré par A et A'. Nous avons alors l'égalité $E(A) \cap E(A') = E([A, A'])$, et si A et A' sont de type fini sur k, $[A, A']$ est aussi de type fini sur k. Nous avons aussi la relation: $A \subset A' \Longrightarrow E(A') \subset E(A)$.

Théorème 7.1. *Pour toute valuation ν de la Variété de Riemann S, l'adhérence de $\{\nu\}$ est formée des valuations ν' qui sont composées avec ν:*

$$\overline{\{\nu\}} = \{\nu' \in S \;/\; \nu' \textit{ est composée avec } \nu\}.$$

Plus précisément l'adhérence $\overline{\{\nu\}}$ est isomorphe à la Variété de Riemann $S(\kappa_\nu/k)$ du corps résiduel κ_ν de la valuation ν.

Preuve. Par définition si ν' et ν sont deux valuations d'un même corps K, la valuation ν' est composée avec ν si et seulement si son anneau de valuation $R_{\nu'}$

est inclus dans l'anneau R_ν de ν. Si ν' appartient à l'adhérence de $\{\nu\}$, pour toute sous k-algèbre A de K de type fini telle que ν' appartient à l'ouvert $E(A)$, ν appartient aussi à $E(A)$. Par conséquent pour toute sous k-algèbre A de K de type fini, nous avons $A \subset R_{\nu'} \Longrightarrow A \subset R_\nu$, d'où $R_{\nu'}$ est inclus dans R_ν.

Réciproquement, si ν' n'appartient pas à l'adhérence de $\{\nu\}$, il existe une sous k-algèbre A de K incluse dans l'anneau $R_{\nu'}$ de la valuation ν' et qui n'est pas incluse dans R_ν. Il existe alors un élément x de A appartenant à $R_{\nu'}$ et n'appartenant pas à R_ν.

D'après la proposition 4.2, l'application Φ de $\overline{\{\nu\}}$ dans $S(\kappa_\nu/k)$ qui à toute valuation μ composée avec ν associe la valuation $\bar{\mu}$ de κ_ν telle que $\mu = \nu \circ \bar{\mu}$, est une bijection. Il est facile de vérifier que cette bijection est un homéomorphisme de $\overline{\{\nu\}}$ dans $S(\kappa_\nu/k)$. En effet, par construction de l'anneau de valuation R_μ à partir de l'anneau $R_{\bar{\mu}}$, nous avons pour tout élément x de R_ν $\mu(x) \geq 0$ si et seulement si $\bar{\mu}(\bar{x}) \geq 0$, où $\bar{x}$ est l'image de x dans κ_ν.

Remarque. Si nous appelons ν_0 la valuation impropre de K, toute valuation ν de K est composée avec ν_0, en effet l'anneau associé à la valuation impropre ν_0 est le corps K tout entier. Nous vérifions ainsi que ν_0 appartient à tout ouvert de la Variété de Riemann. Mais même si nous considérons la Variété de Riemann S^* obtenue en enlevant la valuation impropre ν_0, nous voyons grâce au théorème précédent que S^* n'est presque jamais un espace séparé. En effet nous déduisons du théorème qu'une condition nécessaire pour que tout point ν de la Variété de Riemann $S^*(K/k)$ soit fermé est que K soit une extension de degré de transcendance un de k, ou une extension algébrique du corps des fractions de k si k n'est pas un corps.

Théorème 7.2. *La Variété de Riemann $S(K/k)$ est un espace quasi-compact.*

D'après la remarque précédente, la valuation impropre ν_0 appartient à tout ouvert de la Variété de Riemann S. Par conséquent la Variété de Riemann S est quasi-compacte si et seulement si S^*, obtenue à partir de S en enlevant ν_0, l'est aussi.

Preuve du théorème. Nous donnons le démonstration de Chevalley telle qu'elle est exposée dans [Z-S]. Toute valuation ν de K est complètement déterminée par l'anneau de valuation R_ν associé, c'est à dire si nous savons pour quels éléments x de K, $\nu(x)$ est strictement positif, strictement négatif ou nul. Par conséquent nous pouvons considérer $S = S(K/k)$ comme un sous-ensemble de l'ensemble Z^K des applications de K dans $Z = \{+, 0, -\}$.

Nous définissons une topologie sur l'ensemble Z telle que les ouverts sont $\emptyset$, $\{0, +\}$ et Z, et nous en déduisons naturellement une topologie sur Z^K, considéré comme espace produit. La topologie induite sur le sous-ensemble S de Z^K est alors définie de la manière suivante: pour tout sous-ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de K, l'ensemble des valuations ν de S telles que pour tout x_j de cet ensemble, $\nu(x_j)$ appartienne à $\{0, +\}$, est un ouvert E de S, et les sous-ensembles E ainsi obtenus forment une base d'ouverts de la topologie de S. Nous retrouvons bien ainsi la topologie sur S définie précédemment, l'ouvert E correspond en effet à l'ouvert $E(A)$ pour la k-algèbre $A = k[x_1, \ldots, x_n]$.

Nous considérons maintenant sur Z une topologie plus forte que celle définie précédemment, telle que Z soit un espace séparé et telle que S soit un sous-espace fermé de Z^K. Alors si Z muni de cette topologie est un espace compact, les espaces Z^K muni de la topologie produit et S comme fermé de Z^K le sont aussi. Nous en déduisons que S muni de la topologie de Zariski qui est moins forte, est un espace quasi-compact. La topologie que nous allons considérer sur Z est la topologie discrète, c'est à dire telle que tout sous-ensemble de Z est un ouvert. Alors Z est un espace séparé et comme Z est un ensemble fini, c'est un espace compact. Il reste à montrer que la Variété de Riemann est un fermé de Z^K pour cette topologie. Une application $f\colon K \to Z$ appartient au sous-ensemble S de Z^K si et seulement si elle vérifie les trois conditions suivantes:
a) l'ensemble $V = \{x \in K \,/\, f(x) \in \{0, +\}\}$ est stable par addition et par multiplication;
b) l'anneau k est inclus dans V;
c) si l'élément x de K^* n'appartient pas à V, son inverse x^{-1} appartient à V.

Pour tout élément x de K, nous appelons pr_x l'application continue de Z^K dans Z définie par $f \mapsto f(x)$. Alors pour tout couple (x, y) de K^2 nous définissons le fermé $F_{x,y}$ de Z^K par
$$F_{x,y} = A_{x,y} \cap M_{x,y}\,,$$
avec
$$A_{x,y} = (pr_x)^{-1}(\{-\}) \cup (pr_y)^{-1}(\{-\}) \cup (pr_{x+y})^{-1}(\{0,+\})$$
et
$$M_{x,y} = (pr_x)^{-1}(\{-\}) \cup (pr_y)^{-1}(\{-\}) \cup (pr_{x.y})^{-1}(\{0,+\})\,.$$
Alors l'ensemble V est stable par addition (resp. par multiplication) si et seulement si l'application f vérifie:
$$\text{pour tout } (x,y) \in K^2,\ f(x) \geq 0 \text{ et } f(y) \geq 0 \Longrightarrow f(x+y) \geq 0 \ (\text{resp.} f(x.y) \geq 0)\,,$$
c'est à dire si et seulement si f appartient à $A_{x,y}$ (resp. à $M_{x,y}$).

Par conséquent la condition a) est équivalente à la condition fermée suivante:
a') pour tout couple (x, y) de K^2, f appartient à $F_{x,y}$.
De même les conditions b) et c) sont équivalentes aux conditions fermées suivantes:
b') pour tout x de k, f appartient à $(pr_x)^{-1}(\{0,+\})$;
c') pour tout x de K^*, f appartient à $(pr_x)^{-1}(\{0,+\}) \cup (pr_{x^{-1}})^{-1}(\{0,+\})$.

Nous avons ainsi montré que S est un sous-espace fermé de Z^K, donc que S est un espace compact.

Nous allons montrer que la Variété de Riemann $S = S(K/k)$ peut être considérée comme limite projective de schémas: $S = \varprojlim X_\alpha$. Nous considérons un corps k et une extension K de k. Nous allons nous intéresser aux modèles M de K sur k, c'est à dire aux schémas sur k intègres dont le corps des fonctions est K, et nous considérerons surtout les modèles complets.

Définition. Nous appelons L l'ensemble des k-algèbres locales P contenant k et contenues dans K, et pour toute algèbre P de L nous notons $m(P)$ son idéal maximal: $L = \{P\, k\text{-algèbre locale} \,/\, k \subset P \subset K\}$. Pour toute k-algèbre A contenant k et contenue dans K, non nécessairement locale, nous appelons $L(A)$ le sous-ensemble de L formé des k-algèbres P contenant A: $L(A) = \{P \in L \,/\, A \subset P\}$. Alors nous définissons une topologie sur L telle que l'ensemble des $L(A)$, pour A k-algèbre de type fini, est une base d'ouverts.

Si A est une k-algèbre de type fini, nous pouvons considérer le schéma affine $\operatorname{Spec} A$, et pour A avec $k \subset A \subset K$, nous pouvons définir une application naturelle $f_A \colon L(A) \to \operatorname{Spec} A$ par $f_A(P) = m(P) \cap A = \mathcal{P}$. Nous rappelons que $\operatorname{Spec} A$ est muni d'une topologie, la topologie de Zariski, telle que les fermés sont les sous-ensembles $V(\mathcal{I})$ de $\operatorname{Spec} A$ définis par $V(\mathcal{I}) = \{\mathcal{P} \in \operatorname{Spec} A \,/\, \mathcal{I} \subset \mathcal{P}\}$, pour tout idéal $\mathcal{I}$ de A. De plus $V(\mathcal{I})$ est isomorphe au schéma affine $\operatorname{Spec} A/\mathcal{I}$ associé à l'anneau quotient $A/\mathcal{I}$.

Proposition 7.3. *a) L'application f_A est continue de $L(A)$ dans* $\operatorname{Spec} A$.
b) De plus f_A est un homéomorphisme de $V(A)$ dans $\operatorname{Spec} A$*, où $V(A)$ est le sous-ensemble de $L(A)$ défini par* $V(A) = \{A_{\mathcal{P}} \,/\, \mathcal{P} \in \operatorname{Spec} A\}$.

Preuve. a) Il suffit de montrer que pour tout ouvert O de $\operatorname{Spec} A$, l'image inverse ${f_A}^{-1}(O)$ est un ouvert de $L(A)$, c'est à dire un ouvert de L. Nous pouvons nous restreindre aux ouverts $D(x) = \{\mathcal{P} \in \operatorname{Spec} A \,/\, x \notin \mathcal{P}\}$, et nous avons $D(x) \simeq \operatorname{Spec} A_x$, où A_x est l'anneau $S^{-1}A$ pour la partie multiplicative S engendrée par x. Nous pouvons alors vérifier que l'image inverse ${f_A}^{-1}\big(D(x)\big)$ est l'ouvert $L\big(A_x\big)$. En effet l'anneau local P appartient à ${f_A}^{-1}\big(D(x)\big)$ si et seulement si l'idéal premier $\mathcal{P} = m(P) \cap A$ de A ne contient pas x, c'est à dire x n'appartient pas à l'idéal maximal $m(P)$. Comme x appartient à A qui est inclus dans P, c'est équivalent à demander que l'inverse x^{-1} appartienne à l'anneau local P, donc à ce que A_x soit inclus dans P.
b) Par définition, l'application f_A est une bijection du sous-ensemble $V(A)$ dans le schéma affine $\operatorname{Spec} A$, et il faut montrer que f_A permet d'identifier la topologie sur $V(A)$ induite par celle sur L, et la topologie de Zariski sur $\operatorname{Spec} A$. Par définition de la topologie sur L, tout ouvert de $V(A)$ est intersection d'un nombre fini d'ouverts $O(x)$ de la forme $O(x) = \{P \in V(A) \,/\, x \in P\}$, pour x un élément non nul du corps des fractions de l'anneau A. Il suffit alors de montrer que le sous-ensemble $f_A\big(O(x)\big) = \{\mathcal{P} \in \operatorname{Spec} A \,/\, x \in A_{\mathcal{P}}\}$ est un ouvert de $\operatorname{Spec} A$.

