Irrégularité des revêtements cycliques

Michel Vaquié
Laboratoire de Mathématiques, UA 762 du CNRS
Ecole Normale Supérieure

Introduction:

Dans un article de 1931 ([Za.3]), Zariski calcule l'irrégularité d'un revêtement cyclique du plan projectif complexe $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ ramifié au dessus d'une courbe C ayant comme seules singularités des points doubles ordinaires et des points cuspidaux. Il peut en déduire des résultats d'annulation pour certains groupes de cohomologie de faisceaux associés à la courbe C.

Récemment, en utilisant une construction différente plusieurs auteurs ont généralisé l'étude des revêtements cycliques (en particulier H. Esnault et E. Viehweg [Es.], [Es.-Vi.1], et F. Loeser et l'auteur [Lo.-Va.], [Va.]). Mais si l'utilisation de théorèmes puissants déduits essentiellement de la théorie de Hodge permet d'obtenir des résultats plus généraux, la beauté de la démonstration originale a disparu.

Dans cet article je poursuis d'une part l'étude des revêtements cycliques et surtout je montre comment il est possible d'utiliser les méthodes originales de Zariski pour démontrer ces résultats.

Rappelons la situation étudiée par Zariski.

Soit C une courbe dans le plan affine complexe $\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}} = \operatorname{Spec} \mathbf{C}[x,y]$, définie par un polynôme $f(x,y)$, et soit X^o le revêtement cyclique de $\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}}$ de degré n ramifié au dessus de la courbe C, c'est à dire la surface définie dans l'espace affine $\mathbf{A}^3_{\mathbf{C}} = \operatorname{Spec} \mathbf{C}[x,y,z]$ par le polynôme $z^n - f(x,y)$.

L'irrégularité q du revêtement cyclique X^o est l'irrégularité d'une résolution des singularités $\tilde{X}$ d'une compactification X de X^o, où l'irrégularité de $\tilde{X}$ est par définition la dimension du groupe de cohomologie $\mathrm{H}^1(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$, c'est à dire est égale à la moitié du premier nombre de Betti b_1 de la surface $\tilde{X}$.

L'irrégularité est un invariant birationnel de la surface $\tilde{X}$, par conséquent le nombre q ne dépend ni de la compactification X choisie, ni de la résolution des singularités $\tilde{X}$.

Nous pouvons choisir pour la compactification X de X^o un revêtement cyclique du plan projectif $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ qui étend le revêtement du plan affine $\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}}$, mais alors le morphisme $\pi: X \to \mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ est ramifié le long de la courbe C et de la droite à l'infini L.

Si la courbe C est définie dans $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}} = \operatorname{Proj} \mathbf{C}[u,x,y]$ par le polynôme $f(u,x,y)$ homogène de degré m et si la droite L est définie par u, la surface X est alors définie dans l'espace projectif $\mathbf{P}^3_{\mathbf{C}} = \operatorname{Proj} \mathbf{C}[u,x,y,z]$ par le polynôme homogène g, avec $g(u,x,y,z) = z^n - u^{n-m} f(u,x,y)$ si le degré n du revêtement est supérieur ou égal au degré m de la courbe C et avec $g(u,x,y,z) = u^{m-n} z^n - f(u,x,y)$ sinon.

Le morphisme $\pi: X \to \mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ est le morphisme induit par la projection de $\mathbf{P}^3_{\mathbf{C}} \setminus \{\infty\}$ dans $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$, où ∞ est le point de coordonnées homogènes $(0;0;0;1)$.

L'étude de l'irrégularité des revêtements cycliques est motivée par la question posée par Zariski dans un article de 1929 ([Za.1]):

soit C une courbe du plan affine complexe $\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}} = \operatorname{Spec} \mathbf{C}[x,y]$ définie par un polynôme $f(x,y)$, alors quelle condition doit vérifier une surface X de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{C}} = \operatorname{Spec} \mathbf{C}[x,y,z]$ pour que la courbe C soit le discriminant de l'application π de X dans $\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}}$, restriction de la projection de $\mathbf{A}^3_{\mathbf{C}}$ dans $\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}}$?

Si la surface X est définie dans $\mathbf{A}^3_{\mathbf{C}}$ par le polynôme $\varphi(x,y,z)$, le lieu critique C_π du morphisme π est la courbe définie dans X par l'idéal de Fitting $F_0(\Omega^1_{X/\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}}})$, c'est à dire la courbe définie par $(\partial\varphi/\partial z)$.

Par définition le discriminant D_π est l'image réduite du lieu critique C_π dans $\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}}$, par conséquent l'équation de la courbe D_π dans le plan est obtenue en éliminant z entre les équations:

$$\begin{cases} \varphi(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

Pour pouvoir répondre à cette question il suffit d'après un résultat de Enriques ([En.]) de connaître le groupe fondamental $\pi_1\big(\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}} \setminus C\big)$ du complémentaire de la courbe C.

Zariski fait remarquer que pour étudier le groupe fondamental $\pi_1\big(\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}} \setminus C\big)$ il est très utile de connaître l'irrégularité des revêtements cycliques du plan $\mathbf{A}^2_{\mathbf{C}}$ ramifiés au dessus de la courbe C, c'est à dire l'irrégularité des revêtenents X^o définis par $\varphi(x,y,z) = z^n - f(x,y)$.

Dans le cas où la courbe C a pour seuls points singuliers des points doubles ordinaires et des points cuspidaux Zariski calcule l'irrégularité q du revêtement cyclique en fonction de la surabondance des systèmes linéaires pré-adjoints à la courbe C de degré inférieur à $m-3$, c'est à dire en fonction des dimensions des groupes de cohomologie $\mathrm{H}^1\big(\mathbf{P}^2, \mathcal{A}^o_C(\mu)\big)$ pour $0 \leq \mu \leq m-3$, où $\mathcal{A}^o_C$ est le faisceau des fonctions g de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}$ s'annulant aux points cuspidaux de $\mathbf{P}^2$ avec multiplicité au moins un.

Zariski peut alors déduire de ce résultat et de la nullité de l'irrégularité quand le degré du revêtement est une puissance d'un nombre premier ([Za.2]) des théorèmes d'annulation pour les groupes $\mathrm{H}^1\big(\mathbf{P}^2, \mathcal{A}^o_C(\mu)\big)$.

Dans un article précédent j'ai généralisé ces résultats au cas des revêtements cycliques d'une surface projective complexe non singulière S ramifiés au dessus d'une courbe C non nécessairement irréductible et ayant des singularités quelconques ([Va.]).

Dans cet article je donnais l'irrégularité du revêtement en fonction de la dimension de groupes de cohomologie $\mathrm{H}^1\big(S, \mathcal{A}_\alpha \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S(\mu)\big)$, où les faisceaux $\mathcal{A}_\alpha$ sont des faisceaux d'idéaux de $\mathcal{O}_S$ définis à partir des points singuliers de la courbe C.

Je déduisais de ce résultat et de théorèmes d'annulation obtenus grâce à la théorie de Hodge (cf. [Es.-Vi.2]), des conditions d'annulations pour les espaces $\mathrm{H}^1\big(S, \mathcal{A}_\alpha \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S(\mu)\big)$.

Dans le présent article je vais généraliser les résultats de l'article [Va.].

Pour tout revêtement cyclique X d'une variété projective complexe non singulière S de dimension d, $d \geq 2$, je calcule la dimension des groupes de cohomologie $\mathrm{H}^r\big(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}\big)$, où comme précédemment $\tilde{X}$ est une résolution des singularités du revêtement X.

J'obtiens cette dimension en fonction de groupes de cohomologie de certains faisceaux $\mathcal{A}_\alpha \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S(\mu)$, où les $\mathcal{A}_\alpha$ sont encore des faisceaux d'idéaux de $\mathcal{O}_S$ définis à partir des singularités du lieu de ramification D du revêtement cyclique X.

Puis je généralise à ce cas les théorèmes d'annulation de [Va.].

Je montre ensuite comment il est possible de généraliser la démonstration de Zariski.

Plus précisément je décris le revêtement cyclique X de S comme diviseur de l'espace total d'un fibré projectif $Z = \mathbf{P}(\mathcal{E})$ associé à un faisceau localement libre de rang deux sur S. Pour trouver la dimension des groupes de cohomologie $\mathrm{H}^r\big(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}\big)$, où $\tilde{X}$ est une résolution des singularités de X, je calcule l'idéal d'adjonction $\mathcal{A}_X$ du diviseur X dans Z.

Ensuite, suivant la démonstration originale de Zariski, je peux déduire du théorème d'annulation de l'irrégularité de tout revêtement cyclique du plan projectif complexe $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ de degré n égal à une puissance d'un nombre premier([Za.2]), une généralisation des résultats d'annulation de ([Za.3]) au cas d'une courbe C du plan projectif complexe ayant des singularités quelconques.

Je rappelle aussi comment ces résultats sont liés à l'étude du groupe fondamental du complémentaire d'une courbe plane C.

Il est en effet très difficile de calculer le groupe $G = \pi_1\big(\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}} \setminus C\big)$, mais il est possible de déterminer un polynôme $\Delta_C(t)$, appelé le polynôme d'Alexander de la courbe C, qui donne le groupe quotient $G'\backslash G''$, où G' et G'' sont les deux premiers groupes dérivés du groupe G.

Ce polynôme $\Delta_C(t)$ a été étudié par plusieurs auteurs, en particulier par A. Libgober ([Li.1], [Li.2]), et plus récemment par F. Loeser et l'auteur ([Lo.-Va.]) qui donnent sa valeur dans le cas d'une courbe quelconque de $\mathbf{P}^2$ en fonction de la dimension des groupes de cohomologie $\mathrm{H}^1\big(S, \mathcal{A}_\alpha \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S(\mu)\big)$, c'est à dire exactement les groupes apparaissant dans le calcul de l'irrégularité d'un revêtement cyclique.

Nous pouvons ainsi déduire de ce résultat la nullité de l'irrégularité de tout revêtement cyclique du plan projectif quand le groupe fondamental du complémentaire de la courbe est abélien.

Notation:

Pour toute variété algébrique Y nous notons ω_Y le faisceau dualisant sur Y. Si la variété Y est non singulière et si D est un diviseur sur Y dont le support est à croisements normaux nous notons respectivement Ω^p_Y et $\Omega^p_Y(\log D)$ le faisceau des p-formes différentielles sur Y et le faisceau des p-formes différentielles sur Y à pôles logarithmiques le long de D.

Pour tout diviseur D sur Y, la formule d'adjonction donne un isomorphisme canonique entre le faisceau dualisant ω_D et le faisceau $\omega_Y \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_D(D)$, et toute résolution des singularités de D, $\pi\colon \tilde{D} \to D$, donne une application canonique injective de l'image directe $\pi_*(\omega_{\tilde{D}})$ dans le faisceau ω_D.

Alors, si Y est une variété non singulière et si D est un diviseur effectif réduit sur Y, l'idéal d'adjonction de D dans Y est le faisceau d'idéaux $\mathcal{A}_D$ de $\mathcal{O}_Y$ qui rend commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & \omega_Y & \longrightarrow & \omega_Y & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{A}_D \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_Y(D) & \longrightarrow & \omega_Y(D) & \longrightarrow & \mathcal{B} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \pi_*\big(\omega_{\tilde{D}}\big) & \longrightarrow & \omega_D & \longrightarrow & \mathcal{B} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array} \tag{0.1}$$

En particulier le cosupport de l'idéal d'adjonction $\mathcal{A}_D$ de D dans Y, c'est à dire le support du fermé qu'il définit dans Y, est inclus dans le lieu singulier du diviseur D.

Pour tout nombre réel y nous notons $[y]$ la partie entière de y et $\lceil y \rceil$ le plus petit entier supérieur ou égal à y, c'est à dire $-[-y]$.

Si nous avons une famille de diviseurs irréductibles $(E_j)_{j\in J}$ sur une variété S, si nous nous donnons des nombres réels y_j, $j \in J$, et si nous posons $D = \sum_{j\in J} y_j E_j$, nous pouvons définir les diviseurs $[D]$ et $\lceil D \rceil$ par:

$$[D] = \sum_{j\in J} [y_j] E_j \quad \text{et} \quad \lceil D \rceil = \sum_{j\in J} \lceil y_j \rceil E_j.$$

Nous utiliserons cette notation dans le cas particulier suivant.

Soit $D = \sum_{j\in J} m_j E_j$ un diviseur sur S et soit γ un nombre réel, alors nous posons:

$$[\gamma D] = \sum_{j\in J} [\gamma m_j] E_j \quad \text{et} \quad \lceil \gamma D \rceil = \sum_{j\in J} \lceil \gamma m_j \rceil E_j. \tag{0.2}$$

Dans cet article nous considérons une variété projective non singulière S de dimension d, $d \geq 2$, définie sur le corps des nombres complexes $\mathbf{C}$, et nous nous donnons un faisceau très ample $\mathcal{L}$ sur S.

I Irrégularité d'un revêtement cyclique.

Nous allons rappeler la construction de H. Esnault.

Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur une variété non singulière S de dimension d et soit D un diviseur sur S appartenant au système linéaire $|\mathcal{L}^{\otimes n}|$, c'est à dire défini par une section globale g du faisceau $\mathcal{L}^{\otimes n}$, où n est un entier strictement positif.

Cette section globale permet alors de définir une structure d'algèbre sur le faisceau $\bigoplus_{p=0}^{n-1} \mathcal{L}^{\otimes -p}$, et la variété $X = \mathrm{Spec}_S\big(\bigoplus_{p=0}^{n-1} \mathcal{L}^{\otimes -p}\big)$ est le revêtement cyclique de S ramifié au dessus du diviseur D.