Appelons $\mathcal{I}$ l'idéal de A défini par $\mathcal{I} = (A : x) = \{c \in A \,/\, cx \in A\}$. Un élément x du corps des fractions de A appartient à l'anneau localisé $A_{\mathcal{P}}$ si et seulement si x peut s'écrire sous la forme $x = a/b$ avec a et b dans A et b n'appartenant pas à $\mathcal{P}$, c'est à dire si et seulement s'il existe un élément b de $A \setminus \mathcal{P}$ tel que bx appartienne à A, ce qui est équivalent à demander l'existence d'un élément b de l'idéal $\mathcal{I}$ n'appartenant pas à $\mathcal{P}$. Nous avons ainsi montré que $f\big(O(x)\big)$ est le complémentaire dans $\operatorname{Spec} A$ du fermé $V(\mathcal{I})$.

Remarque. Si nous associons à chaque valuation ν appartenant à la Variété de Riemann $S = S(K/k)$ son anneau de valuation R_ν, nous pouvons considérer S comme un sous-ensemble de L. Pour toute k-algèbre $A \subset K$, nous avons l'égalité $E(A) = L(A) \cap S$, par conséquent la topologie sur L définie précédemment induit sur S la topologie de Zariski.

Nous considérons une k-algèbre A intègre de type fini, de corps des fractions K. L'ensemble des valuations ν appartenant à la Variété de Riemann $S = S(K/k)$ qui admettent un centre sur le schéma affine $X = \operatorname{Spec} A$ est égal à l'ouvert $E(A)$ de S. L'application g_A de $E(A)$ dans X qui à la valuation ν associe son centre x_ν sur X est la restriction à $E(A)$ de l'application f_A de $L(A)$ dans $\operatorname{Spec} A$ définie précédemment. En effet par définition, le centre x_ν de la valuation ν sur X correspond à l'idéal premier $\mathcal{P}_\nu$ de A défini par $\mathcal{P}_\nu = \max\big(R_\nu\big) \cap A$. Plus généralement, nous avons le résultat suivant.

Proposition 7.4. *Soit X est un k-schéma intègre, noethérien, de corps des fonctions K. L'ensemble des valuations ν de $S(K/k)$ qui admettent un centre sur X est un ouvert $U(X)$ de la Variété de Riemann $S(K/k)$ et l'application g_X qui à toute valuation ν de $U(X)$ associe son centre x_ν sur X est une application continue. De plus si le schéma X est complet sur k, l'ouvert $U(X)$ est égal à S tout entier, et nous avons une application continue $g_X \colon S \to X$.*

Preuve. Comme par définition le schéma X est séparé, le critère valuatif de séparation nous permet d'affirmer que toute valuation ν appartenant à S admet au plus un seul centre x_ν sur X. De même le critère valuatif de propreté nous donne l'existence du centre x_ν de la valuation ν sur X quand le schéma X est complet, d'où l'égalité $U(X) = S$ dans ce cas. Nous pouvons écrire le schéma X comme réunion d'un nombre fini d'ouverts affines $X_i = \operatorname{Spec} A_i$, $1 \leq i \leq n$, où les A_i sont des k-algèbres intègres de type fini, de corps des fractions K.

Le sous-ensemble $U(X)$ de S cherché est alors la réunion des ouverts $E\big(A_i\big)$, et la restriction de l'application g_X à l'ouvert A_i est l'application g_{A_i} définie précédemment. Nous en déduisons que $U(X)$ est un ouvert de S. Les applications g_{A_i} sont obtenues comme restrictions des applications f_{A_i} qui sont continues d'après la proposition 7.3, par conséquent elles sont continues elles aussi, ainsi que l'application g_X.

Rappelons que si la valuation ν admet un centre x_ν sur X, c'est à dire si ν appartient à l'ouvert $U(X)$ de S, il existe un morphisme birationnel s_ν du schéma affine $\operatorname{Spec} R_\nu$ dans X, tel que l'image du point fermé soit le centre x_ν de la valuation sur X. En effet, le centre x_ν est l'unique point x de X dont l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est dominé par l'anneau de valuation R_ν, et le morphisme s_ν est défini par l'inclusion de $\mathcal{O}_{X,x}$ dans R_ν.

Nous considérons deux k-schémas intègres X et X' de même corps des fonctions K et un morphisme birationnel h de X' dans X, si la valuation ν appartient à l'ouvert $U(X')$, alors nous avons un morphisme s'_ν de $\operatorname{Spec} R_\nu$ dans X' tel que l'image du point fermé est le centre x'_ν de ν sur X'. Le morphisme composé $s_\nu = h \circ s'_\nu$ permet de définir le centre $x_\nu = h\big(x'_\nu\big)$ de la valuation ν sur X.

En particulier l'ouvert $U(X')$ est inclus dans l'ouvert $U(X)$ et la restriction de l'applications g_X à $U(X')$ vérifie $g_X = h \circ g_{X'}$. De plus, si nous supposons que le morphisme h est propre, le critère valuatif de propreté appliqué au diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} K & \xrightarrow{j} & X' \\ \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ \operatorname{Spec} R_\nu & \xrightarrow{s_\nu} & X \end{array}$$

permet d'affirmer l'existence d'un unique morphisme $s'_\nu \colon \operatorname{Spec} R_\nu \to X'$ qui le rend commutatif. Nous en déduisons que toute valuation ν qui admet un centre sur X, admet aussi un centre sur X', c'est à dire que les ouverts $U(X)$ et $U(X')$ sont égaux.

Nous nous fixons un k-schéma intègre noethérien X de corps des fonctions K, et nous notons U l'ouvert $U(X)$ de la Variété de Riemann $S = S(K/k)$ formé des valuations ν admettant un centre sur X. Pour tout schéma Y tel qu'il existe un morphisme $h_Y \colon Y \to X$, propre birationnel, l'ouvert $U(Y)$ est égal à U et les applications continues $g_X \colon U \to X$ et $g_Y \colon U \to Y$ vérifient $g_X = h_Y \circ g_Y$. Si nous avons deux tels schémas Y et Y' propres au dessus de X et un morphisme $h_{Y',Y}$ de Y' dans Y vérifiant $h_{Y'} = h_Y \circ h_{Y',Y}$, nous notons $Y \prec Y'$. Nous appelons $\mathcal{C}$ le système projectif ainsi obtenu, et nous pouvons définir la limite projective

$$\mathcal{X} = \varprojlim_{\mathcal{C}} Y\,.$$

Cette limite projective est le sous-ensemble de l'espace produit $\prod_{\mathcal{C}} Y$ formé des éléments $\bar{x} = (x_Y)$ vérifiant $h_{Y',Y}(x_{Y'}) = x_Y$ pour tout couple (Y', Y) tel que $Y \prec Y'$. Nous le munissons de la topologie induite par la topologie produit sur $\prod_{\mathcal{C}} Y$, et les applications naturelles $t_Y \colon \mathcal{X} \to Y$ sont des applications continues.

Théorème 7.5. *Il existe un homéomorphisme naturel $t \colon U \to \mathcal{X}$ de l'ouvert $U = U(X)$ de la Variété de Riemann dans la limite projective $\mathcal{X} = \varprojlim_{\mathcal{C}} Y$. En particulier, la Variété de Riemann $S = S(K/k)$ peut être obtenue comme limite projective d'un système $\mathcal{C}$ de k-schémas Z intègres complets, ayant K comme corps des fonctions: $S = \varprojlim_{\mathcal{C}} Z$.*

Remarque. Au lieu de considérer un système de schémas complets Z, nous pouvons grâce au lemme de Chow nous restreindre à un sous-système de schémas projectifs, cf. [EGA], Théorème 5.6.1; [Ha], Chapitre II, Exercice 4.10.

Remarque. Les schémas complets sont des espaces topologiques quasi-compacts, mais nous ne pouvons pas en déduire la quasi-compacité de la Variété de Riemann S car ce ne sont pas des espaces séparés.

Remarque. La "topologie de Zariski" a été introduite par Zariski dans son article sur la Variété de Riemann [Za]; il définit cette topologie pour une variété algébrique X en donnant comme base d'ouverts les complémentaires des sous-variétés algébriques de X. Il définit cette topologie sur les variétés algébriques et la topologie sur la variété de Riemann $S(K/k)$ de manière à ce que la bijection t de $S(K/k)$ dans la limite projective $\mathcal{X} = \varprojlim_{\mathcal{C}} Y$ soit un homéomorphisme.

Preuve du théorème. Pour tout couple (Y, Y') du système $\mathcal{C}$ vérifiant $Y \prec Y'$, les applications $g_Y \colon U \to Y$ et $g_{Y'} \colon U \to Y'$ sont continues et vérifient $g_Y = h_{Y',Y} \circ g_{Y'}$. Par conséquent nous obtenons une application continue t de l'ouvert U de S dans la limite projective $\mathcal{X}$. Nous allons d'abord montrer que cette application $t \colon U \to \mathcal{X}$ est surjective. Nous considérons un point $\bar{x} = \big(x_Y\big)$ de $\mathcal{X}$, et nous notons R_Y l'anneau local du schéma Y au point $x_Y = t_Y(\bar{x})$, $R_Y = \mathcal{O}_{Y,x_Y}$. En particulier si nous avons $Y \prec Y'$, l'anneau $R_{Y'}$ domine l'anneau R_Y. Alors l'anneau $R = \cup_{Y\in\mathcal{C}} R_Y$ est un sous-anneau local de K, d'idéal maximal $\max(R) = \cup_{Y\in\mathcal{C}} \max\big(R_Y\big)$. Il existe un anneau de valuation V de K qui domine R et la valuation ν associée appartient à la Variété de Riemann $S = S(K/k)$. L'anneau de valuation V domine alors chacun des anneaux locaux R_Y, nous en déduisons que sur chaque schéma Y de $\mathcal{C}$, la valuation ν a pour centre le point x_Y, c'est à dire que l'image de ν par l'application t est le point $\bar{x}$, et que la valuation ν appartient à l'ouvert U.

Pour montrer l'injectivité de l'application $t \colon U \to \mathcal{X}$, nous allons montrer que l'anneau $\cup_{Y\in\mathcal{C}} R_Y$ défini précédemment à partir d'un point $\bar{x} = \big(x_Y\big)$ est un anneau de valuation de K. L'anneau R est un anneau local, de corps des fractions K, et nous allons montrer que pour tout élément non nul w de K, nous avons soit w, soit son inverse w^{-1} dans R. Nous pouvons écrire w sous la forme $w = u/v$, avec u et v appartenant à l'anneau R, c'est à dire qu'il existe Y' et Y'' dans $\mathcal{C}$ tels que $u \in R_{Y'}$ et $v \in R_{Y''}$. Pour tout couple (Y', Y'') de $\mathcal{C}$, il existe Y dans $\mathcal{C}$ tel que $Y' \prec Y$ et $Y'' \prec Y$, par conséquent nous pouvons supposer que les éléments u et v appartiennent au même anneau R_Y. Nous pouvons trouver un faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$ sur le schéma Y tel que $\mathcal{I}_{Y,x_Y}$ soit égal à l'idéal (u, v) de l'anneau local $R_Y = \mathcal{O}_{Y,x_Y}$. Nous appelons $r \colon Z \to Y$ le morphisme propre birationnel obtenu en faisant l'éclatement de centre $\mathcal{I}$ dans Y. Alors Z appartient au système projectif $\mathcal{C}$, l'anneau local $\mathcal{O}_{Z,x_Z}$ au point x_Z défini par $x_Z = t_Z(\bar{x})$, est R_Z et l'idéal $\mathcal{I}R_Z$ est engendré par l'un des deux éléments u ou v. Si $\mathcal{I}R_Z$ est engendré par u, alors $w^{-1} = v/u$ appartient à l'anneau R_Z, donc à R, et si $\mathcal{I}R_Z$ est engendré par v, alors w appartient à R. Si ν est une valuation de U dont l'image $t(\nu)$ dans $\mathcal{X}$ est le point $\bar{x}$, son anneau associé R_ν domine l'anneau local R. Par conséquent nous avons montré qu'il existe une unique valuation ν au dessus de $\bar{x}$, c'est la valuation associée à l'anneau R.

Il reste à montrer que l'application $t \colon U \to \mathcal{X}$ est une application fermée. Nous déduisons du b) de la proposition 7.3 que les applications $t_Y \colon U \to Y$ sont fermées, par conséquent l'application $t \colon U \to \mathcal{X}$ l'est aussi. En effet l'image par t d'un fermé F de U est le fermé de $\mathcal{X}$ défini par $t(F) = \mathcal{X} \cap \prod_{Y\in\mathcal{C}} t_Y(F)$.

Proposition 7.6. *Tout fermé irréductible F de la Variété de Riemann $S(K/k)$*

admet un point générique, c'est à dire est de la forme $F = \overline{\{\nu\}}$, où ν est une valuation de S.

Preuve. Soit F un fermé irréductible de $S = S(K/k)$, alors pour tout schéma complet X dans $\mathcal{C}$, l'image de F par l'application $g_X\colon S \to X$ est un fermé irréductible $F(X) = g_X(F)$ de X. Nous appelons $x_{F(X)}$ le point générique de $F(X)$, et $\bar{x} = (x_{F(X)})$ est un élément de la limite projective $\mathcal{X} = \varprojlim_{\mathcal{C}} X$. En effet pour tout morphisme $h\colon Y \to X$ propre birationnel, l'image de $F(Y)$ par h est $F(X)$, d'où $h(x_{F(Y)}) = x_{F(X)}$. Soit ν la valuation de S définie par $\bar{x}$, c'est à dire la valuation dont le centre sur chaque schéma complet X de $\mathcal{C}$ est le point $x_{F(X)}$. Comme ν appartient à ${g_X}^{-1}(g_X(F))$ pour tout X, ν appartient au fermé F de S, et nous allons montrer que ν est le point générique de F.

Supposons qu'il existe un valuation μ de F qui n'appartienne pas à $\overline{\{\nu\}}$. Soit A une sous k-algèbre de type fini de K, avec Frac $(A) = K$, telle que μ soit dans l'ouvert $E(A)$ de S et telle que ν n'y appartienne pas, et soit X un schéma complet dans $\mathcal{C}$ tel que $O = \operatorname{Spec} A$ soit un ouvert affine de X. Alors le centre $g_X(\mu)$ de μ sur X appartient à $F(X) = g_X(F)$ et à l'ouvert O, par conséquent le point générique $x_{F(X)}$ de $F(X)$ appartient aussi à O, ce qui est impossible car $x_{F(X)}$ est le centre de ν sur X et ν n'appartient pas à $E(A)$.

Nous rappelons que la dimension d'un espace topologique T est définie comme la longueur maximale d'une suite strictement croissante de fermés irréductibles de T, c'est à dire: dim T est le plus grand entier d tel qu'il existe une suite $\emptyset \subsetneq F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \ldots \subsetneq F_d$, où les F_i sont des fermés irréductibles. De même la codimension $\operatorname{codim}_T x$ d'un point x de T est définie comme le plus grand entier c tel qu'il existe une suite $x \in F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \ldots \subsetneq F_c$, où les F_i sont des fermés irréductibles.

Proposition 7.7. *Pour toute valuation ν de $S = S(K/k)$, il existe une suite finie unique de valuations $\{\nu_i\}_{0 \le i \le h}$ de longueur h maximale vérifiant $\nu = \nu_h$ et $\nu_i \in \overline{\{\nu_{i-1}\}}$ pour tout i, $1 \le i \le h$. De plus la longueur h de cette suite est égale au rang de la valuation ν.*

Preuve. D'après le théorème 7.1, une valuation ν_i appartient à une telle suite si ν est composée avec elle, c'est à dire si l'anneau de valuation R_ν est inclus dans R_{ν_i}. Nous déduisons alors de la proposition 3.3 que la suite cherchée $\{\nu_i\}$ correspond à la suite des anneaux de valuations contenant R_ν, ou ce qui revient au même à la suite des idéaux premiers de R_ν.

En particulier la valuation ν_0 est la valuation impropre correspondant à l'anneau K ou à l'idéal premier (0).

Remarque. Comme les seuls fermés irréductibles de la Variété de Riemann $S = S(K/k)$ sont de la forme $F = \overline{\{\nu\}}$ nous déduisons de cette proposition que la codimension de ν dans S est égale au rang de ν.

Remarque. Nous en déduisons aussi que le point générique ν de tout fermé irréductible F de la Variété de Riemann S est unique. De plus deux fermés irréductibles sont soit disjoints, soit l'un inclus dans l'autre.

Proposition 7.8. *La dimension topologique de la Variété de Riemann $S(K/k)$ est égale au degré de transcendance de l'extension $k \subset K$.*

Preuve. Nous déduisons du corollaire du théorème 5.5 appliqué au cas où la valuation ν est considérée comme un prolongement à K de la valuation triviale de k, que nous avons pour toute valuation ν de K l'inégalité:

$$\text{rang}\nu + \text{dim.alg.}_k \kappa_\nu \leq \text{dim.alg.}_k K .$$

Nous avons donc $\text{codim}_S \nu \leq \text{dim.alg.}_k K$ pour toute valuation ν et il est facile de trouver une valuation de K dont le rang soit égal au degré de transcendance n de K sur k. Nous pouvons par exemple construire une “valuation divisorielle composée” $\nu \colon K \to \left(\mathbb{Z}^n, +\right)_{lex}$ (cf. l'exemple 9 du paragraphe 10).

Corollaire. *Une valuation ν de la Variété de Riemann $S(K/k)$ est un point fermé si et seulement si le corps résiduel κ_ν est une extension algébrique de k.*

Si K est le corps des fonctions d'un k-schéma intègre excellent complet X, les points fermés de $S(K/k)$ sont les valuations dont les centres sur tous les schémas Y du système projectif $\mathcal{C}$ sont des points fermés.

Pour toute valuation ν non fermée et pour tout entier d, $1 \leq d \leq dim.alg._k \kappa_\nu$, il existe au moins un point fermé μ adhérent à ν tel que $dim(R_\mu) = d + dim(R_\nu)$.

Preuve. La valuation ν est un point fermé de S si et seulement si $\overline{\{\nu\}}$ est réduit à un point, c'est à dire d'après le théorème 7.1 et la proposition 7.8 si et seulement si le degré de transcendance de l'extension $k \subset K$ est nul. Soit ν une valuation dont le centre x_Y sur tout schéma Y de $\mathcal{C}$ est un point fermé. Alors l'ensemble $\{\nu\}$ est égal à $\bigcap t_Y{}^{-1}(x_Y)$ où t_Y est l'application naturelle de χ dans Y. Par conséquent $\{\nu\}$ est intersection de fermés, donc fermé. Réciproquement d'après la proposition 6.4 la dimension du centre x_Y de la valuation ν sur un schéma Y de $\mathcal{C}$ est toujours inférieure ou égale au degré de transcendance de $k \subset K$, par conséquent le centre x_Y est fermé pour tout Y. Comme l'adhérence $\overline{\{\nu\}}$ est isomorphe à la Variété de Riemann $S(\kappa_\nu/k)$, la dernière assertion du corollaire est une conséquence de la remarque suivant le corollaire du théorème 5.5.

Remarque. Il existe un analogue de la Variété de Riemann en géométrie analytique: “la voûte étoilée” définie par Hironaka [Hi]. Au lieu de considérer la variété $S = \varprojlim_{\mathcal{C}} X'$, où $\mathcal{C}$ est le système projectif constitué par tous les morphismes propres birationnels au dessus de la variété algébrique X, la voûte étoilée $p_Y \colon \mathcal{E}_Y \to Y$ d'un espace analytique complexe Y est définie comme l'espace de certaines limites inverses de composés finis d'éclatements locaux $h_{Y'} \colon Y' \to Y$.

8 Uniformisation et résolution des singularités

Soit X un schéma excellent, un point non-singulier x de X est un point tel que l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau régulier. Si nous supposons que le schéma X est réduit, l'ensemble des points non-singuliers x de X est un ouvert dense X_{reg} de X. Nous disons que le schéma X est non-singulier si tous les points x de X sont non-singuliers, c'est à dire si l'ouvert X_{reg} est égal à X tout entier. En particulier toutes les composantes connexes du schéma X sont irréductibles.

Par définition une résolution des singularités du schéma réduit X est un morphisme propre birationnel $\pi\colon \tilde{X} \to X$ d'un schéma non-singulier $\tilde{X}$ dans X, nous pouvons demander de plus que le morphisme π induise un isomorphisme au dessus de l'ouvert X_{reg}. Pour résoudre le problème de l'existence d'une résolution des singularités Zariski a démontré un résultat concernant les valuations centrées sur X ou plus précisément concernant la variété de Riemann associée à X, en supposant que X est irréductible, cas auquel il est toujours possible de se ramener.

Dans la suite nous considérons une variété X définie sur un corps k et de corps des fonctions K. Soit ν une valuation appartenant à l'ouvert $U(X)$ de la variété de Riemann $S = S(K/k)$, nous disons que le centre de ν sur X est non-singulier si le point $x = g_X(\nu)$ est un point non-singulier de X, c'est à dire appartenant à X_{reg}.

Théorème d'Uniformisation. *Soit X une variété définie sur un corps k de caractéristique nulle, de corps des fonctions K. Alors pour toute valuation ν appartenant à l'ouvert $U(X)$ de la variété de Riemann $S(K/k)$ il existe un morphisme propre birationnel $\varphi\colon X' \to X$ tel que le centre de la valuation ν sur X' est non-singulier.*

Nous allons montrer comment ce théorème est un pas important dans la démonstration de l'existence d'un résolution des singularités. En particulier, c'est par cette méthode que Zariski a résolu le problème pour les variétés de dimension 2 et 3, cf. [Co].

Pour simplifier nous supposons que la variété X est propre, c'est à dire que l'ouvert $U(X)$ est la variété de Riemann $S = S(K/k)$. Pour toute valuation ν appartenant à S, il existe d'après le théorème d'uniformisation un morphisme propre birationnel $\varphi_\nu\colon X'(\nu) \to X$ tel que le centre x'_ν de la valuation ν est un point non-singulier de la variété $X'(\nu)$, c'est à dire appartient à l'ouvert dense $X'(\nu)_{\text{reg}}$. L'image inverse de $X'(\nu)_{\text{reg}}$ par l'application $g_{X'(\nu)}\colon S(K/k) \to X'(\nu)$ est aussi un ouvert non vide $W(\nu)$ de la variété de Riemann S.