Par construction le morphisme ψ de X dans S est fini, non ramifié au dessus de l'ouvert $U = S \setminus D$, et le groupe de Galois du revêtement est le groupe cyclique $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Nous appelons $\sigma\colon \tilde{S} \to S$ une résolution plongée des singularités du diviseur réduit D_{red}, $\tilde{D} = \sigma^*(D)$ l'image inverse totale de D, et $\bar{X}$ la normalisée du produit fibré $\tilde{S} \times_S X$.

Le diviseur $\tilde{D}$ a pour support un diviseur à croisements normaux et l'ouvert $\tilde{S} \setminus \tilde{D}$ est isomorphe à $S \setminus D$. Le morphisme $\tilde{\psi}\colon \bar{X} \to \tilde{S}$ est un revêtement cyclique de degré n non ramifié au dessus de l'ouvert $\tilde{S} \setminus \tilde{D}$, et le morphisme $\bar{\sigma}\colon \bar{X} \to X$ est un morphisme propre birationnel.

Nous considérons aussi une résolution des singularités de $\bar{X}$, $\bar{\pi}\colon \tilde{X} \to \bar{X}$, telle que l'image inverse Δ du diviseur $\tilde{D}$ par le morphisme composé de $\tilde{X}$ dans $\tilde{S}$ ait pour support un diviseur à croisements normaux. Alors le morphisme composé $\pi\colon \tilde{X} \to X$ est une résolution des singularités de X.

Nous avons le diagramme suivant:

$$(1.1) \qquad \begin{array}{ccc} & \tilde{X} & \\ \bar{\pi} \swarrow & & \searrow \pi \\ \bar{X} & \xrightarrow{\bar{\sigma}} & X \\ \downarrow \tilde{\psi} & & \downarrow \psi \\ \tilde{S} & \xrightarrow{\sigma} & S \end{array}$$

Le diviseur $\tilde{D}$ sur la variété $\tilde{S}$ s'écrit sous la forme $\tilde{D} = \sum_{j\in J} m_j D_j$, où les D_j sont les composantes irréductibles réduites. Pour tout p, $0 \le p \le n-1$, nous définissons le diviseur effectif $\tilde{D}(p)$ et le faisceau inversible $\mathcal{L}^{[p]}$ sur $\tilde{S}$ par:

$$(1.2) \qquad \tilde{D}(p) = \Big[\frac{p}{n}\tilde{D}\Big] = \sum_{j\in J}\Big[\frac{m_j p}{n}\Big] D_j \quad \text{et} \quad \mathcal{L}^{[p]} = \sigma^*\big(\mathcal{L}^{\otimes p}\big) \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}} \mathcal{O}_{\tilde{S}}\big(-\tilde{D}(p)\big).$$

Nous pouvons maintenant rappeler le résultat de H. Esnault([Es.] lemmes 1 et 2, [Es.-Vi.1] lemme 1.8 ou [Vi.1] lemmes 1.3 et 1.4)

Lemme I.1:
La variété $\bar{X}$ a pour seules singularités des singularités rationnelles.

Lemme I.2:
Le revêtement cyclique $\bar{X}$ de $\tilde{S}$ est égal à $\mathrm{Spec}_{\tilde{S}}\left(\bigoplus_{p=0}^{n-1} \mathcal{L}^{[p]-1}\right)$.

Nous pouvons en déduire le résultat suivant.

Proposition I.1:
Pour tout entier r, $0 \le r \le d$, la dimension q de l'espace de cohomologie $\mathrm{H}^r\big(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}\big)$ est égale à

$$q = \dim \mathrm{H}^r\big(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}\big) = \sum_{p=0}^{n-1} \dim \mathrm{H}^{d-r}\Big(S, \sigma_*\big(\mathcal{L}^{[p]} \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}} \omega_{\tilde{S}}\big)\Big).$$

Démonstration:

Nous déduisons des lemmes précédents un isomorphisme entre $\mathrm{H}^r\big(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}\big)$ et $\bigoplus_{p=0}^{n-1} \mathrm{H}^r\big(\tilde{S}, \mathcal{L}^{[p]-1}\big)$, d'où par dualité l'égalité $q = \sum_{p=0}^{n-1} \dim \mathrm{H}^{d-r}\big(\tilde{S}, \mathcal{L}^{[p]} \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}} \omega_{\tilde{S}}\big)$.

Pour avoir la proposition il suffit alors de montrer que les images directes supérieures $\mathrm{R}^q\sigma_*\big(\mathcal{L}^{[p]} \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}} \omega_{\tilde{S}}\big)$, $q > 0$, sont nulles, c'est à dire d'après la formule de projection que les faisceaux $\mathrm{R}^q\sigma_*\big(\omega_{\tilde{S}} \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}} \mathcal{O}_{\tilde{S}}\big(-\tilde{D}(p)\big)\big)$ sont nuls pour tout entier p, $0 \leq p \leq n-1$.

La nullité de ces faisceaux a été démontrée par E. Viehweg ([Vi.2] Proposition 2.3); ce résultat est une conséquence d'un théorème d'annulation dont la démonstration utilise la théorie de Hodge.

Si le diviseur D a uniquement des singularités isolées, en particulier il faut que le diviseur D soit réduit, nous pouvons exprimer les faisceaux $\sigma_*\big(\mathcal{L}^{[p]} \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}} \omega_{\tilde{S}}\big)$ qui apparaissent dans la proposition en fonction des exposants de Hodge des singularités de D.

Soit (D, x) une singularité isolée d'hypersurface de dimension $d-1$, c'est à dire nous avons $(D, x) \subset (S, x)$ où S est une variété non singulière de dimension d, et soit $\sigma: \tilde{S} \to S$ une résolution plongée de la singularité (D, x). Nous appelons $E = \bigcup_{j \in J} E_j$ le diviseur exceptionnel réduit de σ et nous appelons ν_j la valuation discrète associée à la composante irréductible E_j du diviseur.

L'image inverse de D dans $\tilde{S}$ s'écrit $\sigma^*(D) = \tilde{D} + \sum_{j \in J} m_j E_j$, où $\tilde{D}$ est la transformée stricte de D par σ, et le diviseur canonique $K_{\tilde{S}}$ sur $\tilde{S}$ s'écrit $K_{\tilde{S}} = \sigma^*\big(K_S\big) + \sum_{j \in J} k_j E_j$; c'est équivalent à dire que pour tout j l'entier m_j est égal à $\nu_j(f)$ où f est une équation de D dans S, et que l'entier k_j est égal à $\nu_j(\eta)$ où η est un générateur du faisceau dualisant ω_S.

Alors si φ est un élément de l'anneau local $\mathcal{O}_{S,x}$, c'est à dire un germe de fonction en x sur S, nous définissons le nombre rationnel $\beta_{D,x}(\varphi)$ de la manière suivante:

$$\beta_{D,x}(\varphi) = \inf_{j \in J}\left(\frac{1 + k_j + \nu_j(\varphi)}{m_j} - 1\right). \tag{1.3}$$

Le nombre $\beta_{D,x}(\varphi)$ ainsi défini est indépendant de la résolution plongée des singularités $\sigma: \tilde{S} \to S$ choisie.

Nous pouvons définir pour tout nombre α l'idéal $\mathcal{A}_\alpha$ de l'anneau local $\mathcal{O}_{S,x}$ comme l'idéal des éléments φ vérifiant $\beta_{D,x}(\varphi) > \alpha$.

Alors l'idéal $\mathcal{A}_\alpha$ peut être défini comme l'image directe par le morphisme σ du faisceau inversible $\mathcal{O}_{\tilde{S}}\Big(-\sum_{j \in J}\big(\big[(\alpha+1)m_j\big] - k_j\big)E_j\Big)$ (cf [Lo.-Va.] démonstration de la proposition 4.5).

Si nous avons une situation globale, c'est à dire un diviseur D à singularités isolées sur une variété non singulière S, la construction précédente se globalise et nous pouvons définir les faisceaux d'idéaux $\mathcal{A}_\alpha$ de $\mathcal{O}_S$ à partir d'une résolution plongée des singularités de D. En particulier une section globale φ de $\mathcal{O}_S$ appartient à $\mathcal{A}_\alpha$ si pour tout point singulier x du diviseur D nous avons l'inégalité $\beta_{D,x}(\varphi) > \alpha$.

Nous nous intéressons aux faisceaux $\mathcal{A}_\alpha$ uniquement pour α compris entre -1 et 0. Nous pouvons remarquer facilement que le faisceau $\mathcal{A}_{-1}$ est égal au faisceau $\mathcal{O}_S$ et que le faisceau $\mathcal{A}_0$ est l'idéal d'adjonction $\mathcal{A}_D$ de la variété D dans S ([Va.] Proposition 2.1).

Nous dirons qu'un nombre rationnel α, $-1 \leq \alpha \leq 0$, appartient au spectre de la singularité (D, x) s'il existe un élément φ de l'anneau local $\mathcal{O}_{S,x}$ vérifiant $\beta_{D,x}(\varphi) = \alpha$, et nous appellerons spectre du diviseur D de S la réunion des spectres de toutes les singularités (D, x) de D. Nous noterons $Sp(D)$ le spectre de D.

Pour tout nombre α et pour tout nombre λ strictement positif nous avons l'inclusion $\mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{A}_{\alpha-\lambda}$, et nous avons égalité entre les faisceaux $\mathcal{A}_\alpha$ et $\mathcal{A}_{\alpha-\lambda}$ pour λ suffisamment petit si et seulement si le nombre α n'appartient pas au spectre de D.

Dans le cas où la singularité (D, x) est définie sur le corps des nombres complexes $\mathbf{C}$ nous pouvons relier les nombres α définis précédemment à partir d'une résolution plongée des singularités à la structure de Hodge mixte sur la fibre de Milnor. Nous avons plus précisément le résultat suivant ([Vr.1], [Vr.2]).

A toute singularité isolée d'hypersurface (D, x) de dimension $d-1$ nous pouvons associer une suite de nombres rationnels, le spectre singulier de (D, x), définie à partir de la structure de Hodge mixte sur le $(d-1)$-ième groupe de cohomologie H de la fibre de Milnor de (D, x) de la manière suivante:

le nombre rationnel α apparait dans le spectre singulier de (D,x) avec la multiplicité k, où k est un entier strictement positif, si

$$d-p-2<\alpha\leq d-1-p,\quad \exp(2\pi i\alpha)=\lambda,\quad \dim F^pH_\lambda/F^{p+1}H_\lambda=k,\quad 0\leq p\leq d-1,$$

où $H=\oplus H_\lambda$ est la décomposition de H en sous-espaces propres généralisés pour l'action de la monodromie et où $F^\cdot$ est la filtration de Hodge sur H_λ

Les deux définitions du spectre que nous avons données coïncident, plus précisément un nombre rationnel négatif ou nul α apparait dans le spectre de la singularité (D,x) si et seulement si α appartient à $Sp(D,x)$.

Nous disons aussi que dans ce cas le nombre α est un exposant de Hodge de la singularité (D,x).

Revenons à la situation initiale: nous considérons un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur la variété non singulière S et un diviseur D sur S appartenant au système linéaire $|\mathcal{L}^{\otimes n}|$.

Nous supposons maintenant que le diviseur D est formé de la réunion de deux diviseurs D' et D'', avec D' réduit et ayant uniquement des singularités isolées et avec D'' non nécessairement réduit mais tel que son support D''_{red} soit à croisements normaux et coupe transversalement le diviseur D' en des points non singuliers de celui-ci.

Alors l'image inverse totale $\sigma^*(D)$ du diviseur D par une résolution plongée $\sigma\colon\tilde{S}\to S$ des singularités du diviseur D' a pour support un diviseur à croisements normaux et nous pouvons déduire des définitions précédentes le théorème suivant.

Théorème I.1:

Soit S une variété non singulière de dimension d définie sur le corps des nombres complexes $\mathbf{C}$, et soit D un diviseur sur S vérifiant la propriété précédente.

Soit X le revêtement cyclique de degré n de S défini par le diviseur D et soit $\tilde{X}$ une résolution des singularités de X, alors la dimension q de l'espace de cohomologie $\mathrm{H}^r(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}})$, $0\leq r\leq d$, est égale à:

$$q=\dim \mathrm{H}^r(\tilde{X},\mathcal{O}_{\tilde{X}})=\sum_{p=0}^{n-1}\dim \mathrm{H}^{d-r}\Big(S,\mathcal{A}_\alpha\otimes_{\mathcal{O}_S}\omega_S\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{L}^{\otimes p}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_S\Big(-\Big[\frac{p}{n}D''\Big]\Big)\Big),$$

$$\textit{avec}\quad \alpha=\frac{p}{n}-1,$$

où le diviseur $\left[\frac{p}{n}D''\right]$ est défini à partir du diviseur D'' (cf (0.3)), où le faisceau $\mathcal{A}_\alpha$ est le faisceau des germes de fonctions φ sur S vérifiant l'inégalité $\beta_{D',x}(\varphi)>\alpha$ pour tout point singulier x du diviseur D'.

Démonstration:

D'après la proposition I.1 il suffit de démontrer que les faisceaux $\mathcal{A}_\alpha\otimes_{\mathcal{O}_S}\omega_S\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{L}^{\otimes p}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_S\left(-\left[\frac{p}{n}D''\right]\right)$ et $\sigma_*\left(\mathcal{L}^{[p]}\otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}}\omega_{\tilde{S}}\right)$ sont isomorphes.