Ainsi pour toute valuation ν de S, nous trouvons un morphisme propre birationnel $\varphi_\nu\colon X'(\nu) \to X$ et un ouvert $W(\nu)$ de S contenant ν et tel que toute valuation μ appartenant à cet ouvert a un centre non-singulier sur la variété $X'(\nu)$. Comme la variété de Riemann S est quasi-compacte, nous en déduisons l'existence d'une famille finie d'ouverts $W_1, W_2, \dots, W_k$ recouvrant S et de morphismes propres birationnels $\varphi_i\colon X'_i \to X$, $1 \le i \le k$, telle que pour tout i le centre sur X'_i de toute valuation appartenant à l'ouvert W_i est non-singulier. En particulier, pour tout point x de la variété X et pour toute valuation ν de S de centre x sur X, il existe un voisinage ouvert U de x dans X, un indice i et un voisinage ouvert non-singulier U_i' de ν dans la variété X_i', tels que U soit contenu dans l'image de U_i' par le morphisme φ_i.

Le problème de l'existence d'une résolution des singularités se ramène alors au problème de recollement suivant.

Problème de recollement. *Soit X une variété définie sur un corps k et soient $\varphi_i\colon X_i' \to X$, $1 \leq i \leq 2$, deux morphismes propres birationnels. Existe-t-il une variété Y et des morphismes propres birationnels $\psi_1 : Y \to X_1'$ et $\psi_2 : Y \to X_2'$ tels que les morphismes composés $\varphi_1 \circ \psi_1$ et $\varphi_2 \circ \psi_2$ de Y dans X soient égaux et tels que l'ouvert Y_{reg} vérifie $\psi_1^{-1}\big(X'_{1\text{reg}}\big) \cup \psi_2^{-1}\big(X'_{2\text{reg}}\big) \subset Y_{\text{reg}}$?*

Si nous pouvons trouver une telle variété X', nous trouvons par récurrence sur le nombre k d'ouverts W_i recouvrant la variété de Riemann S une variété $\tilde{X}$ et un morphisme propre birationnel $\psi\colon \tilde{X} \to X$ vérifiant: le centre x sur $\tilde{X}$ de toute valuation ν de la surface de Riemann S est non-singulier. Nous obtenons ainsi une résolution $\psi\colon \tilde{X} \to X$ des singularités de X.

9 Valuation sur un anneau noethérien

Soit A un anneau local noethérien de corps des fractions K, d'idéal maximal $\max(A) = \mathcal{M}$ et de corps résiduel k. Nous considérons une valuation ν de K dont l'anneau de valuation R_ν domine l'anneau A, c'est à dire vérifiant $\nu(x) \geq 0$ pour tout x appartenant à A et $\nu(x) > 0$ pour tout x appartenant à $\mathcal{M}$. Nous disons que la valuation ν domine l'anneau A ou est centrée en A.

Nous notons R_ν l'anneau de la valuation et κ_ν son corps résiduel, comme l'anneau R_ν domine l'anneau A nous avons une inclusion naturelle entre les corps résiduels: $k \subset \kappa_\nu$, et nous notons $\text{deg.tr.}_k\nu = \text{dim.alg.}_k\kappa_\nu$ le degré de transcendance de cette extension. Nous appelons Γ le groupe de la valuation ν. Par hypothèse l'image de A^* par ν est un semi-groupe Φ de Γ, inclus dans Γ^+ car $A \subset R_\nu$, et qui engendre le groupe Γ car K est le corps des fractions de A.

Proposition 9.1. *Si l'anneau A est noethérien, le semi-groupe Φ est un ensemble bien ordonné.*

Preuve. Il faut montrer que tout sous-ensemble non vide E de Φ admet un plus petit élément. Considérons l'image inverse de E dans l'anneau A par la valuation ν: $S = \nu^{-1}(E) \cap A = \big\{x \in A \,/\, \nu(x) \in E\big\}$ et l'idéal $\mathcal{I}$ de A engendré par S. L'idéal $\mathcal{I}$ possède un nombre fini de générateurs $x_1, \dots, x_l$ que nous pouvons choisir appartenant à S. Nous appelons α le plus petit élément de l'ensemble $\big\{\nu(x_i) \,/\, 1 \leq i \leq l\big\}$, et nous allons vérifier que c'est bien le plus petit élément de l'ensemble E. Comme les générateurs de l'idéal $\mathcal{I}$ ont été choisis dans S nous avons bien $\alpha \in E$ et par construction, pour tout x dans $\mathcal{I}$, nous avons l'inégalité $\nu(x) \geq \alpha$, d'où pour tout β de E, l'inégalité $\beta \geq \alpha$.

Nous pouvons faire pour l'anneau A une construction analogue à celle que nous avons faite pour l'anneau de valuation R_ν (cf. la remarque suivant le théorème 3.2). Pour tout élément α du semi-groupe Φ, nous pouvons définir les idéaux $\mathcal{P}_\alpha(A)$ et $\mathcal{P}_{\alpha+}(A)$ par:

$$\mathcal{P}_\alpha(A) = \big\{x \in A \,/\, \nu(x) \geq \alpha\big\} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{\alpha+}(A) = \big\{x \in A \,/\, \nu(x) > \alpha\big\}\,.$$

Les idéaux de l'anneau A qui sont des contractions d'idéaux de l'anneau de valuation R_ν, c'est à dire les idéaux $\mathcal{I}$ de la forme $\mathcal{I} = \mathcal{J} \cap A$ avec $\mathcal{J}$ idéal de R_ν, sont appelés les ν-idéaux de A. Les idéaux $\mathcal{P}_\alpha(A)$ et $\mathcal{P}_{\alpha+}(A)$ sont des ν-idéaux et comme l'anneau A est noethérien tout ν-idéal $\mathcal{I}$ de A est l'un des $\mathcal{P}_\alpha(A)$. Nous pouvons aussi considérer les deux algèbres graduées associées à la valuation ν sur l'anneau A:

$$\mathrm{Gr}_\nu A := \bigoplus_{\alpha\in\Gamma} \mathcal{P}_\alpha(A) \quad \text{et} \quad \mathrm{gr}_\nu A := \bigoplus_{\alpha\in\Phi} \mathcal{P}_\alpha(A)/\mathcal{P}_{\alpha+}(A)\,.$$

Et comme précédemment l'étude des idéaux $\mathcal{P}_\alpha(A)$ et des algèbres $\mathrm{Gr}_\nu A$ et $\mathrm{gr}_\nu A$ joue un rôle important dans l'étude de la valuation ν sur l'anneau A.

Définition. Le semi-groupe Φ est archimédien si pour tout α et β appartenant à Φ, avec $\alpha \neq 0$, il existe un entier r tel que $r\alpha > \beta$. C'est équivalent à dire que tout sous-groupe isolé Δ de Γ vérifie $\Phi \cap \Delta = \{0\}$. C'est aussi équivalent à dire que tout ν-idéal $\mathcal{P}_\beta$ de A est $\mathcal{M}$-primaire. En effet si nous posons $\alpha = \nu\big(\mathcal{M}\big) := \inf\big\{\nu(x) \,/\, x \in \mathcal{M}\big\}$, nous avons $\alpha > 0$. Ainsi pour tout β appartenant à Φ il existe un entier r tel que $\mathcal{M}^r \subset \mathcal{P}_\beta$.

Remarque. Cette propriété ne dépend pas uniquement de la valuation ν, mais aussi de l'anneau A. En particulier c'est plus faible que demander que la valuation ν soit réelle, c'est à dire de rang 1.

Considérons par exemple un anneau local régulier A de dimension deux, de corps des fractions K et la valuation ν de K à valeurs dans $\big(\mathbb{Z}^2\big)_{lex}$ définie par $\nu(u) = (1,1)$ et $\nu(v) = (1,0)$, où (u,v) est un système régulier de paramètres de l'anneau A. Alors le semi-groupe $\Phi = \nu(A^*)$ est égal à $\big\{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \,/\, n \geq m \geq 0\big\}$ et le seul sous-groupe isolé $\Delta = \big\{(0,m) \,/\, m \in \mathbb{Z}\big\}$ de Γ non réduit à $\{0\}$, vérifie $\Phi \cap \Delta = \{0\}$. Nous en déduisons que le semi-groupe Φ est archimédien alors que le groupe qu'il engendre est de rang 2.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal sur les valuations sur un anneau noethérien: le théorème d'Abhyankar.

Théorème 9.2. *Soit A un anneau local noethérien de corps des fractions K, d'idéal maximal $\mathcal{M}$ et de corps résiduel k et soit ν une valuation de K qui domine l'anneau A.*
a) Nous avons l'inégalité:

$$\textit{rang rat.}\nu \;+\; \textit{deg.tr.}_k\nu \;\leq\; \textit{dim}\,A\,.$$

b) Si nous avons l'égalité alors le groupe de la valuation Γ *est isomorphe à* $\mathbb{Z}^d$ *et le corps résiduel* κ_ν *est une extension de type fini du corps* k.
c) Si de plus nous avons l'égalité rang $\nu +$ *deg.tr.*$_k \nu =$ *dim* A *alors la valuation* ν *est discrète, c'est à dire le groupe de la valuation* Γ *est isomorphe à* $\mathbb{Z}^d$ *muni de l'ordre lexicographique.*

La démonstration originale d'Abhyankar utilisait une récurrence sur le rang de la valuation ν et dans le cas où le rang est 1, un théorème de comparaison entre les valuations centrées sur l'anneau A et sur son complété $\hat{A}$. Nous allons donner ici la démonstration de Spivakovsky [Sp 2].

Preuve du théorème. Nous allons d'abord démontrer l'inégalité:

$$\text{rang rat.}\nu \, + \, \text{deg.tr.}_k \nu \, \leq \, \dim A \, .$$

Par récurrence sur la dimension de l'anneau A nous allons nous ramener au cas où le degré de transcendance deg.tr.$_k\nu$ est nul et où le semi-groupe Φ est archimédien.
Réduction 1. Nous pouvons supposer que le degré de transcendance deg.tr.$_k\nu$ est nul. Supposons deg.tr.$_k\nu > 0$ et soit x un élément de l'anneau R_ν dont l'image $\bar{x}$ dans le corps résiduel κ_ν est transcendante sur k. Nous considérons l'idéal $\mathcal{M}_1$ de $A[x]$ défini par $\mathcal{M}_1 = \max(R_\nu) \cap A[x]$ et le localisé $B = A[x]_{\mathcal{M}_1}$. Par hypothèse nous avons dim.alg.$_k k_1 \, = 1$, où k_1 est le corps résiduel de l'anneau local B, d'où l'égalité

$$\text{deg. tr.}_k \nu \, = \, \text{deg.tr.}_{k_1} \nu \, + 1 \, .$$

Pour conclure il suffit de montrer que nous avons $\dim B \, \leq \, \dim A \, - 1$. En effet nous pouvons alors faire une récurrence sur la dimension de l'anneau A et nous trouvons $\dim A \, \geq \, \dim B \, + 1 \, \geq$ rang rat.$\nu +$ deg.tr.$_{k_1} \nu \, + 1$. Cette inégalité est une conséquence directe du théorème suivant [Ma]:

Théorème de la dimension. Soient A *un anneau noethérien intègre,* C *une* A*-algèbre intègre de type fini, soient* $\mathcal{Q}$ *un idéal premier de* C *et* $\mathcal{P}$ *l'idéal premier de* A *défini par* $\mathcal{P} = \mathcal{Q} \cap A$*. Nous avons alors l'inégalité:*

$$ht(\mathcal{Q}) \leq \, ht\mathcal{P} \, + \, dim.alg._A C \, - \, dim.alg._{\kappa(\mathcal{P})} \kappa(\mathcal{Q}) \, ,$$

où $dim.alg._A C$ *et* $dim.alg._{\kappa(\mathcal{P})} \kappa(\mathcal{Q})$ *sont respectivement le degré de transcendance du corps des fractions de* C *sur celui de* A*, et le degré de transcendance du corps des fractions de* $C/\mathcal{Q}$ *sur celui de* $A/\mathcal{P}$*.*

Il suffit d'appliquer ce théorème à l'idéal $\mathcal{Q} = \mathcal{M}_1$ de l'anneau $C = A[x]$ pour trouver le résultat cherché. Mais dans le cas qui nous intéresse, nous allons donner une démonstration de cette inégalité. Nous allons d'abord montrer $\dim A[x] \, \leq \, \dim A$. (Plus généralement, si A et A' sont deux anneaux intègres ayant même corps des fractions K et tels que $A \subset A'$, alors $\dim A' \, \leq \, \dim A$.)

Nous avons un morphisme surjectif de l'anneau de polynômes $A[X]$ dans l'anneau $A[x]$ et nous appelons $\mathcal{P}$ son noyau. Comme l'anneau A est noethérien, nous avons dim $A[X] = \dim A + 1$. Comme x appartient au corps K, il peut s'écrire sous la forme $x = a/b$ avec a et b appartenant à A, et l'élément $bX - a$ appartient à l'idéal premier $\mathcal{P}$ de $A[X]$; par conséquent $\mathcal{P}$ n'est pas réduit à l'idéal $\{0\}$ et nous trouvons l'inégalité:

$$\dim A[x] \leq \dim A[X] - 1 = \dim A\,.$$

Nous allons maintenant montrer dim $B < \dim A[x]$. Il suffit de montrer que l'idéal premier $\mathcal{M}_1$ de $A[x]$ défini par $\mathcal{M}_1 = \max(R_\nu) \cap A[x]$ n'est pas un idéal maximal de l'anneau $A[x]$. Si $\mathcal{M}_1$ était un idéal maximal de $A[x]$, l'élément x qui n'appartient pas à cet idéal aurait un inverse y modulo $\mathcal{M}_1$. Plus précisément, il existerait un élément y dans $A[x]$ tel que $1 - xy \in \mathcal{M}_1$, ce qui contredirait l'hypothèse de transcendance de $\bar{x}$ sur le corps k. Nous avons donc:

$$\dim B \leq \dim A[x] - 1\,.$$

Réduction 2. Nous pouvons supposer que le semi-groupe Φ est archimédien. Supposons que Φ n'est pas archimédien, il existe un sous-groupe isolé Δ de Γ tel que $\Delta \cap \Phi \neq \{0\}$ et nous appelons $\mathcal{Q}$ l'idéal premier de l'anneau de valuation R_ν associé au sous-groupe Δ:

$$\mathcal{Q} = \{x \in R_\nu \;/\; \nu(x) \notin \Delta\}\,.$$

Alors la valuation ν de K est la valuation composée avec la valuation ν_0 de K associée à l'anneau de valuation $(R_\nu)_{\mathcal{Q}}$ et la valuation $\tilde{\nu}$ associée à l'anneau de valuation $R_\nu/\mathcal{Q}$: $\nu = \nu_0 \circ \tilde{\nu}$. Si nous appelons $\mathcal{P}$ l'idéal premier de l'anneau A défini par $\mathcal{P} = \mathcal{Q} \cap A$, l'anneau local $(R_\nu)_{\mathcal{Q}}$ domine l'anneau local $A_{\mathcal{P}}$ et l'anneau quotient $A/\mathcal{P}$ est inclus dans l'anneau quotient $R_\nu/\mathcal{Q}$. Nous avons les inclusions strictes:

$$(0) \subsetneq \mathcal{P} \subsetneq \mathcal{M}\,.$$

En effet comme l'idéal $\mathcal{Q}$ de R_ν n'est pas réduit à (0) nous avons aussi $\mathcal{P} \neq (0)$. Et par hypothèse il existe un élément α non nul du semi-groupe Φ appartenant au sous-groupe isolé Δ, c'est à dire il existe un élément x de l'idéal maximal $\mathcal{M}$ de A n'appartenant pas à $\mathcal{P}$. Nous en déduisons que l'anneau quotient $A/\mathcal{P}$ et l'anneau localisé $A_{\mathcal{P}}$ sont de dimension strictement inférieure à la dimension de l'anneau A. En particulier nous pouvons supposer par récurrence sur la dimension de l'anneau A que le théorème d'Abhyankar est vérifié pour toute valuation centrée en $A_{\mathcal{P}}$ et toute valuation centrée en $A/\mathcal{P}$.

Nous appelons respectivement $\tilde{K}$ et $\bar{K}$ les corps des fractions des anneaux quotients $R_\nu/\mathcal{Q}$ et $A/\mathcal{P}$, $\bar{K}$ est un sous-corps de $\tilde{K}$. Le corps $\tilde{K}$ est aussi le corps résiduel de l'anneau localisé $(R_\nu)_{\mathcal{Q}}$, c'est à dire de l'anneau de valuation R_{ν_0} associé à la valuation ν_0: $\tilde{K} = \kappa_{\nu_0}$. De même le corps $\bar{K}$ est le corps résiduel de l'anneau localisé $A_{\mathcal{P}}$.

Par récurrence sur la dimension de l'anneau, le théorème est vérifié pour la valuation ν_0 du corps K centrée en l'anneau $A_{\mathcal{P}}$ et nous avons l'inégalité:

deg.tr.$_{\bar{K}}\nu_0 +$ rang rat.$\nu_0 \leq$ dim $A_{\mathcal{P}}$, où deg.tr.$_{\bar{K}}\nu_0$ est le degré de transcendance de l'extension $\tilde{K}/\bar{K}$ et où rang rat.ν_0 est le rang rationnel du groupe des ordres de la valuation ν_0, c'est à dire du groupe quotient Γ/Δ d'après la proposition 4.1. Nous obtenons ainsi:

$$\text{rang rat.}\Gamma/\Delta \;+\; \text{dim.alg.}_{\bar{K}}\tilde{K} \;\leq\; \text{dim}A_{\mathcal{P}}. \qquad (1)$$

Nous appelons $\bar{\nu}$ la valuation de $\bar{K}$ obtenue comme restriction de la valuation $\tilde{\nu}$ et $\bar{\Gamma}$ son groupe des ordres, qui est un sous-groupe du groupe des ordres $\tilde{\Gamma}$ de $\tilde{\nu}$, isomorphe au sous-groupe Δ de Γ d'après la proposition 4.1. L'anneau associé à la valuation $\tilde{\nu}$ du corps $\tilde{K}$ est l'anneau quotient $R_\nu/\mathcal{Q}$; cet anneau domine l'anneau quotient $A/\mathcal{P}$, par conséquent l'anneau $R_{\bar{\nu}}$, associé à la valuation $\bar{\nu}$ du corps $\bar{K}$, domine aussi $A/\mathcal{P}$. Par récurrence sur la dimension de l'anneau, le théorème est vérifié pour la valuation $\bar{\nu}$ et nous avons l'inégalité: deg.tr.$_k\bar{\nu} +$ rang rat.$\bar{\nu} \leq$ dim $A/\mathcal{P}$, où deg.tr.$_k\bar{\nu}$ est le degré de transcendance de l'extension $\kappa_{\bar{\nu}}/k$. Nous obtenons:

$$\text{rang rat.}\bar{\Gamma} \;+\; \text{dim.alg.}_k\kappa_{\bar{\nu}} \;\leq\; \text{dim}A/\mathcal{P}. \qquad (2)$$

Nous pouvons maintenant considérer l'inégalité a) du corollaire du théorème 5.5 pour la valuation $\tilde{\nu}$ de $\tilde{K}$ considérée comme extension de la valuation $\bar{\nu}$ de $\bar{K}$, et nous trouvons: rang rat.$\big(\tilde{\Gamma}/\bar{\Gamma}\big) +$ dim.alg.$_{\kappa_{\bar{\nu}}}\kappa_{\tilde{\nu}} \leq$ dim.alg.$_{\bar{K}}\tilde{K}$, où le corps résiduel $\kappa_{\tilde{\nu}}$ de la valuation $\tilde{\nu}$ est égal au corps résiduel de la valuation ν et où le groupe $\tilde{\Gamma}$ est isomorphe au sous-groupe Δ. Nous trouvons alors:

$$\text{rang rat.}\big(\Delta/\bar{\Gamma}\big) \;+\; \text{dim.alg.}_{\kappa_{\bar{\nu}}}\kappa_\nu \leq \text{dim.alg.}_{\bar{K}}\tilde{K}. \qquad (3)$$

Nous déduisons de la proposition 3.5 et de dim $A/\mathcal{P} +$ dim $A_{\mathcal{P}} \leq$ dim A, l'inégalité cherchée pour la valuation ν centrée en A:

$$\text{rang rat.}\Gamma \;+\; \text{dim.alg.}_k\kappa_\nu \;\leq\; \text{dim}\,A\,.$$

Grâce aux deux réductions précédentes, il suffit pour montrer la partie a) du théorème de montrer l'inégalité: rang rat.$\nu \;\leq\;$ dim A, où ν est une valuation centrée en A, de degré de transcendance nul et telle que le semi-groupe $\Phi = \nu(A^*)$ est archimédien.

Soit n le rang rationnel de la valuation ν, c'est à dire le rang rationnel du groupe Γ. Nous pouvons alors choisir des éléments $x_1, \ldots, x_n$ appartenant à l'anneau A tels que les éléments $\nu(x_1), \ldots, \nu(x_n)$ de Φ forment une base de $\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, en particulier ces éléments sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Z}$ et nous en déduisons que tous les monômes $\underline{x}^{\underline{l}} = x_1^{l_1} \ldots x_n^{l_n}$, avec $\underline{l} = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^n$, prennent des valeurs distinctes par la valuation ν. Comme le semi-groupe Φ est archimédien, il existe un entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $\nu(x_i) \leq r\alpha$, pour tout i, $1 \leq i \leq n$, où α est l'élément de Γ défini par $\alpha = \nu\big(\mathcal{M}\big)$. Par conséquent, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $\underline{l} \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $|\underline{l}| = l_1 + \ldots + l_n \leq m$, les monômes $\underline{x}^{\underline{l}}$ n'appartiennent pas à l'idéal $\mathcal{P}_{rm\alpha} = \big\{\, y \,/\, \nu(y) \geq rm\alpha \,\big\}$. Nous déduisons même de l'indépendance linéaire des $\nu(x_i)$ que l' ensemble des monômes $\{\, \underline{x}^{\underline{l}} \,/\, |\underline{l}| \leq m \,\}$ forment une famille libre de $A/\mathcal{P}_{rm\alpha}$. Et nous trouvons l'inégalité:

$$\text{long.}\big(A/\mathcal{M}^{rm}\big) \ \geq\ \text{long.}\big(A/\mathcal{P}_{rm\alpha}\big) \ \geq\ \sharp\,\{\, \underline{l} \in \mathbb{N}^n \,/\, |\underline{l}| \leq m \,\} \ =\ \binom{m+n}{n}\,.$$

Comme la fonction $H(m) = \text{long.}\big(A/\mathcal{M}^{rm}\big)$ est minorée par $\binom{m+n}{n}$, c'est à dire par un polynôme en m de degré n, nous trouvons l'inégalité: dim $A \geq n$.

Supposons maintenant que la valuation ν centrée sur l'anneau noethérien A vérifie l'égalité:

$$(*) \quad \text{rang rat.}\nu \,+\, \text{deg.tr.}_k\nu \ =\ \dim A\,.$$

Nous allons d'abord montrer que nous pouvons encore supposer que le degré de transcendance deg tr.$_k\nu$ est nul et que le semi-groupe Φ est archimédien. Nous gardons les mêmes notations que précédemment.

Réduction 1'. Si la valuation ν centrée sur l'anneau A vérifie l'égalité $(*)$ la valuation ν centrée sur l'anneau B défini par $B = A[x]_{\mathcal{M}_1}$, vérifie aussi l'égalité:

$$(*) \quad \text{rang rat.}\nu \,+\, \text{deg.tr.}_{k_1}\nu \ =\ \dim B\,.$$

Comme le corps k_1 est une extension de type fini du corps k, si le théorème est vérifié pour la valuation ν centrée en B par hypothèse de récurrence sur la dimension de l'anneau, il est aussi vérifié pour la valuation ν centrée en A.