Comme σ est un isomorphisme en dehors des points singuliers de D', les diviseurs $\tilde{D}(p)=\left[\frac{p}{n}\sigma^*(D)\right]$ et $\sum_{j\in J}\left[\frac{pm_j}{n}\right]E_j+\sigma^*\left(\left[\frac{p}{n}D''\right]\right)$ sont égaux et $\mathcal{L}^{[p]}\otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}}\omega_{\tilde{S}}$ est isomorphe au faisceau suivant:

$$\sigma^*\Big(\mathcal{L}^{\otimes p}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{O}_S\Big(-\Big[\frac{p}{n}D''\Big]\Big)\otimes_{\mathcal{O}_S}\omega_S\Big)\otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}}\mathcal{O}_{\tilde{S}}\Big(-\sum_{j\in J}\Big[\frac{pm_j}{n}\Big]E_j+\sum_{j\in J}k_jE_j\Big).$$

Le théorème est alors une conséquence de la formule de projection et de la définition des faisceaux $\mathcal{A}_\alpha$ à partir de la résolution plongée des singularités du diviseur D'.

Si nous nous donnons un diviseur réduit D' sur la variété S dont toutes les singularités sont des singularités isolées et appartenant au système linéaire $|\mathcal{L}^{\otimes m}|$, avec $1\leq m\leq n$, et si nous supposons qu'il existe un diviseur L sur S appartenant au système linéaire $|\mathcal{L}|$ avec L non singulier et coupant transversalement D' en des points non singuliers, un tel diviseur L existe toujours si nous supposons que le faisceau inversible $\mathcal{L}$ est très ample sur S, alors nous pouvons prendre pour D'' le diviseur $(n-m)L$.

Nous considérons alors le revêtement cyclique X de S ramifié au dessus de $D' \bigcup L$ défini par le diviseur $D = D' + (n-m)L$, et nous avons le résultat suivant.

Corollaire I.1:
La dimension de l'espace de cohomologie $\mathrm{H}^r\big(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}\big)$ *est égale à:*

$$q = \dim \mathrm{H}^r\big(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}\big) = \sum_{p=0}^{n-1} \dim \mathrm{H}^{d-r}\Big(S, \mathcal{A}_\alpha \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}^{\otimes \lceil \frac{pm}{n} \rceil}\Big) \qquad (1.4)$$
$$\textit{avec} \quad \alpha = \frac{p}{n} - 1$$

Le résultat précédent donnant la dimension des groupes $\mathrm{H}^r\big(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}\big)$ en fonction des groupes de cohomologie des faisceaux $\mathcal{A}_\alpha$ tordus par une puissance convenable de $\mathcal{L}$, est une généralisation d'une partie du théorème de Zariski ([Za.3] fin du §7, p.503).

Pour avoir une généralisation du théorème en entier, il faut démontrer des résultats d'annulation sur ces groupes, résultats dont la démonstration utilise de façon essentielle la théorie de Hodge et des théorèmes d'annulation de la cohomologie singulière des variétés complexes affines.

Les deux propositions suivantes sont des généralisations à une variété S de dimension quelconque des propositions 3.3 et 3.4 de [Va.].

Nous supposons dans la suite que la variété S est projective et que le faisceau inversible $\mathcal{L}$ est très ample. Nous considérons de nouveau un diviseur D' à singularités isolées sur la variété S, appartenant au système linéaire $|mL|$, et nous voulons étudier les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^r\big(S, \mathcal{A}_\alpha \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}^{\otimes \lceil (\alpha+1)m \rceil}\big)$ pour un nombre α de $\mathbf{Q} \bigcap\,]-1, 0[$ n'appartenant pas au spectre singulier de D'.

Proposition I.2:
Si le nombre α *n'appartient pas au spectre singulier* $Sp(D')$ *nous avons la relation:*

$$\mathrm{H}^r\Big(S, \mathcal{A}_\alpha \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}^{\otimes \lceil (\alpha+1)m \rceil}\Big) = 0, \quad \textit{pour} \quad r \geq 1.$$

Démonstration:
Comme le nombre α n'appartient pas à $Sp(D')$, pour tout $\lambda > 0$ suffisamment petit les faisceaux $\mathcal{A}_\alpha$ et $\mathcal{A}_{\alpha-\lambda}$ sont égaux, et nous avons l'égalité $\lceil (\alpha+1)m \rceil = \lceil (\alpha - \lambda + 1)m \rceil$.

Soit $E = \bigcup_{j=1}^r E_j$ le diviseur exceptionnel de la résolution plongée $\sigma \colon \tilde{S} \to S$ des singularités de D', nous notons m_j le coefficient de la composante irréductible E_j dans l'image inverse $\sigma^*(D') = \tilde{D}' + \sum_{j=1}^r m_j E_j$.

Alors, quitte à remplacer α par $\alpha - \lambda$ pour un $\lambda > 0$ suffisamment petit, nous pouvons supposer que le nombre rationnel $\alpha = \dfrac{p}{n} - 1$, avec $(p, n) = 1$, vérifie:

$$\begin{aligned} (\alpha+1)m \notin \mathbf{Z} \quad &\text{et} \quad n > m, \\ (\alpha+1)m_j \notin \mathbf{Z} \quad &\forall j, \quad 1 \leq j \leq r. \end{aligned}$$

Comme précédemment nous considérons le revêtement cyclique de degré n, $\psi \colon X \to S$ ramifié au dessus du diviseur $D' \bigcup L$ et le revêtement cyclique $\bar{\psi} \colon \bar{X} \to \tilde{S}$ défini grâce aux faisceaux inversibles $\mathcal{L}^{[p]} = \sigma^*\big(\mathcal{L}^{\otimes p}\big) \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}} \mathcal{O}_{\tilde{S}}\Big(-\Big[\dfrac{p}{n}\tilde{D}\Big]\Big)$, où $\tilde{D}$ est l'image inverse $\sigma^*\big(D' + (n-m)L\big) = \tilde{D}' + (n-m)\tilde{L} + \sum_{j=1}^r m_j E_j$.

Nous choisissons encore un nombre $\lambda > 0$ suffisamment petit tel que les faisceaux $\mathcal{A}_\alpha$ et $\mathcal{A}_{\alpha-\lambda}$ soient égaux et nous définissons un nouveau faisceau inversible $\mathcal{L}'^{[p]}$ sur $\tilde{S}$ par:

$$\mathcal{L}'^{[p]} = \sigma^*\big(\mathcal{L}^{\otimes p}\big) \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}} \mathcal{O}_{\tilde{S}}\Big(-\Big[\Big(\frac{p}{n} - \lambda\Big)\tilde{D}\Big]\Big). \qquad (1.5)$$

Comme les nombres $\dfrac{p}{n}m$ et $\dfrac{p}{n}m_j$ ne sont pas entiers, pour λ convenablement choisi nous avons les égalités: $\Big[\dfrac{p}{n}(n-m)\Big] = \Big[\Big(\dfrac{p}{n} - \lambda\Big)(n-m)\Big]$ et $\Big[\dfrac{p}{n}m_j\Big] = \Big[\Big(\dfrac{p}{n} - \lambda\Big)m_j\Big]$, $\quad 1 \leq j \leq r$. Nous en déduisons que les diviseurs $\Big[\dfrac{p}{n}\tilde{D}\Big]$ et $\Big[\Big(\dfrac{p}{n} - \lambda\Big)\tilde{D}\Big]$ sont égaux, d'où l'égalité entre les faisceaux $\mathcal{L}'^{[p]}$ et $\mathcal{L}^{[p]}$.

Alors les groupes $\mathrm{H}^r\Big(S,\mathcal{A}_\alpha\otimes_{\mathcal{O}_S}\omega_S\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{L}^{\otimes\lceil(\alpha+1)m\rceil}\Big)$ et $\mathrm{H}^r\Big(\tilde S,\mathcal{L}'^{[p]}\otimes_{\mathcal{O}_{\tilde S}}\omega_{\tilde S}\Big)$ sont égaux, et le faisceau $\mathcal{L}'^{[p]}$ vérifie l'égalité:

$$\mathcal{L}'^{[p]}\otimes_{\mathcal{O}_{\tilde S}}\mathcal{L}^{[n-p]}=\sigma^*\big(\mathcal{L}^{\otimes n}\big)\otimes_{\mathcal{O}_{\tilde S}}\mathcal{O}_{\tilde S}\Big(-\Big[\Big(\frac{p}{n}-\lambda\Big)\tilde D\Big]-\Big[\frac{n-p}{n}\tilde D\Big]\Big).$$

Nous pouvons choisir le nombre λ tel que pour tout entier l apparaissant comme coefficient d'une composante irréductible du diviseur $\tilde D$ nous ayons l'égalité $\Big[\Big(\frac{p}{n}-\lambda\Big)l\Big]+\Big[\frac{n-p}{n}l\Big]=l-1$, d'où la relation: $\Big[\Big(\frac{p}{n}-\lambda\Big)\tilde D\Big]+\Big[\frac{n-p}{n}\tilde D\Big]=\tilde D-\tilde D_{\mathrm{red}}$.

Nous avons alors l'isomorphisme: $\mathcal{L}'^{[p]}\otimes_{\mathcal{O}_{\tilde S}}\mathcal{L}^{[n-p]}\simeq\mathcal{O}_{\tilde S}\big(\tilde D_{\mathrm{red}}\big)$.

Nous en déduisons que les faisceaux $\mathcal{L}'^{[p]}\otimes_{\mathcal{O}_{\tilde S}}\omega_{\tilde S}$ et $\mathcal{L}^{[n-p]^{-1}}\otimes_{\mathcal{O}_{\tilde S}}\Omega^d_{\tilde S}(\log\tilde D)$ sont isomorphes, où nous notons $\Omega^d_{\tilde S}(\log\tilde D)$ le faisceau des d-formes différentielles sur $\tilde S$ à pôles logarithmiques le long du diviseur $\tilde D_{\mathrm{red}}$.

Alors le groupe $\mathrm{H}^r\big(\tilde S,\mathcal{L}'^{[p]}\otimes_{\mathcal{O}_{\tilde S}}\omega_{\tilde S}\big)$ est isomorphe pour tout r à $\mathrm{H}^r\big(\tilde S,\mathcal{L}^{[n-p]^{-1}}\otimes_{\mathcal{O}_{\tilde S}}\Omega^d_{\tilde S}(\log\tilde D)\big)$, et d'après un résultat de H. Esnault et E. Viehweg ([Es.] Corollaire 4, [Es.-Vi.1] Lemme 1.2) ce groupe est un facteur direct du groupe $\mathrm{H}^r\big(\tilde X,\Omega^d_{\tilde X}(\log\Delta)\big)$.

D'après la théorie de Hodge pour le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux ([De.] th. (3.2.5)) ce groupe est lui-même facteur direct du groupe $\mathrm{H}^{d+r}\big(\tilde U,\mathbf{C}\big)$, où $\tilde U$ est le complémentaire du diviseur Δ dans la résolution $\tilde X$ de X.

Comme l'ouvert U est le complémentaire d'un diviseur très ample de S, c'est un ouvert affine. L'ouvert $\tilde U$, qui est fini au dessus de l'ouvert U, est aussi un ouvert affine, par conséquent les groupes $\mathrm{H}^i\big(\tilde U,\mathbf{C}\big)$ sont nuls pour $i>d$, où d est la dimension de S.

Nous en déduisons que les groupes $\mathrm{H}^r\big(\tilde S,\mathcal{L}'^{[p]}\otimes_{\mathcal{O}_{\tilde S}}\omega_{\tilde S}\big)$ sont nuls pour $r>0$.

Nous notons dans la suite de ce paragraphe β_1, β_2,..., β_l les éléments non entiers du spectre singulier du diviseur D', c'est à dire appartenant à $Sp(D')\bigcap]-1,0[$, avec pour tout i, $1\le i\le l$, $\beta_i=\dfrac{p_i}{n_i}-1$ où p_i et n_i sont des entiers positifs premiers entre eux.

Nous fixons un entier r, $0\le r\le d-1$, et nous appelons q et q_0 les dimensions respectives des groupes de cohomologie $\mathrm{H}^r\big(\tilde X,\mathcal{O}_{\tilde X}\big)$ et $\mathrm{H}^r\big(S,\mathcal{O}_S\big)$.

Nous déduisons du théorème I.1 que la différence $q-q_0$ est toujours positive ou nulle, et est égale à:

$$q-q_0=\sum_{p=1}^{n-1}\ \dim\mathrm{H}^{d-r}\Big(S,\mathcal{A}_\alpha\otimes_{\mathcal{O}_S}\omega_S\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{L}^{\otimes\lceil\frac{pm}{n}\rceil}\Big).\tag{1.6}$$

Nous avons alors le résultat suivant:

Proposition I.3:
Pour que la différence $q-q_0$ soit non nulle il faut qu'au moins un des entiers n_i, $1\le i\le l$, divise à la fois le degré m du diviseur D' et le degré n du revêtement $\psi\colon X\to S$.

Démonstration:
D'après la relation (1.6), pour que la différence $q-q_0$ soit non nulle, il faut que l'un des groupes $\mathrm{H}^{d-r}\big(S,\mathcal{A}_\alpha\otimes_{\mathcal{O}_S}\omega_S\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{L}^{\otimes\lceil\frac{pm}{n}\rceil}\big)$ ne soit pas nul; nous déduisons de la proposition I.2 que le nombre rationnel $\alpha=\dfrac{p}{n}-1$ appartient au spectre singulier de D', c'est à dire est égal à $\beta_i=\dfrac{p_i}{n_i}-1$ pour un indice i, par conséquent l'entier n_i doit diviser le degré n du revêtement.

Nous devons montrer que cet entier n_i divise aussi aussi le degré m du diviseur D'.

Supposons que ce n'est pas le cas, alors le nombre $(\beta_i+1)m=\dfrac{p_im}{n_i}$ n'est pas entier, et pour tout nombre strictement positif λ suffisamment petit, les entiers $\lceil(\beta_i+1)m\rceil$ et $\lceil(\beta+1)m\rceil$, où $\beta=\beta_i+\lambda$, sont égaux. De plus pour λ suffisamment petit, les faisceaux $\mathcal{A}_\beta$ et $\mathcal{A}_{\beta_i}$ sont égaux.

Le groupe $\mathrm{H}^{d-r}\big(S, \mathcal{A}_{\beta_i}\otimes_{\mathcal{O}_S}\omega_S\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{L}^{\otimes\lceil\frac{pm}{n}\rceil}\big)$ est alors égal à groupe $\mathrm{H}^{d-r}\big(S, \mathcal{A}_{\beta}\otimes_{\mathcal{O}_S}\omega_S\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{L}^{\otimes\lceil(\beta+1)m\rceil}\big)$, avec β n'appartenant pas à $Sp(D')$, et ce groupe est nul d'après la proposition précédente.

II Idéal d'adjonction.

Pour calculer l'irrégularité d'un revêtement cyclique X de degré n du plan projectif $\mathbf{P}^2$ ramifié au dessus d'une courbe C, Zariski donne une construction explicite de ce revêtement comme fermé de degré n de l'espace projectif $\mathbf{P}^3$. Pour trouver le genre géométrique de cette surface X, il calcule son idéal d'adjonction $\mathcal{A}_X$ dans $\mathbf{P}^3$ en utilisant le fait que la courbe C a pour seuls points singuliers des points doubles ordinaires et des points cuspidaux ([Za.3]).

Dans ce paragraphe nous allons généraliser la démonstration de Zariski.

Nous allons d'abord montrer comment le revêtement cyclique X d'une variété S de dimension d, défini par un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur S et une section globale g du faisceau $\mathcal{L}^{\otimes n}$, peut être plongé dans l'espace total d'un fibré projectif $Z = \mathbf{P}(\mathcal{E})$, où $\mathcal{E}$ est le faisceau localement libre de rang deux sur S défini par $\mathcal{E} = \mathcal{O}_S \oplus \mathcal{L}$.

En particulier si la variété S est régulière, le revêtement X est un diviseur sur une variété régulière Z de dimension $d+1$.

Nous appelons ρ le morphisme naturel de Z dans S et $\mathcal{O}_Z(1)$ le faisceau inversible tautologique sur Z, quotient inversible "universel" du faisceau $\rho^*(\mathcal{E})$. L'image directe $\rho_*\big(\mathcal{O}_Z(1)\big)$ est isomorphe au faisceau $\mathcal{E}$, par conséquent les groupes $\mathrm{H}^0\big(Z, \mathcal{O}_Z(1)\big)$ et $\mathrm{H}^0\big(S, \mathcal{E}\big) = \mathrm{H}^0\big(S, \mathcal{O}_S\big)\oplus\mathrm{H}^0\big(S, \mathcal{L}\big)$ sont égaux et la section $1 \in \mathrm{H}^0\big(S, \mathcal{O}_S\big)$ définit une section globale h du faisceau $\mathcal{O}_Z(1)$, c'est à dire un diviseur H sur la variété Z.

La restriction de ρ à H induit un isomorphisme ι de H dans S. L'immersion fermée ι' de S dans Z ainsi définie peut être aussi construite à partir de la propriété universelle de $\rho\colon Z = \mathbf{P}(\mathcal{E}) \to S$: le morphisme $\iota'\colon S \to Z$ est le morphisme correspondant au quotient inversible $\mathcal{L}$ de $\mathcal{E}$. En particulier le faisceau $\mathcal{L}$ sur S est isomorphe à $\iota'^*\big(\mathcal{O}_Z(1)\big)$, c'est à dire à la restriction $\mathcal{O}_H(1)$ du faisceau tautologique au diviseur H.

Comme le faisceau $\mathcal{E}$ est de la forme $\mathcal{E} = \mathcal{O}_S \oplus \mathcal{L}$, nous avons les isomorphismes:

$$(2.1)\qquad \begin{aligned} &\rho_*\big(\mathcal{O}_Z(n)\big) \simeq \mathcal{S}^n\mathcal{E} = \bigoplus_{p=0}^{n} \mathcal{L}^{\otimes p} \quad \text{pour } n \geq 0, \\ &\rho_*\big(\mathcal{O}_Z(n)\big) = 0 \quad \text{pour } n < 0; \end{aligned}$$

$$(2.2)\qquad \begin{aligned} &\mathrm{R}^1\rho_*\big(\mathcal{O}_Z(n)\big) \simeq \underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{O}_S}\big(\mathcal{S}^{-n-2}\mathcal{E}\otimes_{\mathcal{O}_S}\det\mathcal{E}, \mathcal{O}_S\big) = \bigoplus_{p=n+1}^{-1}\mathcal{L}^{\otimes p} \quad \text{pour } n \leq -2, \\ &\mathrm{R}^1\rho_*\big(\mathcal{O}_Z(n)\big) = 0 \quad \text{pour } n > -2. \end{aligned}$$

Nous avons alors l'égalité:

$$(2.3)\qquad \mathrm{H}^0\big(Z, \mathcal{O}_Z(n)\big) = \bigoplus_{p=0}^{n}\mathrm{H}^0\big(S, \mathcal{L}^{\otimes p}\big),$$

et nous appelons h^n la section globale de $\mathcal{O}_Z(n)$ correspondant à la section 1 de $\mathcal{O}_S$, nous trouvons en particulier $h^1 = h$ où h est la section définissant le diviseur H.

Nous nous donnons maintenant un diviseur C sur la variété S défini par une section globale f du faisceau inversible $\mathcal{L}^{\otimes m}$ et un diviseur L défini par une section globale u de $\mathcal{L}$, dans le cas où la variété S est régulière nous supposerons que le diviseur C est réduit, que le diviseur L est régulier et coupe C transversalement.

Grâce à l'égalité (2.3) nous pouvons considérer la section globale $g = u^{n-m}f$ de $\mathcal{L}^{\otimes n}$ comme une section du faisceau $\mathcal{O}_Z(n)$ sur Z. Nous définissons alors le diviseur X de Z associé à la section $h^n - u^{n-m}f$ de ce faisceau.

Proposition II.1:

Le morphisme $\psi: X \to S$ obtenu comme restriction au diviseur X du morphisme $\rho: Z \to S$ est le revêtement cyclique de degré n de S, ramifié au dessus du diviseur $C \bigcup L$, défini par la section globale $u^{n-m}f$ de $\mathcal{L}^{\otimes n}$.

Démonstration:

Nous pouvons vérifier localement sur S que le morphisme $\psi: X \to S$ est un morphisme fini. De plus nous avons par définition du diviseur X la suite exacte suivante de faisceaux sur Z:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Z(-n) \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

et en prenant l'image directe par le morphisme ρ nous trouvons grâce aux égalités (2.1) et (2.2) la suite exacte de faisceaux sur S:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \psi_*(\mathcal{O}_X) \longrightarrow \bigoplus_{p=1}^{n-1} \mathcal{L}^{\otimes -p} \longrightarrow 0,$$

ce qui nous donne bien un isomorphisme entre le faisceau $\psi_*(\mathcal{O}_X)$ et l'algèbre $\bigoplus_{p=0}^{n-1} \mathcal{L}^{\otimes -p}$.

La section globale u du faisceau $\mathcal{L}$ sur S peut aussi être considérée grâce à l'égalité (2.3) comme une section globale du faisceau $\mathcal{O}_Z(1)$ sur Z, et nous appelons V le diviseur sur Z défini par cette section u.

L'isomorphisme $\iota: H \to S$ permet d'identifier les diviseurs $X \bigcap H$ et $V \bigcap H$ de H avec les diviseurs $C + (n-m)L$ et L de S.

Dans le cas où la variété S est l'espace projectif $\mathbf{P}^d$ et le faisceau inversible $\mathcal{L}$ est le faisceau ample $\mathcal{O}_S(1)$, la variété $Z = \mathbf{P}\big(\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S(1)\big)$ est obtenue comme l'éclatement du point ∞ de l'espace projectif $\mathbf{P}^{d+1}$ et le morphisme $\rho: Z \to S$ est induit par la projection de $\mathbf{P}^{d+1} \setminus \{\infty\}$ dans $\mathbf{P}^d$.

Comme le diviseur X défini précédemment ne rencontre pas le diviseur exceptionnel de l'éclatement $Z \to \mathbf{P}^{d+1}$, nous pouvons le considérer comme un diviseur de $\mathbf{P}^{d+1}$ ne contenant pas le point ∞. Nous retrouvons ainsi la description faite par Zariski du revêtement cyclique de $\mathbf{P}^d$.

Nous supposons maintenant que la variété S est régulière, que le diviseur C est réduit et que le diviseur L est régulier, et nous voulons étudier les singularités de la variété X.

Soit o un point fermé de la variété S, nous notons $\mathcal{O}_{S,o}$ l'anneau local de S en o, c'est un anneau régulier de dimension d et nous notons $(x_1, \dots, x_d)$ un système régulier de paramètres de cet anneau.

Alors pour tout point $\tilde{o}$ de la variété Z au dessus du point o, l'anneau $\mathcal{O}_{S,o}$ est inclus dans l'anneau local $\mathcal{O}_{Z,\tilde{o}}$ de Z en $\tilde{o}$, et nous pouvons trouver un système régulier de paramètres $(x_1, \dots, x_d, z)$ de $\mathcal{O}_{Z,\tilde{o}}$ qui étend la système régulier de $\mathcal{O}_{S,o}$ et tel que l'anneau quotient $\mathcal{O}_{Z,\tilde{o}}/(z)$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_{S,o}$.

Si le diviseur $C + (n-m)L$ est défini localement au voisinage du point o par un élément g de $\mathcal{O}_{S,o}$, alors le diviseur X est défini au voisinage du point $\tilde{o}$ par l'élément $z^n - g$.

Nous en déduisons que le lieu singulier $\mathrm{Sing}(X)$ du revêtement cyclique X de S est inclus dans l'image inverse du lieu singulier du diviseur $C + (n-m)L$, c'est à dire dans $\rho^{-1}(L) \bigcup \rho^{-1}\big(\mathrm{Sing}(C)\big)$.

Nous en déduisons aussi que $\mathrm{Sing}(X)$, défini par l'idéal de Fitting $F_d(\Omega^1_X)$, est inclus dans le diviseur $(n-1)H$ de Z, en fait l'isomorphisme ι induit un isomorphisme entre $\mathrm{Sing}(X) \bigcap H$ et $\mathrm{Sing}\big(C + (n-m)L\big)$.

Nous voulons calculer l'idéal d'adjonction du diviseur X dans la variété régulière Z, c'est à dire le faisceau d'idéaux $\mathcal{A}_X$ de $\mathcal{O}_Z$ rendant commutatif le diagramme suivant:

$$(2.4)\qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \omega_Z & \longrightarrow & \mathcal{A}_X \otimes \omega_Z(X) & \longrightarrow & \pi_*(\omega_{\tilde{X}}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \omega_Z & \longrightarrow & \omega_Z(X) & \longrightarrow & \omega_X & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où nous appelons $\pi: \tilde{X} \to X$ une résolution des singularités de X.

Si nous sommes au voisinage d'un point singulier $\tilde{o}$ de X situé au dessus d'un point o appartenant au diviseur L et n'appartenant pas au diviseur C, l'équation g de X dans Z est de la forme $z^n - u^{n-m}$, où u est un élément d'une suite régulière de $\mathcal{O}_{S,o}$ définissant le diviseur L au voisinage du point o, nous supposons dans ce cas $n \geq m+2$.

De même si nous sommes au voisinage d'un point $\tilde{o}$ de X situé au dessus d'un point o appartenant à $C \bigcap L$, l'équation de X est de la forme $z^n - u^{n-m}x$, où (u,x) est une suite régulière de $\mathcal{O}_{S,o}$ telle que u et x définissent respectivement les diviseurs L et C au voisinage de o, dans ce cas nous supposons $n \geq m+1$.

Dans ces deux cas, il est très facile de calculer directement l'idéal d'adjonction $\mathcal{A}_X$.

Si nous sommes au voisinage d'un point singulier $\tilde{o}$ de X qui se trouve au dessus d'un point singulier o du diviseur C, c'est à dire si l'équation g de X dans Z est de la forme $z^n - f$, où f est l'élément de $\mathcal{O}_{S,o}$ définissant la singularité (C,o) dans S, il est en général plus difficile de calculer l'idéal d'adjonction $\mathcal{A}_X$.

Remarque II.1:
Si (C,o) est une singularité isolée d'hypersurface non dégénérée par rapport à son polyèdre de Newton, il est encore possible de trouver une description simple de l'idéal $\mathcal{A}_X$. C'est en particulier le cas pour les singularités considérées par Zariski et plus généralement pour les singularités de courbes planes d'équation de la forme $x^p + y^q$.

En effet si la singularité (C,o) définie dans S par $f = f(x_1, \ldots, x_d)$ est non dégénérée par rapport à son polyèdre de Newton, la singularité $(X,\tilde{o})$ définie par $z^n - f$ est aussi non dégénérée. Alors, en utilisant la résolution des singularités de Kouchnirenko, il est possible de donner une description de l'idéal d'adjonction $\mathcal{A}_X$ ([Me.-Te.] Théorème 2.1.1.). L'idéal $\mathcal{A}_X$ est l'idéal de $\mathcal{O}_{Z,\tilde{o}}$ engendré par les monômes $x_1^{i_1} \ldots x_d^{i_d} z^{i_{d+1}}$ tels que $(i_1, \ldots, i_d, i_{d+1})$ soit à l'intérieur du polyèdre de Newton de la singularité $(X,\tilde{o})$.

Pour calculer l'idéal d'adjonction $\mathcal{A}_X$ dans le cas général nous utilisons la description du revêtement cyclique X donnée au paragraphe I, c'est à dire: $X = \mathrm{Spec}_S\Big(\bigoplus_{p=0}^{n-1} \mathcal{L}^{\otimes -p}\Big)$.