Réduction 2'. Si la valuation ν centrée sur l'anneau A vérifie l'égalité $(*)$ les trois inégalités (1), (2) et (3) apparaissant précédemment sont en fait des égalités. En particulier les valuations ν_0 centrée en $A_{\mathcal{P}}$ et $\bar{\nu}$ centrée en $A/\mathcal{P}$ vérifient aussi l'égalité $(*)$. Nous en déduisons par hypothèse de récurrence sur la dimension de l'anneau, que les groupes Γ/Δ et $\bar{\Gamma}$ sont des $\mathbb{Z}$-modules libres de rang fini et que les extensions $\tilde{K}/\bar{K}$ et $\kappa_{\bar{\nu}}/k$ sont de type fini. Nous avons aussi l'égalité:

$$\text{dim.alg.}_{\kappa_{\bar{\nu}}}\kappa_\nu \,+\, \text{rang rat.}\big(\Delta/\bar{\Gamma}\big) \ =\ \text{dim.alg.}_{\bar{K}}\tilde{K}\,.$$

Comme l'extension $\tilde{K}/\bar{K}$ est de type fini, nous déduisons du a) du corollaire du théorème 5.5 que l'extension $\kappa_\nu/\kappa_{\bar{\nu}}$ est de type fini et que le groupe $\Delta/\bar{\Gamma}$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini. Il reste à montrer que le groupe Γ est un $\mathbb{Z}$-module libre. C'est une conséquence des propriétés des groupes $\bar{\Gamma}$, $\Delta/\bar{\Gamma}$ et Γ/Δ et du fait que le groupe Γ est ordonné donc sans torsion.

Nous supposons donc que nous avons une valuation ν centrée sur un anneau noethérien A, telle que le degré de transcendance deg.tr.$_k\nu$ est nul et telle que le semi-groupe $\Phi = \nu(A^*)$ est archimédien, vérifiant l'égalité rang rat.ν = dim A. Nous reprenons les notations de la démonstration de la partie a) du théorème.

Par hypothèse sur la dimension de A, la fonction $H(m) = \text{long.}\big(A/\mathcal{M}^{rm}\big)$ est majorée par un polynôme en m de degré n, la fonction $H'(m) = \text{long.}\big(A/\mathcal{P}_{rm\alpha}\big)$

est aussi majorée par un polynôme en m de degré n. Nous avons l'égalité:

$$H'(m) = \mathrm{long.}\big(A/\mathcal{P}_{rm\alpha}\big) = \sum_{\substack{\beta\in\Phi \\ \beta\leq rm\alpha}} \mathrm{long.}\big(\mathcal{P}_\beta/\mathcal{P}_{\beta+}\big)\,.$$

Pour tout élément β appartenant au semi-groupe Φ, il existe un élément x de l'anneau A tel que $\nu(x) = \beta$, d'où l'inclusion stricte $\mathcal{P}_{\beta+} \subsetneq \mathcal{P}_\beta$, et l'inégalité $\mathrm{long.}\big(\mathcal{P}_\beta/\mathcal{P}_{\beta+}\big) \geq 1$. Par conséquent le nombre $N(m) = \sharp\{\,\beta\in\Phi \,/\, \beta \leq rm\alpha\,\}$ vérifie $N(m) \leq H(m)$ et la fonction $N(m)$ est majorée par un polynôme en m de degré n.

Nous appelons Γ' le sous-groupe de Γ engendré par $\nu(x_1),\ldots,\nu(x_n)$. Par hypothèse sur la famille $x_1,\ldots,x_n$, c'est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^n$ et le semi-groupe $\Gamma'^{+} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{N}\nu(x_i)$ est inclus dans Φ.

Pour tout entier m, nous avons alors l'inégalité $N(m) \geq \binom{m+n}{n}$ car les $\underline{x}^{\underline{l}}$, pour $|\underline{l}| \leq m$ prennent des valeurs différentes par la valuation ν. Nous pouvons alors écrire:

$$\binom{m+n}{n} \leq N(m) \leq c\binom{m+n}{n}$$

pour tout entier m, où c est une constante dans $\mathbb{N}^*$, par conséquent Γ' est un sous-groupe d'indice fini du groupe Γ, d'où Γ est isomorphe à $\mathbb{Z}^n$.

Montrons maintenant que pour tout β appartenant à Φ, nous avons l'inégalité $\mathrm{long.}\big(\mathcal{P}_\beta/\mathcal{P}_{\beta+}\big) \leq c$. En effet, s'il existe $\gamma\in\Phi$ tel que $\mathrm{long.}\big(\mathcal{P}_\gamma/\mathcal{P}_{\gamma+}\big) > c$, en multipliant $\mathcal{P}_\gamma$ par le monôme $\underline{x}^{\underline{l}}$ nous avons aussi $\mathrm{long.}\big(\mathcal{P}_\beta/\mathcal{P}_{\beta+}\big) > c$, où $\beta = \gamma + \sum l_i\nu(x_i)$. Nous trouvons alors l'inégalité $\mathrm{long.}\big(\mathcal{P}_\beta/\mathcal{P}_{\beta+}\big) > c$ pour tout $\beta\in\alpha + \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{N}\nu(x_i)$, d'où l'inégalité:

$$N(m) > c\binom{m+n}{n}$$

quand m devient suffisamment grand, ce qui est impossible. Nous choisissons s éléments $y_1,\ldots,y_s$ de l'anneau R_ν tels que leurs images respectives $\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_s$ dans le corps résiduel $\kappa_\nu = R_\nu/\max(R_\nu)$ sont linéairement indépendantes sur le corps k. Nous pouvons écrire chaque élément y_i sous la forme $y_i = a_i/b_i$ avec a_i et b_i appartenant à l'anneau A. Nous posons $\gamma = \nu\big(\prod_{j=1}^s b_j\big) = \sum_{j=1}^s \nu(b_j)$, les éléments $z_i = y_i\prod_{j=1}^s b_j$ appartiennent à l'idéal $\mathcal{P}_\gamma$, et leurs images z_i dans l'espace quotient $\mathcal{P}_\gamma/\mathcal{P}_{\gamma+}$ sont linéairement indépendants sur k. Supposons en effet que nous ayons une relation de la forme $\nu\big(\sum_{i=1}^s u_iz_i\big) > \gamma$, avec $u_i\in k$, $1\leq i\leq s$. Nous en déduisons $\nu\big(\sum_{i=1}^s u_iy_i\big) > 0$, d'où une relation $\sum_{i=1}^s u_i\bar{y}_i = 0$, ce qui est impossible car nous avons choisi les $\bar{y}_i$ linéairement indépendants sur k. Nous avons ainsi montré l'inégalité:

$$s \leq \mathrm{long.}\big(\mathcal{P}_\gamma/\mathcal{P}_{\gamma+}\big) \leq c\,.$$

Par conséquent le corps résiduel κ_ν est une extension finie du corps k, ce qui termine la démonstration de la partie b) du théorème.

Pour démontrer la partie c), rappelons que nous avons toujours l'inégalité rang $\nu \leq$ rang rat.ν. Par conséquent si la valuation ν centrée sur l'anneau A vérifie l'égalité:

$$\operatorname{rang} \nu + \text{deg.tr.}_k \nu = \dim A ,$$

elle vérifie aussi l'égalité rang rat.$\nu +$ deg.tr.$_k\nu = \dim A$. Nous déduisons de la partie b) du théorème que son groupe des ordres Γ est isomorphe à $\mathbb{Z}^d$, et comme le rang de Γ est égal à son rang rationnel, l'ordre sur $\Gamma \simeq \mathbb{Z}^d$ est l'ordre lexicographique.

10 Exemples de valuation

Les premiers exemples que nous allons donner sont peut être parmi les plus importants de la géométrie algébrique.

Exemple 7. Nous allons d'abord nous intéresser à une famille très importante de valuations qui vérifient la deuxième égalité du théorème d'Abhyankar.
Plus précisémment, nous considérons un anneau local noethérien intègre A de dimension n, de corps des fractions K.

Définition. Une valuation ν du corps K centrée en A est divisorielle si elle vérifie:

$$\operatorname{rang} \nu = 1 \quad \text{et} \quad \text{deg.tr.}_k \nu = n - 1 .$$

D'après le théorème 9.2, la valuation ν est alors une valuation discrète de rang un, en particulier son groupe des ordres Γ est le groupe $\mathbb{Z}$ et l'anneau de valuation associé R_ν est un anneau noethérien.

Remarque. Parmi les valuations divisorielles, certaines proviennent de la situation géométrique suivante. Soit $\pi \colon Y \to X = \operatorname{Spec} A$ un morphisme propre birationnel et soit D une composante irréductible de l'image inverse $\pi^{-1}(o)$ du point fermé o de $\operatorname{Spec} A$ telle que l'anneau local $\mathcal{O}_{Y,D}$ soit un anneau de valuation discrète. Alors nous considérons la valuation ν associée à cet anneau, c'est la valuation divisorielle géométrique ν_D définie précédemment sur le corps $K = F(Y)$. Il est facile de vérifier qu'une telle valuation $\nu = \nu_D$ est une valuation divisorielle centrée sur l'anneau A. En effet c'est une valuation discrète de rang un et son corps résiduel κ_ν est isomorphe au corps $F(D)$ des fonctions sur le diviseur D, par conséquent vérifie deg.tr.$_k\kappa_\nu = n - 1$.

Définition. Nous disons qu'une valuation ν de K centrée sur l'anneau A obtenue comme précédemment par une valuation divisorielle géométrique ν_D est une valuation divisorielle géométrique de l'anneau A.

Nous allons rappeler la définition d'un anneau de Nagata.

Définition. Un anneau A est un anneau de Nagata si A est noethérien et si pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A l'anneau intègre quotient $A/\mathfrak{p}$ vérifie la propriété suivante: pour toute extension finie L du corps des fractions $\kappa(\mathfrak{p}) = Fr(A/\mathfrak{p})$, la fermeture intégrale de $A/\mathfrak{p}$ dans L est un $A/\mathfrak{p}$-module fini.

Tout anneau B essentiellement de type fini sur un anneau de Nagata A, c'est à dire obtenu comme localisé d'une A-algèbre de type fini, est encore un anneau de Nagata. En particulier les anneaux de la géométrie algébriques, qui sont essentiellement de type fini sur un corps k, sont des anneaux de Nagata.

Proposition 10.1. *Si l'anneau A est un anneau de Nagata toute valuation divisorielle centrée en A est une valuation divisorielle géométrique.*

Spivakovsky démontre que si l'anneau A est un anneau de Nagata ou est régulier de dimension deux, l'anneau R_ν de toute valuation divisorielle ν centrée en A est essentiellement de type fini sur A, c'est équivalent à dire que la valuation ν est une valuation de la forme $\nu = \nu_D$, obtenue comme précédemment en demandant que le morphisme $\pi \colon Y \to X$ est birationnel de type fini, [Sp 1], [Sp 2]. Dans le cas d'un anneau de Nagata, il peut ensuite se ramener au cas d'une valuation divisorielle géométrique [Sp 2].

Preuve de la proposition. Soit A un anneau local de Nagata de dimension n, de corps résiduel k, de corps des fractions K et soit ν une valuation divisorielle de K centrée en A, c'est à dire telle que son anneau de valuation R_ν domine A, est de dimension $\dim R_\nu = \text{rang}\ \nu = 1$ et vérifie $\text{dim.alg.}_k \kappa_\nu = \text{deg.tr.}_k \nu = n-1$.