Nous pouvons trouver un recouvrement du fibré projectif $Z = \mathbf{P}(\mathcal{E})$ par les deux ouverts Z^+ et Z^- définis par les égalités suivantes:

$$Z^+ = \mathrm{Spec}_S\Big(\bigoplus_{p \geq 0} \mathcal{L}^{\otimes p}\Big) \qquad \text{et} \qquad Z^- = \mathrm{Spec}_S\Big(\bigoplus_{p \leq 0} \mathcal{L}^{\otimes p}\Big). \tag{2.5}$$

Ces ouverts, munis des morphismes $\rho^+ \colon Z^+ \to S$ et $\rho^- \colon Z^- \to S$ obtenus par restriction, sont les espaces fibrés vectoriels sur S associés aux faisceaux inversibles $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^{-1}$.

L'intersection $Z^+ \bigcap Z^-$ est égale à $\mathrm{Spec}_S\Big(\bigoplus_{p \in \mathbf{Z}} \mathcal{L}^{\otimes p}\Big)$ et les complémentaires respectifs H^+ et H^- de Z^+ et Z^- dans Z sont des sous-variétés fermées de Z isomorphes par ρ à S (cf. [Dm.] Partie 2).

En particulier nous avons avec les notations précédentes $H = H^+$ et l'ouvert Z^-, affine au dessus de S, contient les deux sous-variétés fermées H et X de Z.

Dans la suite, comme nous nous intéressons à ce qui se passe au voisinage de X dans Z, nous nous plaçons sur l'ouvert Z^- de Z. De plus, comme le lieu singulier $\mathrm{Sing}(X)$ est inclus dans H, la restriction à l'ouvert Z^+ de l'idéal d'adjonction $\mathcal{A}_X$ de X dans Z est égale au faisceau $\mathcal{O}_Z$.

Nous allons définir une notion d'idéal "homogène" de l'anneau local $\mathcal{O}_{Z,\tilde{o}}$.

Nous nous plaçons au voisinage d'un point $\tilde{o}$ de H, nous appelons o son image par ρ et grâce à l'isomorphisme ι' entre H et S, l'anneau local $\mathcal{O}_{S,o}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{H,\tilde{o}}$.

Si nous appelons z l'élément de $\mathcal{O}_{Z,\tilde{o}}$ définissant le diviseur H, l'anneau $\mathcal{O}_{Z,\tilde{o}}$ est isomorphe au localisé en (z) de l'anneau $\mathcal{O}_{S,o}[z]$ et tout élément φ de l'anneau $\mathcal{O}_{Z,\tilde{o}}$ peut s'écrire sous la forme $\varphi = \sum_{n \geq 0} \varphi_n z^n$, où les φ_n sont des éléments de l'anneau $\mathcal{O}_{S,o}$.

Un idéal $\mathcal{A}$ de l'anneau $\mathcal{O}_{Z,\tilde{o}}$ est "homogène" si nous pouvons l'écrire sous la forme $\mathcal{A} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^{(n)} z^n$ où les $\mathcal{I}^{(n)}$ sont des idéaux de $\mathcal{O}_{S,o}$ vérifiant $\mathcal{I}^{(n)} \subset \mathcal{I}^{(n+1)}$.

Si nous considérons un faisceau d'idéaux $\mathcal{A}$ de $\mathcal{O}_Z$, nous dirons de la même manière que la restriction de ce faisceau $\mathcal{A}$ à l'ouvert Z^- est "homogène", si nous pouvons écrire la restriction $\mathcal{A}_{|Z^-}$ sous la forme $\mathcal{A}_{|Z^-} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{I}^{(n)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}^{\otimes -n}$, où les $\mathcal{I}^{(n)}$ sont des faisceaux d'idéaux de $\mathcal{O}_S$ vérifiant $\mathcal{I}^{(n)} \subset \mathcal{I}^{(n+1)}$.

Nous appelons g l'élément de $\mathcal{O}_{S,o}$ qui définit le diviseur $D = C + (n-m)L$ au voisinage de o. Alors la variété X est définie dans Z au voisinage de $\tilde{o}$ par l'élément $z^n - g$ de l'anneau $\mathcal{O}_{Z,\tilde{o}}$. L'anneau local $\mathcal{O}_{X,\tilde{o}}$ de X au point $\tilde{o}$ est égal à l'anneau quotient $\mathcal{O}_{X,\tilde{o}} = \mathcal{O}_{Z,\tilde{o}}/(z^n - g)$ et nous pouvons l'écrire sous la forme suivante: $\mathcal{O}_{X,\tilde{o}} = \bigoplus_{p=0}^{n-1} \mathcal{O}_{S,o} z^p$.

Si nous regardons globalement cette égalité, nous retrouvons l'égalité entre $\mathcal{O}_X$ et $\bigoplus_{p=0}^{n-1} \mathcal{L}^{\otimes -p}$.

Avec cette écriture l'image $\bar{\varphi}$ d'un élément $\varphi = \sum_{j\geq 0} \varphi_j z^j$ de $\mathcal{O}_{Z,\tilde{o}}$ dans $\mathcal{O}_{X,\tilde{o}}$ est égale à:

$$\bar{\varphi} = \sum_{p=0}^{n-1} \Big(\sum_{k\geq 0} g^k \varphi_{p+nk} \Big) z^p. \tag{2.6}$$

Nous considérons dans la suite un diviseur C sur S à singularités isolées appartenant au système linéaire $|\mathcal{L}^{\otimes m}|$, et un diviseur régulier L appartenant au système linéaire $|\mathcal{L}|$ et transverse à C. Comme au paragraphe I, pour tout nombre réel α, $-1 \leq \alpha < 0$, nous définissons le faisceau $\mathcal{A}_\alpha$ comme l'idéal de l'anneau $\mathcal{O}_S$ constitué des germes de fonctions $\bar{\varphi}$ vérifiant $\beta_{C,x}(\bar{\varphi}) > \alpha$ en tout point singulier x du diviseur C.

Alors pour tout entier $n \geq m$, nous pouvons définir les faisceaux d'idéaux $\mathcal{I}_F^{(p)}$ par les égalités suivantes:

$$\begin{gathered} \mathcal{I}_F^{(p)} = \mathcal{A}_\alpha \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S(-e(p)L) \\ \text{avec} \quad \alpha = -\frac{p+1}{n} \quad \text{et} \quad e(p) = \operatorname{Sup}\Big(\Big[\frac{(n-m)(n-1-p)}{n} \Big], 0 \Big). \end{gathered} \tag{2.7}$$

Remarques II.2:

(i) Comme les faisceaux $\mathcal{A}_\alpha$ vérifient les inclusions $\mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{A}_\beta$ pour $\alpha \geq \beta$, les faisceaux $\mathcal{I}_F^{(p)}$ donnés par les égalités (2.7) vérifient bien $\mathcal{I}_F^{(p)} \subset \mathcal{I}_F^{(p+1)}$.

(ii) Comme le faisceau $\mathcal{A}_{-1}$ est égal au faisceau $\mathcal{O}_S$, le faisceau $\mathcal{I}_F^{(p)}$ est isomorphe au faisceau $\mathcal{O}_S$ pour tout $p \geq n-1$.

Proposition II.2:

L'idéal d'adjonction $\mathcal{A}_X$ de X dans Z, où le diviseur X de Z est le revêtement cyclique de degré n de S défini par le diviseur $C + (n-m)L$, est l'idéal de $\mathcal{O}_Z$ égal à $\mathcal{O}_Z$ sur l'ouvert Z^+ et dont la restriction à l'ouvert Z^- est égale à:

$$\mathcal{A}_X = \bigoplus_{p\geq 0} \mathcal{I}_F^{(p)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}^{\otimes -p}. \tag{2.8}$$

Démonstration:

Comme le faisceau dualisant ω_X sur X est inversible, nous pouvons définir un idéal $\mathcal{I}_F$ de $\mathcal{O}_X$ par $\mathcal{I}_F = \big(\pi_*(\omega_{\bar{X}})\big) \otimes_{\mathcal{O}_X} \big(\omega_X\big)^{-1}$ et nous appelons alors F le fermé de X défini par cet idéal. C'est un particulier le support du faisceau $\mathcal{B}$ défini en (0.2).

Par définition l'idéal d'adjonction $\mathcal{A}_X$ de X dans Z est l'idéal de $\mathcal{O}_Z$ qui définit F comme fermé de Z.

Comme la variété $\bar{X}$ définie en (1.1) à partir de la résolution plongée $\sigma: \tilde{S} \to S$ des singularités de C a pour seules singularités des singularités rationnelles, les faisceaux $\bar{\sigma}_*(\omega_{\bar{X}})$ et $\pi_*(\omega_{\tilde{X}})$ sont isomorphes. Nous pouvons alors utiliser les descriptions des variétés X et $\bar{X}$ comme revêtements cycliques respectivement de S et $\tilde{S}$ pour calculer l'idéal $\mathcal{I}_F$, nous en déduiron ensuite l'idéal d'adjonction $\mathcal{A}_X$.

Comme le morphisme $\psi: X \to S$ est fini et plat, le faisceau dualisant ω_X sur X se déduit du faisceau dualisant ω_S par la relation $\omega_X = \psi^{-1}\underline{\mathcal{H}om}_{\mathcal{O}_S}\big(\psi_*\mathcal{O}_X, \omega_S\big)$, c'est à dire:

$$\omega_X = \bigoplus_{p=0}^{n-1} \mathcal{L}^{\otimes p} \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S = \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_S} \big(\mathcal{L}^{\otimes n-1} \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S\big). \tag{2.9}$$

De la même manière, le faisceau dualisant $\omega_{\bar{X}}$ sur $\bar{X}$ se déduit du faisceau dualisant $\omega_{\tilde{S}}$ par la relation $\omega_{\bar{X}} = \tilde{\psi}^{-1}\underline{Hom}_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}}(\tilde{\psi}_*\mathcal{O}_{\bar{X}}, \omega_{\tilde{S}})$, c'est à dire:

$$\omega_{\bar{X}} = \bigoplus_{p=0}^{n-1} \mathcal{L}^{[p]} \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}} \omega_{\tilde{S}}. \tag{2.10}$$

L'application de faisceaux sur X: $\bar{\sigma}_*(\omega_{\bar{X}}) \longrightarrow \omega_X$ donne alors par image directe l'application de faisceaux sur S: $\bigoplus_{p=0}^{n-1} \sigma_*\Big(\mathcal{L}^{[p]} \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}} \omega_{\tilde{S}}\Big) \longrightarrow \bigoplus_{p=0}^{n-1}\Big(\mathcal{L}^{\otimes p} \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S\Big)$.

Cette application est “homogène”, par conséquent l'idéal $\mathcal{I}_F$ de $\mathcal{O}_X = \bigoplus_{p=0}^{n-1} \mathcal{L}^{\otimes -p}$ qu'elle définit est lui aussi “homogène”, c'est à dire que $\mathcal{I}_F$ peut s'écrire:

$$\mathcal{I}_F = \bigoplus_{p=0}^{n-1} \mathcal{I}_F^{(p)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}^{\otimes -p}, \tag{2.11}$$

Localement au voisinage d'un point o, les idéaux $\big(\mathcal{I}_F^{(p)}\big)_o$ de l'anneau $\mathcal{O}_{S,o}$ vérifient $\big(\mathcal{I}_F^{(p)}\big)_o \subset \big(\mathcal{I}_F^{(p+1)}\big)_o$, pour tout p, $0 \leq p < n-1$ et $g \in \big(\mathcal{I}_F^{(0)}\big)_o$.

Par définition de l'idéal d'adjonction $\mathcal{A}_X$ de X dans Z, un élément φ de l'anneau $\mathcal{O}_{Z,\tilde{o}}$ appartient à $\mathcal{A}_X$ si et seulement si son image $\bar{\varphi}$ dans l'anneau $\mathcal{O}_{X,\tilde{o}} = \mathcal{O}_{Z,\tilde{o}}/(z^n - g)$ appartient à l'idéal $\mathcal{I}_F$.

Nous déduisons alors de la relation (2.6) et de la définition (2.11) des idéaux $\mathcal{I}_F^{(p)}$ que l'idéal $\mathcal{A}_X$ est homogène et peut s'écrire localement sous la forme $\big(\mathcal{A}_X\big)_o = \bigoplus_{p\geq 0}\big(\mathcal{I}^{(p)}\big)_o z^p$ avec $\big(\mathcal{I}^{(p)}\big)_o = \big(\mathcal{I}_F^{(p)}\big)_o$ pour $0 \leq p \leq n-1$ et $\big(\mathcal{I}^{(p)}\big)_o = \mathcal{O}_{S,o}$ pour $p \geq n$.

Le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_F$ de $\mathcal{O}_X$ est isomorphe à $\underline{Hom}_{\mathcal{O}_X}\big(\omega_X, \pi_*(\omega_{\bar{X}})\big)$, et nous déduisons des égalités (2.9) et (2.10) l'isomorphisme suivant:

$$\mathcal{I}_F \simeq \underline{Hom}_{\mathcal{O}_S}\Big(\mathcal{L}^{\otimes n-1} \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S, \bigoplus_{p=0}^{n-1} \sigma_*\big(\mathcal{L}^{[p]} \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}} \omega_{\tilde{S}}\big)\Big) = \bigoplus_{p=0}^{n-1} \sigma_*\big(\mathcal{L}^{[p]} \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}} \omega_{\tilde{S}}\big) \otimes_{\mathcal{O}_S} \big(\mathcal{L}^{\otimes n-1} \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S\big)^{-1}.$$

Pour trouver les idéaux $\mathcal{I}_F^{(p)}$, $0 \leq p \leq n-1$, il suffit alors d'écrire que l'idéal $\mathcal{I}_F$ de $\mathcal{O}_X$ est égal à la somme directe $\bigoplus_{p=0}^{n-1} \mathcal{I}_F^{(p)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}^{\otimes -p}$, où les faisceaux $\mathcal{I}_F^{(p)}$ sont des idéaux de $\mathcal{O}_S$, et nous trouvons l'égalité:

$$\mathcal{I}_F^{(p)} = \sigma_*\big(\mathcal{L}^{[n-1-p]} \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}} \omega_{\tilde{S}}\big) \otimes_{\mathcal{O}_S} \big(\mathcal{L}^{\otimes n-1-p} \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S\big)^{-1}. \tag{2.12}$$

Pour conclure il suffit alors d'utiliser la définition du faisceau $\mathcal{A}_\alpha$ de $\mathcal{O}_S$ comme faisceau image directe par le morphisme σ du faisceau $\mathcal{O}_{\tilde{S}}\Big(-\sum\big(\big[(\alpha+1)m_j\big] - k_j\big)E_j\Big)$, c'est à dire l'isomorphisme:

$$\sigma_*\big(\mathcal{L}^{[n-1-p]} \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}} \omega_{\tilde{S}}\big) \simeq \mathcal{A}_\alpha \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}^{\otimes\lceil\frac{(n-1-p)m}{n}\rceil}, \quad \text{avec} \quad \alpha = -\frac{p+1}{n}.$$

Remarque II.3:

Plaçons nous de nouveau au voisinage d'un point $\tilde{o}$ de $X \bigcap H$ et appelons o son image dans S. Si $(dx_1, \ldots, x_d)$ est un système régulier de paramètres sur S au point o, nous pouvons noter $(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_d)$ un générateur du faisceau dualisant ω_S au point o.

Alors $(x_1, \ldots, x_d, z)$ est un système régulier de paramètres sur Z au point $\tilde{o}$, et comme le diviseur X est défini dans Z par $z^n - g$, avec $g \in \mathcal{O}_{S,o}$, le faisceau dualisant ω_X sur X admet comme générateur au point $\tilde{o}$ l'élément $\left(\dfrac{dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_d}{z^{n-1}}\right)$.

Comme nous pouvons considérer que (z^{1-n}) est le générateur du faisceau $\mathcal{L}^{\otimes n-1}$, nous retrouvons bien l'écriture précédente $\omega_X = \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_S} \left(\mathcal{L}^{\otimes n-1} \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S\right)$.

Pour tout entier k de $\mathbf{Z}$ et pour tout faisceau $\mathcal{F}$ sur Z, nous notons $\mathcal{F}(k)$ le nouveau faisceau sur Z égal à $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}(k)$.

Pour tout entier positif k, la section globale h^k du faisceau inversible $\mathcal{O}_Z(k)$ définit une application injective de $\mathcal{O}_Z$ dans $\mathcal{O}_Z(k)$ et nous voulons définir pour tout germe φ du faisceau $\mathcal{O}_Z$ un entier $\kappa = \kappa(\varphi)$ comme le plus petit entier $k \geq 0$ tel que le germe $h^k\varphi$ appartienne au sous-faisceau $\mathcal{A}_X(k)$, c'est à dire l'entier κ est défini par:

$$h^k\varphi \in \mathcal{A}_X(k) \Longleftrightarrow k \geq \kappa. \tag{2.13}$$

L'existence de l'entier $\kappa(\varphi)$ est une conséquence du résultat suivant.

Lemme II.1:
Tout germe φ de $\mathcal{O}_Z$ vérifie les deux propriétés:
(i) $h^k\varphi \in \mathcal{A}_X(k) \Longrightarrow h^{k+1}\varphi \in \mathcal{A}_X(k+1)$,
(ii) $\exists k \in \mathbf{N}$, tel que $h^k\varphi \in \mathcal{A}_X(k)$.

Démonstration:
La première propriété est évidente car le faisceau $\mathcal{A}_X$ est un idéal de $\mathcal{O}_Z$.

De même il suffit de montrer la deuxième propriété pour $\varphi = 1$, c'est à dire il suffit de montrer que pour k suffisamment grand, h^k appartient à l'idéal d'adjonction $\mathcal{A}_X$.

C'est équivalent à montrer que pour k suffisamment grand, le fermé F de Z défini par $\mathcal{A}_X$ est inclus dans le diviseur kH. Or nous savons que le sous espace réduit F_{red} est inclus dans $\mathrm{Sing}(X)_{\mathrm{red}}$, qui est lui même inclus dans H.

Grâce à l'isomorphisme ι entre H et S nous pouvons définir une application injective de $\mathcal{O}_H$ dans $\mathcal{O}_Z$, section de la surjection naturelle de $\mathcal{O}_Z$ dans $\mathcal{O}_H$. Nous pouvons ainsi considérer tout germe $\bar{\varphi}$ de $\mathcal{O}_H$ comme un germe de $\mathcal{O}_Z$ et définir l'entier $\kappa(\bar{\varphi})$.

Nous allons maintenant étudier l'entier $\kappa(\bar{\varphi})$ localement au voisinage d'un point singulier o de C et montrer que $\kappa(\bar{\varphi})$ dépend essentiellement de la singularité (C, o).

Si $\tilde{o}$ est un point de Z appartenant à H, et si o est son image dans S, l'anneau local $\mathcal{O}_{S,o}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{H,\tilde{o}}$, c'est à dire à l'anneau quotient $\mathcal{O}_{Z,\tilde{o}}/(z)$, où z est l'élément régulier de $\mathcal{O}_{Z,\tilde{o}}$ définissant H dans Z.

Soit f un élément de $\mathcal{O}_{S,o}$ définissant le germe d'hypersurface (C, o) à singularité isolée, et pour tout entier n, $n \geq 2$, nous appelons $X(n)$ le germe d'hypersurface de Z en $\tilde{o}$ défini par $z^n - f$.

Pour tout élément $\bar{\varphi}$ de $\mathcal{O}_{S,o}$ et pour tout entier n, nous considérons l'entier $\kappa = \kappa(\bar{\varphi}, n)$ défini comme précédemment par le revêtement cyclique $X(n)$ de S, c'est à dire défini par:

$$z^k\bar{\varphi} \in \mathcal{A}_{X(n)} \Longleftrightarrow k \geq \kappa(\bar{\varphi}, n), \tag{2.14}$$

où $\mathcal{A}_{X(n)}$ est l'idéal d'adjonction de $X(n)$ dans Z au point $\tilde{o}$.

Proposition II.3:
Soit $\beta_{C,o}(\bar{\varphi})$ le nombre rationnel défini en (1.3) à partir d'une résolution plongée de la singularité (C, o), alors pour tout entier $n \geq 2$, nous avons l'égalité:

$$\kappa(\bar{\varphi}, n) = \left[-n.\beta_{C,o}(\bar{\varphi})\right]. \tag{2.15}$$

Remarques II.4:
(i) Libgober démontre l'existence d'un entier β ne dépendant que de la singularité (C, o) vérifiant l'égalité $\kappa(\bar{\varphi}, n) = [n\beta]$ dans le cas où (C, o) est une singularité isolée non dégénérée par rapport à son polyhèdre de Newton (cf. [Li.2] Proposition 5.1).

Pour cela il utilise la description de l'idéal d'adjonction $\mathcal{A}_{X(n)}$ du revêtement cyclique $X(n)$ donnée dans ([Me.-Te.]), et en particulier le fait que $\mathcal{A}_{X(n)}$ est engendré par des monômes $x_1^{i_1}\dots x_d^{i_d}z^{i_{d+1}}$.

(ii) Loeser et l'auteur ont donné une démonstration de cette proposition pour une singularité isolée (C,o) quelconque.

Dans cette démonstration ils utilisent la définition du nombre $\beta_{C,o}$ à partir de la structure de Hodge sur la fibre de Milnor de la singularité (cf. [Lo.-Va.] Définition-Proposition 3.2 et Proposition 3.3).

Démonstration de la proposition II.3:

Grâce à la description de l'idéal d'adjonction donnée à la proposition II.2, nous trouvons l'équivalence:

$$z^k\bar{\varphi} \in \mathcal{A}_{X(n)} \Longleftrightarrow \bar{\varphi} \in \mathcal{I}_F^{(k)},$$

où l'idéal $\mathcal{I}_F^{(k)}$ de $\mathcal{O}_{S,o}$ est égal à l'idéal $\mathcal{A}_\alpha$ avec $\alpha = -\dfrac{k+1}{n}$.

En effet, comme nous nous plaçons au voisinage du point o de C, le diviseur L n'apparait pas.

Par définition de l'idéal $\mathcal{A}_\alpha$, le germe $\bar{\varphi}$ appartient à cet idéal si et seulement si le nombre $\beta_{C,o}(\bar{\varphi})$ est strictement plus grand que α.

Nous avons donc l'équivalence:

$$k \geq \kappa(\bar{\varphi},n) \Longleftrightarrow \beta_{C,o}(\bar{\varphi}) > -\frac{k+1}{n},$$

dont nous déduisons l'égalité voulue: $\kappa(\bar{\varphi},n) = \big[-n.\beta_{C,o}(\bar{\varphi})\big]$.

Nous allons maintenant reprendre la démonstration de Zariski dans [Za.3]. Pour trouver l'irrégularité q du revêtement cyclique X de $\mathbf{P}^2$, il considère pour certaines valeurs de v dans $\mathbf{Z}$ les faisceaux $\mathcal{A}_X(v)\otimes_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}\omega_{\mathbf{P}^3}$ sur $\mathbf{P}^3$, et il cherche à calculer les dimensions $\mathrm{h}^0\big(\mathbf{P}^3,\mathcal{A}_X(v)\otimes_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}\omega_{\mathbf{P}^3}\big)$ des espaces de leurs sections globales et leurs caractéristiques d'Euler-Poincaré $\chi\big(\mathbf{P}^3,\mathcal{A}_X(v)\otimes_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}\omega_{\mathbf{P}^3}\big)$.

Pour cela il a besoin d'introduire de nouveaux faisceaux $\mathcal{A}^{(d)}$ sur $\mathbf{P}^3$ définis à partir de l'idéal d'adjonction $\mathcal{A}_X$. Dans le cas plus général que nous regardons, nous allons définir de manière analogue des faisceaux $\mathcal{A}^{(d)}$ sur Z, et nous montrons comment nous pouvons les interpréter à partir des faisceaux $\mathcal{A}_\alpha$ définis par les exposants de Hodge.

Pour tout entier positif d, nous appelons $\mathcal{A}^{(d)}$ l'idéal de $\mathcal{O}_Z$ image réciproque du sous-faisceau $\mathcal{A}_X(d)$ de $\mathcal{O}_Z(d)$ par l'application injective de $\mathcal{O}_Z$ dans $\mathcal{O}_Z(d)$ définie par la section globale h^d. Nous pouvons noter: $\mathcal{A}^{(d)} = \big\{l \in \mathcal{O}_Z \;/\; h^d l \in \mathcal{A}_X(d)\big\}$.

En particulier, pour tout entier v, toute section globale s du faisceau $\mathcal{A}^{(d)}(v-d)$ définit un diviseur F sur Z appartenant au système linéaire $|(v-d)H|$ et tel que le diviseur $F+dH$ soit adjoint à la variété X.

Nous définissons le faisceau $\mathcal{B}^{(d)}$ comme la restriction au diviseur H du faisceau $\mathcal{A}^{(d)}$, c'est à dire le faisceau défini par la suite exacte suivante:

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^{(d+1)}(v-d-1) \xrightarrow{h} \mathcal{A}^{(d)}(v-d) \longrightarrow \mathcal{B}^{(d)}(v-d) \longrightarrow 0, \tag{2.16}$$

où nous notons h l'application définie grâce à la section globale h de $\mathcal{O}_Z(1)$.

Lemme II.2:

Le faisceau $\mathcal{B}^{(d)}$ est un faisceau d'idéaux du faisceau $\mathcal{O}_H$.

Démonstration:

Comme les faisceaux $\mathcal{A}^{(d+1)}$ et $\mathcal{A}^{(d)}$ sont des idéaux de $\mathcal{O}_Z$, il existe une application naturelle du faisceau $\mathcal{B}^{(d)}(v-d)$ dans $\mathcal{O}_H(v-d)$. Il faut montrer que cette application est injective.

Soit $\bar{\varphi}$ un germe de section du faisceau $\mathcal{B}^{(d)}(v-d)$ et soit φ un germe de section de $\mathcal{A}^{(d)}(v-d)$ dont l'image est égale à $\bar{\varphi}$. Il suffit de montrer que si l'image de $\bar{\varphi}$ dans $\mathcal{O}_H(v-d)$ est nulle, c'est à dire s'il existe un germe de section φ_1 de $\mathcal{O}_Z(v-d-1)$ tel que $\varphi = h\varphi_1$, alors $\bar{\varphi}$ est nul dans $\mathcal{B}^{(d)}(v-d)$, c'est à dire que le germe φ_1 appartient au sous-faisceau $\mathcal{A}^{(d+1)}(v-d-1)$.

Par définition des faisceaux d'idéaux $\mathcal{A}^{(d)}$ de $\mathcal{O}_Z$, nous avons:

$$\varphi \in \mathcal{A}^{(d)}(v-d) \Longrightarrow h^d\varphi \in \mathcal{A}_X(v) \Longrightarrow h^{d+1}\varphi_1 \in \mathcal{A}_X(v) \Longrightarrow \varphi_1 \in \mathcal{A}^{(d+1)}(v-d-1),$$

d'où le résultat.