Montrons d'abord que l'anneau R_ν est essentiellement de type fini sur l'anneau A. Dans la démonstration du théorème 9.2, par la **Réduction 1** nous pouvons trouver un anneau local B, de corps résiduel l, essentiellement de type fini sur A, en particulier B est aussi un anneau de Nagata, de corps des fractions K, tel que $\text{deg.tr.}_k \nu = 0$, et d'après la **Réduction 1'**, comme l'anneau A vérifie le cas d'égalité c) du théorème 9.2, l'anneau B vérifie aussi l'égalité c), c'est à dire que nous avons rang $\nu +$ $\text{deg.tr.}_k \nu = \dim B$.

Nous en déduisons que B est un anneau local de dimension 1, dominé par l'anneau de valuation discrète R_ν et ayant même corps de fractions. Par conséquent R_ν est égal à un localisé $(\bar{B})_\mathfrak{q}$ du normalisé $\bar{B}$ de B. Comme B est un anneau de Nagata, $\bar{B}$ est un B-module fini, par conséquent R_ν est essentiellement de type fini sur B, donc sur A.

La suite de la démonstration est semblable à la démonstration de la proposition 6.4. Comme $\text{dim.alg.}_k \kappa_\nu$ est égal à $n-1$, nous pouvons trouver des générateurs $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, $n \leq N$, de l'anneau A tel que $\left(x_2^{v_1} / x_1^{v_2}, \ldots, x_n^{v_1} / x_1^{v_n}\right)$ soit une base de transcendance de κ_ν sur k, où nous avons posé $v_i = \nu(x_i)$, pour $1 \leq i \leq N$. Soit I l'idéal de A engendré par les $\left(x_i^{n_i}\right)$, $1 \leq i \leq N$, avec $n_i = \sum_{1 \leq j \leq N\, ,\, j \neq i} v_j$, et soit $\phi \colon Z \to X = \operatorname{Spec} A$, l'éclatement de centre I dans $X = \operatorname{Spec} A$.

Alors le centre de la valuation ν sur Z est de codimension 1. Comme A est un anneau de Nagata la normalisation $n \colon Y \to Z$ est un morphisme fini et le morphisme composé $\pi = \phi \circ n \colon Y \to X$ est propre birationnel. Le centre de la valuation ν sur Y est une composante irréductible D du diviseur exceptionnel, et comme Y est une variété normale l'anneau $\mathcal{O}_{Y,D}$ est un anneau de valuation discrète, dominé par R_ν, donc qui lui est égal.

Exemple 8. Plus généralement, soit X un schéma intègre de type fini sur un corps k, de corps des fonctions K, soit D un sous-schéma intègre de X tel que l'anneau local $\mathcal{O}_{X,D}$ est un anneau régulier. Nous pouvons alors définir une valuation ν_D associée à D, $\nu_D\colon K^* \to \mathbb{Z}$, par $\nu_D(f) = \mathrm{ord}_D(f)$ pour toute fonction non nulle f du corps K, où $\mathrm{ord}_D(f)$ est l'ordre du zéro ou du pôle de f au point générique de D. Plus précisémment, si $\underline{m}$ est l'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,D}$, pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{O}_{X,D}$ nous posons $\nu_D(f) = \sup\{\, n \,/\, f \in \underline{m}^n \,\}$.

Comme toute fonction f de K peut s'écrire sous la forme $f = \dfrac{g}{h}$, avec g et h appartenant à $\mathcal{O}_{X,D}$, nous pouvons définir $\nu_D(f)$ par $\nu_D(f) = \nu_D(g) - \nu_D(h)$, et comme nous avons supposé l'anneau local $\mathcal{O}_{X,D}$ régulier, nous définissons bien ainsi une valuation du corps K. En fait nous pouvons définir une valuation ν_D de K pour tout sous-schéma intègre D de X tel que la fonction ord_D est additive sur l'anneau local $\mathcal{O}_{X,D}$, ce qui est équivalent à demander que l'anneau gradué $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \underline{m}^n / \underline{m}^{n+1}$ est un anneau intègre. Une valuation ν_D définie de la manière précédente est encore appelée une valuation divisorielle géométrique. Si le sous-schéma D de X n'est pas un diviseur, il suffit de considérer un morphisme $\pi\colon X' \to X$ qui se factorise par l'éclatement $\pi_D\colon E_D \to X$ de centre D pour trouver un diviseur $D' = \pi^{-1}(D)$ sur X' qui définit la même valuation du corps K, et si nous supposons que le schéma X' est normal l'anneau local $\mathcal{O}_{X,D}$ est un anneau de valuation discrète associé à ν_D.

Exemple 9. Nous considérons encore un schéma intègre X de type fini sur k, de corps des fonctions $K = F(X)$. Grâce à la notion de valuations composées introduite au chapitre 4, nous pouvons définir une valuation ν du corps K à partir de la situation géométrique suivante.

Soient D et E deux sous-schémas fermés fermés intègres de X avec $E \subset D$, tels que les anneaux locaux $\mathcal{O}_{X,D}$ et $\mathcal{O}_{D,E}$ sont réguliers, ou plus généralement tels que les fonctions ord_D et ord_E respectivement sur les anneaux locaux $\mathcal{O}_{X,D}$ et $\mathcal{O}_{D,E}$ sont additives. Nous supposons aussi pour simplifier que le sous-schéma D est un diviseur du schéma X. Grâce à ce qui précède, nous pouvond définir les valuations divisorielles géométriques ν_D et ν_E respectivement sur les corps $K = F(X)$ et $L = F(D)$. Ce sont des valuations discrètes de rang un. Alors comme le corps $L = F(D)$ est isomorphe au corps résiduel de la valuation ν_D, nous pouvons définir la valuation composée $\nu = \nu_D \circ \nu_E$ sur le corps K à valeur dans le groupe $\mathbb{Z}^2$ muni de l'ordre lexicographique.

Nous pouvons définir directement cette valuation $\nu\colon K \to \mathbb{Z}^2$ de la manière suivante (cf. la remarque qui suit la proposition 4.3). Comme l'anneau $\mathcal{O}_{X,D}$ est un anneau de valuation discrète, nous choisissons un générateur u de son idéal maximal $m_{X,D} = \max\bigl(\mathcal{O}_{X,D}\bigr)$. Pour tout élément non nul f de K, nous appelons $\bar{f}$ la classe de l'élément $f.u^{-\nu_D(f)}$ dans le corps $L \simeq \mathcal{O}_{X,D}/m_{X,D}$, et nous avons

$\nu(f) = \big(\nu_D(f), \nu_E(\bar{f})\big)$. Plus généralement, nous considérons un drapeau $D_n \subset \ldots \subset D_1 \subset D_0 = X$ de sous-schémas intègres de X tel que pour tout i, $1 \leq i \leq n$, la fonction ord_{D_i} est additive sur l'anneau local $\mathcal{O}_{D_{i-1},D_i}$. Alors il existe une unique valuation $\nu \colon K^* \to \mathbb{Z}^n$, avec $\mathbb{Z}^n$ muni de l'ordre lexicographique, définie à partir des valuations divisorielles ν_{D_i} sur le corps $F(D_{i-1})$.

Remarque. D'après le b) du corollaire du théorème 5.5 les valuations ν de K, impropres sur k, dont le rang est maximal, c'est à dire vérifiant rang(ν) =dim.alg.$_k K$ $= h$, ont pour corps résiduel κ une extension algébrique de k et pour groupe des ordres le groupe $\mathbb{Z}^h$ muni de l'ordre lexicographique. Dans l'exemple précédent, si le drapeau $D_h \subset \ldots \subset D_1 \subset D_0 = X$ est de longueur h égale à la dimension de X, c'est à dire si chaque D_i est un diviseur de D_{i-1}, nous obtenons une valuation de rang maximal, comme composée de h valuations divisorielles géométriques.

Dans la suite, nous allons étudier des valuations centrées sur un anneau local régulier de dimension deux. Nous considérons un corps k et une k-algèbre de type fini A; nous supposons que A est un anneau local régulier de dimension deux, de corps résiduel k et de corps des fractions K isomorphe à l'extension transcendante pure $k(u, v)$. Nous pouvons prendre par exemple pour anneau A, l'anneau localisé $k[u, v]_{(u,v)}$. Nous considérons une valuation ν de K, impropre sur k, centrée sur A et de groupe des ordres Γ.

Exemple 10. Nous supposons que le groupe des ordres Γ de la valuation ν est le groupe $\mathbb{Z}^2$ muni de l'ordre lexicographique, c'est à dire le groupe libre engendré par deux éléments $\alpha = (1, 0)$ et $\beta = (0, 1)$. Nous définissons la valuation $\nu \colon K^* \to \Gamma \simeq \mathbb{Z}^2$ par $\nu(u) = \alpha$ et $\nu(v) = \beta$. Comme les éléments α et β de Γ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, la valuation est uniquement déterminée par la donnée de $\nu(u)$ et de $\nu(v)$. En particulier, pour tout polynôme $P(u, v) = \sum c_{r,s} u^r v^s$ considéré comme élément de A, la valeur de la valuation $\nu(P)$ est égale à:

$$\nu(P) \; = \; \mathrm{Inf}\,\{\, \nu(u^r v^s) \,/\, c_{r,s} \neq 0 \,\} \; = \; \mathrm{Inf}\,\{\, (r, s) \,/\, c_{r,s} \neq 0 \,\}\,.$$

L'anneau de valuation R_ν associé à la valuation ν est le sous-anneau de $K = k(u, v)$ engendré par les monômes $u^r v^s$ vérifiant l'inégalité $r \geq 0$ et les monômes v^s vérifiant l'inégalité $s \geq 0$, son idéal maximal $\max(R_\nu)$ est engendré par les monômes $u^r v^s$ vérifiant $r > 0$ et les monômes v^s vérifiant $s > 0$. Le corps résiduel de la valuation κ_ν est isomorphe au corps k.

L'anneau de valuation R_ν est un anneau de valuation discrète de dimension deux, mais ce n'est pas un anneau noethérien. Si nous considérons la valuation ν comme une valuation centrée sur l'anneau A, nous vérifions que la seconde égalité du théorème d'Abhyankar est vérifiée. En effet nous avons:

$$\text{rang rat.}\,\nu \; = \; \text{rang}\,\nu \; = \; 2 \quad \text{et} \quad \text{deg tr.}_k \nu \; = \; 0\,.$$

Exemple 11. Nous supposons que le groupe des ordres de la valuation ν est le sous-groupe libre Γ de $\mathbb{R}$ engendré par deux réels α et β linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, par exemple $\alpha = 1$ et $\beta = \sqrt{2}$. Nous définissons la valuation $\nu\colon K^* \to \Gamma \simeq \mathbb{Z}^2$ par $\nu(u) = \alpha$ et $\nu(v) = \beta$. Comme dans l'exemple précédent les éléments α et β de Γ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ et la valuation est uniquement déterminée par la donnée de $\nu(u)$ et de $\nu(v)$. En particulier, pour tout polynôme $P(u,v) = \sum c_{r,s} u^r v^s$ considéré comme élément de A, la valeur de la valuation $\nu(P)$ est égale à:

$$\nu(P) \;=\; \operatorname{Inf}\left\{\, \nu(u^r v^s) \,/\, c_{r,s} \neq 0 \,\right\} \;=\; \operatorname{Inf}\left\{\, r\alpha + s\beta \,/\, c_{r,s} \neq 0 \,\right\}.$$

L'anneau de valuation R_ν associé à la valuation ν est le sous-anneau de $K = k(u,v)$ engendré par les monômes $u^r v^s$ vérifiant l'inégalité $r\alpha + s\beta \geq 0$ et son idéal maximal $\max(R_\nu)$ est engendré par les monômes $u^r v^s$ vérifiant l'inégalité stricte $r\alpha + s\beta > 0$. Comme α et β sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, nous avons l'égalité $r\alpha + s\beta = 0$ uniquement pour le couple $(u,v) = (0,0)$. Nous en déduisons que le corps résiduel de la valuation κ_ν est isomorphe au corps k.