Proposition II.4:

Pour tout entier $d \geq 0$ nous avons l'isomorphisme:

$$\mathcal{B}^{(d)} \simeq \mathcal{I}_F^{(d)} := \mathcal{A}_\alpha \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_S\big(-e(d)L\big)$$

$$\textit{avec} \quad \alpha = -\frac{d+1}{n} \quad \textit{et} \quad e(d) = \operatorname{Sup}\Big(0, \Big[\frac{(n-m)(n-d-1)}{n}\Big]\Big).$$

Démonstration:

Plaçons nous sur l'ouvert $Z^- = \operatorname{Spec}_S \bigoplus_{p\geq 0} \mathcal{L}^{\otimes -p}$ de Z. Alors pour tout $k \in \mathbf{Z}$, la restriction à Z^- du faisceau inversible $\mathcal{O}_Z(k)$ est isomorphe au faisceau $\bigoplus_{p\geq 0} \mathcal{L}^{\otimes k-p}$.

La section globale h de $\mathcal{O}_Z(1)$ définissant le diviseur H sur Z correspond à l'inclusion naturelle de $\mathcal{O}_Z(-1) = \bigoplus_{p\geq 1} \mathcal{L}^{\otimes -p}$ dans $\mathcal{O}_Z = \bigoplus_{p\geq 0} \mathcal{L}^{\otimes -p}$, et nous retrouvons ainsi l'isomorphisme entre $\mathcal{O}_H$ et $\mathcal{O}_S$.

Grâce à la proposition II.2, qui donne la restriction à Z^- de l'idéal $\mathcal{A}_X$, nous vérifions que pour tout entier $d \geq 0$ la restriction de l'idéal $\mathcal{A}^{(d)}$ à Z^- est égale à:

$$\mathcal{A}^{(d)} = \bigoplus_{p\geq 0} \mathcal{I}_F^{(p+d)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}^{\otimes -p}. \tag{2.17}$$

Le conoyau de l'application injective de $\mathcal{A}^{(d+1)}(-1)$ dans $\mathcal{A}^{(d)}$ définie par h est alors isomorphe à $\mathcal{I}_F^{(d)}$, et nous déduisons de la suite exacte (2.16) l'isomorphisme cherché entre les faisceaux $\mathcal{B}^{(d)}$ et $\mathcal{I}_F^{(d)}$.

Proposition II.5:

Pour tout entier $d \geq 0$ et pour tout entier v, nous avons des applications canoniques entre les espaces des sections globales:

$$\zeta : \mathrm{H}^0\big(Z, \mathcal{A}^{(d)}(v-d)\big) \longrightarrow \mathrm{H}^0\big(S, \mathcal{I}_F^{(d)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}^{\otimes v-d}\big),$$

$$\xi : \mathrm{H}^0\big(Z, \mathcal{A}^{(d)}(v-d) \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega_Z\big) \longrightarrow \mathrm{H}^0\big(S, \mathcal{I}_F^{(d)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}^{\otimes v-d-1} \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S\big).$$

Les applications ζ et ξ sont surjectives respectivement pour $v \geq d$ et pour $v \geq d+2$.

Démonstration:

Nous allons donner la démonstration de l'existence et de la surjectivité de l'application ξ, la démonstration pour l'application ζ est à peu près identique, en plus simple.

Nous déduisons de la proposition II.4 et de l'isomorphisme entre les faisceaux $\rho^*\big(\omega_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}\big) \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_Z(-2)$ et ω_Z l'isomorphisme:

$$\mathcal{B}^{(d)}(v-d) \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega_Z \simeq \mathcal{I}_F^{(d)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}^{\otimes v-d-1} \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S. \tag{2.18}$$

L'application ξ cherchée est obtenue alors à partir de l'application naturelle du faisceau $\mathcal{A}^{(d)}$ dans le faisceau $\mathcal{B}^{(d)}$.

Nous avons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}^0\big(Z, \mathcal{A}^{(d)}(v-d) \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega_Z\big) & \hookrightarrow & \mathrm{H}^0\big(Z, \mathcal{O}_Z(v-d) \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega_Z\big) \\
\downarrow \xi & & \downarrow \xi' \\
\mathrm{H}^0\big(S, \mathcal{I}_F^{(d)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}^{\otimes v-d-1} \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S\big) & \hookrightarrow & \mathrm{H}^0\big(S, \mathcal{L}^{\otimes v-d-1} \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S\big)
\end{array}$$

L'image directe par le morphisme ρ du faisceau $\mathcal{O}_Z(v-d)\otimes_{\mathcal{O}_Z}\omega_Z$ est isomorphe pour $v-d-2\geq 0$ au faisceau $\omega_S\otimes_{\mathcal{O}_S}\bigoplus_{p=0}^{v-d-2}\mathcal{L}^{\otimes p+1}$, d'où l'isomorphisme entre les espaces $\mathrm{H}^0\big(Z,\mathcal{O}_Z(v-d)\otimes_{\mathcal{O}_Z}\omega_Z\big)$ et $\bigoplus_{p=1}^{v-d-1}\mathrm{H}^0\big(S,\mathcal{L}^{\otimes p}\otimes_{\mathcal{O}_S}\omega_S\big)$.

L'application ξ' admet donc une section naturelle τ.

Pour montrer que l'application ξ est surjective, il suffit de montrer que pour toute section globale $\bar\varphi$ appartenant à $\mathrm{H}^0\big(S,\mathcal{I}_F^{(d)}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{L}^{\otimes v-d-1}\otimes_{\mathcal{O}_S}\omega_S\big)$, la section φ, image de $\bar\varphi$ dans $\mathrm{H}^0\big(Z,\mathcal{O}_Z(v-d)\otimes_{\mathcal{O}_Z}\omega_Z\big)$ par la section τ, appartient en fait au sous-espace $\mathrm{H}^0\big(Z,\mathcal{A}^{(d)}(v-d)\otimes_{\mathcal{O}_Z}\omega_Z\big)$. Ceci est évident par l'égalité (2.17) et car le faisceau d'idéaux $\mathcal{A}^{(d)}$ est égal au faisceau $\mathcal{O}_Z$ en dehors du diviseur H.

Remarque II.5:

Pour montrer comment les propositions II.4 et II.5 sont une généralisation des résultats de Zariski ([Za.3]), nous allons les formuler différemment.

Pour cela, nous allons introduire les notions suivantes.

(i) Un diviseur E sur S est de degré v s'il est défini par une section globale du faisceau $\mathcal{L}^{\otimes v}$, et de même un diviseur F sur $Z=\mathbf{P}(\mathcal{O}_S\oplus\mathcal{L})$ est de degré v s'il est défini par une section globale du faisceau $\mathcal{O}_Z(v)$.

(ii) Soit C un diviseur sur S, ayant uniquement des singularités isolées, alors pour tout nombre rationnel α, $-1\leq\alpha\leq 0$, nous définissons la notion d'adjonction avec exposant α de la manière suivante:

un diviseur E sur S est adjoint au diviseur C avec exposant α si pour tout point o appartenant au lieu singulier $\mathrm{Sing}(C)$ *de C, le diviseur E est défini au voisinage du point o par un élément $\bar\varphi$ de l'anneau local $\mathcal{O}_{S,o}$ vérifiant $\beta_{C,o}(\bar\varphi)>\alpha$.*

En particulier, comme le faisceau $\mathcal{A}_{-1}$ est égal à $\mathcal{O}_S$, tout diviseur E sur S est adjoint à C avec exposant -1, et comme le faisceau $\mathcal{A}_0$ est égal à l'idéal d'adjonction $\mathcal{A}_C$ de C dans S, un diviseur E est adjoint à C si et seulement si il est adjoint à C avec exposant 0.

Dans le cas où C est une courbe ayant pour seuls points singuliers des points doubles ordinaires et des points cuspidaux, un diviseur E sur la surface S est adjoint à C avec exposant $-1/6$ si et seulement si E passe par tous les points cuspidaux de C, c'est à dire avec la terminologie de Zariski, si et seulement si le diviseur E est pré-adjoint à C.

Nous pouvons donner la nouvelle formulation des propositions précédentes.

Propositions II.4 et II.5:

La trace sur le diviseur H de Z du système linéaire complet formé des diviseurs F de degré $v-d$ dans Z tels que $F+dH$ soit adjoint à X, est le système linéaire complet formés des diviseurs E sur $H=S$, de degré $v-d-e(d)$ et adjoints à C avec exposant α, où α est égal à $-\dfrac{d+1}{n}$.

Nous allons maintenant suivre les idées de Zariski, pour calculer dans le cas où la variété S est le plan projectif $\mathbf{P}^2$, c'est à dire le cas qu'il considère dans [Za.3], l'irrégularité q du revêtement cyclique X de S sans utiliser la variété $\bar X$ et le faisceau dualisant $\omega_{\bar X}$.

Nous montrerons ensuite comment il est possible de généraliser cette démonstration au cas d'une variété lisse projective S quelconque.

Pour tout entier d, $0\leq d\leq n$, où n est le degré du revêtement cyclique X de S, nous appellons r_d la caractéristique d'Euler-Poincaré du faisceau $\mathcal{A}^{(d)}(n-d)\otimes_{\mathcal{O}_Z}\omega_Z$:

$$r_d=\chi\big(Z,\mathcal{A}^{(d)}(n-d)\otimes_{\mathcal{O}_Z}\omega_Z\big).$$

Alors, grâce à la suite exacte (2.16) et à l'isomorphisme (2.18), nous trouvons pour tout d la nouvelle suite exacte:

$$0\longrightarrow\mathcal{A}^{(d+1)}(n-d-1)\otimes_{\mathcal{O}_Z}\omega_Z\longrightarrow\mathcal{A}^{(d)}(n-d)\otimes_{\mathcal{O}_Z}\omega_Z\longrightarrow\mathcal{I}_F^{(d)}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{L}^{\otimes n-d-1}\otimes_{\mathcal{O}_S}\omega_S\longrightarrow 0.$$

Nous en déduisons l'égalité $r_d - r_{d+1} = \chi\big(S, \mathcal{I}_F^{(d)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}^{\otimes n-d-1} \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S\big)$, d'où pour tout entier $m \geq 1$:

$$r_0 - r_m = \sum_{d=0}^{m-1} \chi\big(S, \mathcal{I}_F^{(d)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}^{\otimes n-d-1} \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S\big). \tag{2.19}$$

Comme le faisceau $\mathcal{A}^{(p)}$ est égal à $\mathcal{O}_Z$ pour $p \geq n-1$ (cf. Remarque II.2 (ii)), le faisceau $\mathcal{A}^{(n)}(0) \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega_Z$ est isomorphe au faisceau dualisant ω_Z et nous avons l'égalité:

$$r_n = \chi\big(Z, \mathcal{A}^{(n)}(0) \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega_Z\big) = \chi\big(Z, \omega_Z\big).$$

Par définition le faisceau $\mathcal{A}^{(0)}$ est égal à l'idéal d'adjonction $\mathcal{A}_X$ de X dans Z, et comme le diviseur X est de "degré" n, le faisceau $\mathcal{A}^{(0)}(n) \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega_Z$ est isomorphe à $\mathcal{A}_X \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega_Z(X)$.

Nous déduisons de la suite exacte définissant l'idéal d'adjonction (cf. (2.4)) que la caractéristique d'Euler-Poincaré du faisceau $\mathcal{A}_X \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega_Z(X)$ vérifie:

$$r_0 = \chi\big(Z, \mathcal{A}_X \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega_Z(X)\big) = \chi\big(Z, \omega_Z\big) + \chi\big(X, \pi_*(\omega_{\tilde{X}})\big).$$

D'après le théorème de Grauert-Riemenschneider, les faisceaux $\mathrm{R}^j\pi_*(\omega_{\tilde{X}})$ sont nuls pour $j \geq 1$, et les caractéristiques d'Euler-Poincaré des faisceaux $\pi_*(\omega_{\tilde{X}})$ sur X et $\omega_{\tilde{X}}$ sur $\tilde{X}$ sont égales.

Nous déduisons alors de ce qui précède l'égalité: $r_0 - r_n = \chi\big(\tilde{X}, \omega_{\tilde{X}}\big)$.

Grâce à l'égalité (2.19) pour $m = n$, et grâce à la proposition II.4 nous trouvons:

$$\chi\big(\tilde{X}, \omega_{\tilde{X}}\big) = \sum_{d=0}^{n-1} \chi\Big(S, \mathcal{A}_\alpha\big((n-d-1-e(d))L\big) \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S\Big), \quad \text{avec} \quad \alpha = -\frac{d+1}{n}.$$

En posant $p = n-1-d$ et en utilisant la définition de l'entier $e(d)$, nous avons alors:

$$\chi\big(\tilde{X}, \omega_{\tilde{X}}\big) = \sum_{p=0}^{n-1} \chi\Big(S, \mathcal{A}_\alpha\big(\Big\lceil \frac{mp}{n} \Big\rceil L\big) \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S\Big), \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{p}{n} - 1. \tag{2.20}$$

De la même manière, pour tout entier d, $0 \leq d \leq n$, nous appelons s_d la dimension de l'espace des sections globales du faisceau $\mathcal{A}^{(d)}(n-d) \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega_Z$, c'est à dire:

$$s_d = \mathrm{h}^0\big(Z, \mathcal{A}^{(d)}(n-d) \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega_Z\big).$$

Grâce à la suite exacte précédente et à la surjectivité de l'application ξ, nous avons l'égalité $s_d - s_{d+1} = \mathrm{h}^0\big(S, \mathcal{I}_F^{(d)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}^{\otimes n-d-1} \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S\big)$ pour $0 \leq d \leq n-2$, d'où pour tout entier m, $1 \leq m \leq n-1$:

$$s_0 - s_m = \sum_{d=0}^{m-1} \mathrm{h}^0\big(S, \mathcal{I}_F^{(d)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}^{\otimes n-d-1} \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S\big). \tag{2.21}$$

Nous déduisons de l'isomorphisme entre les faisceaux $\rho^*\big(\omega_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}\big) \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}_Z(-1)$ et $\mathcal{A}^{(n-1)}(1) \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega_Z$, et des égalités (2.1) et (2.2) que pour tout $j \geq 0$, les faisceaux images directes $\mathrm{R}^j\rho_*\big(\mathcal{A}^{(n-1)}(1) \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega_Z\big)$ sont nuls, d'où:

$$\mathrm{H}^j\big(Z, \mathcal{A}^{(n-1)}(1) \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega_Z\big) = 0 \quad \forall j \geq 0. \tag{2.22}$$

En particulier les entiers $s_{n-1} = \mathrm{h}^1\big(Z, \mathcal{A}^{(n-1)}(1) \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega_Z\big)$ et $r_{n-1} = \chi\big(Z, \mathcal{A}^{(n-1)}(1) \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega_Z\big)$ sont nuls.