L'anneau de valuation R_ν est un anneau de dimension un, mais ce n'est pas un anneau de valuation discrète, en particulier il n'est pas noethérien. Si nous considérons la valuation ν comme une valuation centrée sur l'anneau A, nous vérifions que la première égalité du théorème d'Abhyankar est vérifiée, mais pas la seconde. En effet nous avons:

$$\text{rang rat.}\, \nu \;=\; 2\,, \ \text{rang}\, \nu \;=\; 1 \quad \text{et} \quad \text{deg.tr.}_k \nu \;=\; 0\,.$$

Exemple 12. Nous supposons que le groupe des ordres Γ de la valuation ν est le groupe $\mathbb{Q}$ et nous définissons la valuation de la manière suivante. Nous posons:

$$\nu(v) \;=\; 1 \quad \text{et} \quad \nu(u) \;=\; 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\,.$$

Le "premier" élément w_2 de l'anneau A, écrit sous la forme d'un polynôme $w_2 = P(u,v)$ de $k[u,v]$, pour lequel la valeur de la valuation $\nu(w_2)$ n'est pas déterminée par les valeurs de ν en $w_0 = v$ et en $w_1 = u$ est l'élément $w_2 = u^2 + v^3$. Nous avons toujours $\nu(w_2) \geq 3$ et nous posons:

$$\nu(w_2) \;=\; 3 + \frac{1}{3} \;=\; \frac{10}{3}\,.$$

Nous allons définir une suite $\big(w_n\big)$ d'éléments de l'anneau A telle que pour tout entier $n \geq 2$, la valeur de la valuation $\nu(w_n)$ n'est pas déterminée par les valeurs de la valuation $\nu(w_r)$ pour $r < n$. Pour tout entier $n \geq 1$, nous choisissons pour la valeur de la valuation $\nu(w_n)$ un nombre rationnel γ_n qui s'écrit sous la forme $\gamma_n = \dfrac{p_n}{n+1}$, où p_n est un entier positif premier avec $n+1$. La suite $\big(w_n\big)$ est construite par récurrence de la manière suivante. Nous supposons que nous avons trouvé les éléments w_r pour $1 \leq r \leq n$, avec $n \geq 1$, et que nous avons les valeurs de la valuation $\nu(w_r) = \gamma_r$ pour ces éléments. Nous posons alors:

$$w_{n+1} \;=\; {w_n}^{n+1} + v^{p_n}\,,$$

avec comme valeur de la valuation:

$$\nu(w_{n+1}) \;=\; \gamma_{n+1} \;=\; p_n + \frac{1}{n+2}\,,$$

c'est à dire avec $p_{n+1} = p_n(n+2)+1$. Nous pouvons alors déterminer la valuation ν par la suite $\big(w_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments appartenant à l'idéal maximal de l'anneau A et par les valeurs de la valuation en ces éléments $\gamma_n = \nu(w_n)$.

Par construction l'anneau de valuation R_ν associé est un anneau de valuation de dimension un, non noethérien, de corps résiduel κ_ν isomorphe au corps k. Il est possible de montrer que tout élément non nul x appartenant à l'anneau de valuation R_ν peut s'écrire sous la forme $x = \lambda \prod_{i=0}^{N} {w_i}^{n_i} + x'$, où N est un entier positif, où les n_i appartiennent à $\mathbb{N}$, où λ est un élément non nul du corps k et où x' est un élément de R_ν vérifiant $\nu(x') > \nu(x)$. En particulier, nous avons $\nu(x) = \nu\big(\prod_{i=0}^{N} {w_i}^{n_i}\big) \;=\; \sum_{i=0}^{N} n_i.\gamma_i$. La valuation ν considérée comme centrée sur l'anneau A ne vérifie aucune des égalités du théorème d'Abhyankar. En effet nous avons:

$$\text{rang rat.}\,\nu \;=\; \text{rang}\,\nu \;=\; 1 \quad \text{et} \quad \text{deg.tr.}_k\nu \;=\; 0\,.$$

Exemple 13. Nous considérons l'anneau $\hat{A}$, complété de l'anneau A, et son corps des fractions $\hat{K}$. En particulier nous pouvons écrire l'anneau $\hat{A}$ sous la forme d'un anneau de séries formelles $\hat{A} = k[[u,v]]$, et nous considérons un élément t du complété $\hat{A}$ n'appartenant pas au corps K et nous supposons t de la forme $t = u + \sum_{i=1}^{\infty} c_i v^i$, avec pour tout $i \geq 1$, $c_i \in k^*$.

Nous pouvons définir une valuation $\hat{\nu}$ du corps $\hat{K}$ à valeurs dans le groupe $\hat{\Gamma} = \mathbb{Z}^2$ muni de l'ordre lexicographique, en posant:

$$\hat{\nu}(v) \;=\; (0,1) \quad \text{et} \quad \hat{\nu}(t) \;=\; (1,0)\,.$$

Pour toute série formelle $\hat{x} \;=\; \sum_{i=0}^{\infty} d_i v^i$ nous avons l'inégalité $\hat{\nu}(\hat{x}) \;\geq\; 0$. Par conséquent, comme nous avons supposé que tous les coefficients c_i sont non nuls, pour tout entier $N \geq 1$ nous avons:

$$\hat{\nu}\big(\sum_{i=N}^{\infty} c_i v^i\big) \;=\; \hat{\nu}(v^N) \;=\; (0,N)\,.$$

Par hypothèse, pour tout entier $N \geq 1$, la valeur de la valuation:

$$\hat{\nu}(t) \;=\; \hat{\nu}\big((u + \sum_{i=1}^{N-1} c_i v^i) + (\sum_{i=N}^{\infty} c_i v^i)\big) \;=\; (1,0)$$

est strictement supérieure aux valeurs de la valuation $\hat{\nu}$ pour chacun des deux éléments $u + \sum_{i=1}^{N-1} c_i v^i$ et $\sum_{i=N}^{\infty} c_i v^i$. Nous en déduisons que pour tout $N \geq 1$ nous avons:

$$\hat{\nu}\big(u + \sum_{i=1}^{N-1} c_i v^i\big) \;=\; (0,N)\,.$$

Nous considérons maintenant la valuation ν du corps K obtenue comme restriction de la valuation $\hat{\nu}$ de $\hat{K}$. Alors le groupe des ordres Γ de la valuation ν est le sous-groupe de $\hat{\Gamma}$ engendré par $\hat{\nu}(v) = \hat{\nu}(u) = (0,1)$, c'est à dire le sous-groupe isolé non trivial de $\hat{\Gamma}$. En particulier le groupe des ordres Γ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, le rang et le rang rationnel de la valuation ν sont égaux à un.

L'anneau de valuation R_ν associé est un anneau de valuation discrète de rang un, c'est un anneau noethérien. De plus nous avons l'égalité $R_\nu = R_{\hat{\nu}} \cap K$, où $R_{\hat{\nu}}$ est l'anneau de valuation associé à la valuation $\hat{\nu}$ de $\hat{K}$, c'est à dire le sous-anneau de $\hat{K}$ engendré par les monômes $t^a v^b$ avec $(a,b) \geq (0,0)$ dans $\mathbb{Z}^2$ muni de l'ordre lexicographique. Comme la valuation $\hat{\nu}$ du corps $\hat{K}$ est une valuation discrète de rang deux centrée sur l'anneau $\hat{A}$, nous avons vu que son corps résiduel $\kappa_{\hat{\nu}}$ est isomorphe au corps k. Nous en déduisons que le corps résiduel κ_ν de la valuation ν est aussi isomorphe à k. Nous avons ainsi obtenu une valuation discrète ν de rang un, centrée sur l'anneau A, ne vérifiant aucune des des deux égalités d'Abhyankar. En effet nous avons:

$$\text{rang rat.}\,\nu \;=\; \text{rang}\,\nu \;=\; 1 \quad \text{et} \quad \text{deg.tr.}_k\nu \;=\; 0\,.$$

Géométriquement cette valuation correspond à l'arc formel défini sur le germe de surface régulière $S = \operatorname{Spec} A$, par $(t=0)$. Nous pouvons aussi définir la valuation ν de la manière suivante. Nous avons un morphisme injectif de $A = k[u,v]_{(u,v)}$ dans $k[[v]]$ défini par $u \mapsto -\sum_{i=1}^{\infty} c_i v^i$ et $v \mapsto v$, et la valuation ν est la restriction à A de la valuation v-adique sur l'anneau $k[[v]]$.

References

[Ab 1] S.S. Abhyankar: On the valuations centered in a local domain. Amer. J. Math. **78** (1956), 321-348.

[Ab 2] S.S. Abhyankar: *Ramification Theoretic Methods in Algebraic Geometry* , Princeton University Press, 1959.

[Bo] N. Bourbaki: *Algèbre Commutative, Chapitres 5 à 7*, Masson, 1985.

[Co] V. Cossart: Uniformisation et désingularisation des surfaces d'après Zariski, dans ce volume.

[EGA] A. Grothendieck, J. Dieudonné: *Eléments de Géométrie Algébrique II*, Publ. Math. IHES **8**, 1961.

[En] O. Endler: *Valuation Theory*, Springer Verlag, 1972.

[Ha] R. Hartshorne: *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math. 52 , Springer Verlag, 1977.

[Hi] H. Hironaka: La voûte étoilée, dans *Singularités à Cargèse*, Astérisque 7 et 8, 1973.

[Ka 1] I. Kaplansky: Maximal fields with valuations I. Duke Math. Journ. **9** (1942), 303-321.

[Ka 2] I. Kaplansky: Maximal fields with valuations II. Duke Math. Journ. **12** (1945), 243-248.

[Ku] F.-V. Kuhlmann: Valuation theoric and model theoric aspects of local uniformization, dans ce volume.

[Ma] H. Matsumura: *Commutative Algebra* , Benjamin/Cummings Publ. Co., 1980.

[McL 1] S. MacLane: A construction for absolute values in polynomial rings. Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 363-395.

[McL 2] S. MacLane: A construction for prime ideals as absolute values of an algebraic field. Duke Math. J. **2** (1936), 492-510.

[M-S] J. Morgan, P. Shalen: Valuations, trees, and degenerations of hyperbolic structures, I. Annals of Math. **120** (1984), 401-476.

[Na] M. Nagata: *Local Rings*, Krieger Publ. Co., 1975.

[Re] D. Rees: *Lectures on the asymptotic theory of ideals*, London Math. Society, Lecture Notes Series 113, Cambridge University Press, 1988.

[Ri] P. Ribenboim: *Théorie des valuations*, Les Presses de l'Université de Montréal, 1964.

[Se] J.P. Serre: *Corps locaux*, Hermann, 1968.

[Sp 1] M. Spivakovsky: Valuations in function fields of surfaces. Amer. J. Math. **112** (1990), 107-156.

[Sp 2] M. Spivakovsky: On the structure of valuations centered in a local domain. Prepublication 1993.

[Sp 3] M. Spivakovsky: Resolution of singularities I: local uniformization. Prepublication 1997.

[Te] B. Teissier: Valuations, deformations and toric geometry, dans ce volume.

[Za] O. Zariski: The compactness of the Riemann manifold of an abstract field of algebraic functions. Bull. Amer. Math. Soc. **45** (1944), 683-691.

[Z-S] O. Zariski, P. Samuel: *Commutative Algebra II*, Van Nostrand, 1958.

Laboratoire de Mathématiques
Ecole Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
75230 Paris, France
vaquie@dmi.ens.fr