De même nous déduisons des relations $\rho_*(\omega_Z) = 0$ et $\mathrm{R}^1\rho_*(\omega_Z) \simeq \omega_S$ l'égalité $\mathrm{H}^0(Z,\omega_Z) = 0$ et les isomorphismes $\mathrm{H}^j(Z,\omega_Z) \simeq \mathrm{H}^{j-1}(S,\omega_S)$ pour $1 \leq j \leq d+1$.

Si nous supposons que X est irréductible, l'application canonique de $\mathrm{H}^d\big(\tilde{X},\omega_{\tilde{X}}\big)$ dans $\mathrm{H}^{d+1}\big(Z,\omega_Z\big)$ est un isomorphisme et le groupe $\mathrm{H}^{d+1}\big(Z,\mathcal{A}_X \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega_Z(X)\big)$ est nul.

Nous en déduisons aussi la nouvelle suite exacte:

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^{d-1}(Z,\omega_Z) \longrightarrow \mathrm{H}^{d-1}\big(Z,\mathcal{A}_X \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega_Z(X)\big) \longrightarrow \mathrm{H}^{d-1}(\tilde{X},\omega_{\tilde{X}}) \\ \longrightarrow \mathrm{H}^d(Z,\omega_Z) \longrightarrow \mathrm{H}^d\big(Z,\mathcal{A}_X \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega_Z(X)\big) \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat qui généralise le théorème de Zariski ([Za.3] fin du paragraphe II, page 499), c'est à dire le corollaire I.1 pour $S = \mathbf{P}^2$ et $r = 1$.

Proposition II.6:

L'irrégularité q du revêtement cyclique X de degré n du plan projectif $\mathbf{P}^2$, ramifié au dessus de la courbe C et de la droite à l'infini L est égale à:

$$q := \dim \mathrm{H}^1\big(\tilde{X},\omega_{\tilde{X}}\big) = \sum_{p=0}^{n-1} \mathrm{h}^1\Big(\mathbf{P}^2, \mathcal{A}_\alpha\big(\Big\lceil\frac{pm}{n}\Big\rceil - 3\big)\Big) \quad \textit{avec} \quad \alpha = \frac{p}{n} - 1.$$

Démonstration:

Nous allons montrer que pour toute surface projective lisse S et pour tout d, $0 \leq d \leq n-2$, le groupe $\mathrm{H}^2\Big(S,\mathcal{I}_F^{(d)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}^{\otimes n-d-1} \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S\Big) = \mathrm{H}^2\Big(S,\mathcal{A}_\alpha\Big(\Big\lceil\frac{pm}{n}\Big\rceil L\Big) \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S\Big)$, avec $p = n-d-1$ et $\alpha = \frac{p}{n} - 1$, est nul.

Comme le fermé F_α de S défini par $\mathcal{A}_\alpha$ est inclus dans le lieu singulier de la courbe C, nous déduisons de la suite exacte suivante:

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_\alpha \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S\Big(\Big\lceil\frac{pm}{n}\Big\rceil L\Big) \longrightarrow \omega_S\Big(\Big\lceil\frac{pm}{n}\Big\rceil L\Big) \longrightarrow \mathcal{O}_{F_\alpha} \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S\Big(\Big\lceil\frac{pm}{n}\Big\rceil L\Big) \longrightarrow 0$$

un isomorphisme entre les groupes $\mathrm{H}^2\Big(S,\mathcal{A}_\alpha \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S\Big(\Big\lceil\frac{pm}{n}\Big\rceil L\Big)\Big)$ et $\mathrm{H}^2\Big(S,\omega_S\Big(\Big\lceil\frac{pm}{n}\Big\rceil L\Big)\Big)$.

Ce groupe est nul car le diviseur L est très ample sur la surface S et car $\Big\lceil\frac{pm}{n}\Big\rceil$ est strictement positif. Nous avons alors pour $0 \leq d \leq n-2$:

$$\mathrm{h}^0\big(S,\mathcal{I}_F^{(d)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}^{\otimes n-d-1} \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S\big) - \chi\big(S,\mathcal{I}_F^{(d)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}^{\otimes n-d-1} \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S\big) = \mathrm{h}^1\big(S,\mathcal{I}_F^{(d)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}^{\otimes n-d-1} \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S\big).$$

Nous déduisons de la nullité des groupes $\mathrm{H}^j\big(Z,\mathcal{A}^{(n-1)}(1) \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega_Z\big)$ (cf (2.22)) que la différence $s_0 - r_0$ est égale à $(s_0 - s_{n-1}) - (r_0 - r_{n-1})$, c'est à dire d'après les relations (2.19) et (2.21) et d'après l'égalité précédente:

$$s_0 - r_0 = \sum_{d=0}^{n-2} \mathrm{h}^1\big(S,\mathcal{I}_F^{(d)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}^{\otimes n-d-1} \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S\big).$$

Nous pouvons encore écrire cette égalité sous la forme:

$$\mathrm{h}^0\big(Z,\mathcal{A}_X \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega_Z(X)\big) - \chi\big(Z,\mathcal{A}_X \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega_Z(X)\big) + \mathrm{h}^1(S,\omega_S) = \sum_{d=0}^{n-1} \mathrm{h}^1\big(S,\mathcal{I}_F^{(d)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}^{\otimes n-d-1} \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S\big).$$

Si l'application de $\mathrm{H}^1(Z,\omega_Z)$ dans $\mathrm{H}^1\big(Z,\mathcal{A}_X \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega_Z(X)\big)$ déduite du diagramme (2.4) est nulle, le nombre $\mathrm{h}^0\big(Z,\mathcal{A}_X \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega_Z(X)\big) - \chi\big(Z,\mathcal{A}_X \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega_Z(X)\big)$ est égal à la différence $\mathrm{h}^1(\tilde{X},\omega_{\tilde{X}}) - \mathrm{h}^2(Z,\omega_Z)$, c'est à dire à $\mathrm{h}^1(\tilde{X},\omega_{\tilde{X}}) - \mathrm{h}^1(S,\omega_S)$.

Nous déduisons alors de l'égalité précédente la relation:

$$(2.23)\quad q=\sum_{d=0}^{n-1}\mathrm{h}^1\big(S,\mathcal{I}_F^{(d)}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{L}^{\otimes n-d-1}\otimes_{\mathcal{O}_S}\omega_S\big)=\sum_{p=0}^{n-1}\mathrm{h}^1\big(S,\mathcal{A}_\alpha\otimes_{\mathcal{O}_S}\omega_S\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{L}^{\otimes\lceil\frac{pm}{n}\rceil}\big),\quad \text{avec}\quad \alpha=\frac{p}{n}-1.$$

C'est le cas en particulier si la variété S est le plan projectif $\mathbf{P}^2$ car nous avons alors $\mathrm{H}^1(Z,\omega_Z)\simeq\mathrm{H}^0\big(\mathbf{P}^2,\omega_{\mathbf{P}^2}\big)=0$. Comme le faisceau ample $\mathcal{L}$ est le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1)$ et comme le faisceau dualisant ω_S est égal à $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-3)$, nous trouvons le résultat cherché.

Pour retrouver le corollaire I.1 dans le cas où la variété S est une variété lisse projective quelconque, de dimension $d\geq 2$, nous devons utiliser l'isomorphisme entre les faisceaux $\pi_*(\omega_{\tilde{X}})$ et $\bar{\sigma}_*(\omega_{\bar{X}})$, et plus précisément l'isomorphisme:

$$\rho_*\pi_*(\omega_{\tilde{X}})\simeq\sigma_*\bar{\psi}_*(\omega_{\bar{X}})\simeq\bigoplus_{p=0}^{n-1}\sigma_*\Big(\omega_{\tilde{S}}\otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}}\mathcal{L}^{[p]}\Big).$$

Lemme II.3:
Pour tout entier $j\geq 0$ nous avons l'égalité:

$$\mathrm{h}^j(\tilde{X},\omega_{\tilde{X}})=\mathrm{h}^j(S,\omega_S)+\mathrm{h}^j\big(Z,\mathcal{A}_X\otimes_{\mathcal{O}_Z}\omega_Z(X)\big).$$

Démonstration:
Nous déduisons du diagramme (2.4) la suite exacte:

$$0\longrightarrow\rho_*\big(\mathcal{A}_X\otimes_{\mathcal{O}_Z}\omega_Z(X)\big)\longrightarrow\rho_*\pi_*(\omega_{\tilde{X}})\longrightarrow\mathrm{R}^1\rho_*(\omega_Z)\longrightarrow\mathrm{R}^1\rho_*\big(\mathcal{A}_X\otimes_{\mathcal{O}_Z}\omega_Z(X)\big)\longrightarrow 0.$$

L'application $\rho_*\pi_*(\omega_{\tilde{X}})\longrightarrow\mathrm{R}^1\rho_*(\omega_Z)$ correspond grâce à l'isomorphisme précédent à la projection du faisceau $\bigoplus_{p=0}^{n-1}\sigma_*\big(\omega_{\tilde{S}}\otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}}\mathcal{L}^{[p]}\big)$ sur le facteur direct $\sigma_*\big(\omega_{\tilde{S}}\otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}}\mathcal{L}^{[0]}\big)=\omega_S\simeq\mathrm{R}^1\rho_*(\omega_Z)$.

En effet il suffit de remarquer que l'application $\rho_*(\omega_X)\longrightarrow\mathrm{R}^1\rho_*(\omega_Z)$ déduite de la suite exacte d'adjonction correspond à la projection de $\rho_*(\omega_X)=\bigoplus_{p=0}^{n-1}\big(\omega_S\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{L}^{\otimes p}\big)$ sur le facteur direct $\omega_S\simeq\mathrm{R}^1\rho_*(\omega_Z)$, et que l'application de $\pi_*(\omega_{\tilde{X}})$ dans ω_X induit une bijection du facteur direct $\sigma_*\big(\omega_{\tilde{S}}\otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}}\mathcal{L}^{[0]}\big)$ de $\rho_*\pi_*(\omega_{\tilde{X}})$ dans le facteur direct ω_S de $\rho_*(\omega_X)$.

Nous déduisons de ce qui précède que l'image directe $\rho_*\big(\mathcal{A}_X\otimes_{\mathcal{O}_Z}\omega_Z(X)\big)$ est isomorphe au faisceau $\bigoplus_{p=1}^{n-1}\sigma_*\big(\omega_{\tilde{S}}\otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}}\mathcal{L}^{[p]}\big)$ et que l'image directe supérieure $\mathrm{R}^1\rho_*\big(\mathcal{A}_X\otimes_{\mathcal{O}_Z}\omega_Z(X)\big)$ est nulle.

Nous trouvons ainsi une suite exacte scindée de faisceaux sur S:

$$0\longrightarrow\rho_*\big(\mathcal{A}_X\otimes_{\mathcal{O}_Z}\omega_Z(X)\longrightarrow\rho_*\pi_*(\omega_{\tilde{X}})\longrightarrow\mathrm{R}^1(\omega_Z)\longrightarrow 0,$$

dont nous déduisons l'égalité $\mathrm{h}^j(\tilde{X},\omega_{\tilde{X}})=\mathrm{h}^{j+1}(Z,\omega_Z)+\mathrm{h}^j\big(Z,\mathcal{A}_X\otimes_{\mathcal{O}_Z}\omega_Z(X)\big)$.

En utilisant l'isomorphisme entre les groupes $\mathrm{H}^j(S,\omega_S)$ et $\mathrm{H}^{j+1}(Z,\omega_Z)$ nous trouvons pour tout entier $j\geq 0$ l'égalité cherchée.

Nous avons aussi besoin d'un résultat qui généralise la proposition II.5 à tous les groupes de cohomologie.

Lemme II.4:
L'application $\xi\colon\mathrm{H}^j\big(Z,\mathcal{A}^{(d)}(n-d)\otimes_{\mathcal{O}_Z}\omega_Z\big)\longrightarrow\mathrm{H}^j\big(S,\mathcal{I}_F^{(d)}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{L}^{\otimes n-d-1}\otimes_{\mathcal{O}_S}\omega_S\big)$ est surjective pour tout $j\geq 0$ et pour tout d, $0\leq d\leq n-2$.

Démonstration:
L'application ξ est définie grâce à la suite exacte de faisceaux sur Z:

$$0\longrightarrow\mathcal{A}^{(d+1)}(n-d-1)\otimes_{\mathcal{O}_Z}\omega_Z\longrightarrow\mathcal{A}^{(d)}(n-d)\otimes_{\mathcal{O}_Z}\omega_Z\longrightarrow\mathcal{I}_F^{(d)}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{L}^{\otimes n-d-1}\otimes_{\mathcal{O}_S}\omega_S\longrightarrow 0.$$

Pour calculer l'image directe par ρ des faisceaux $\mathcal{A}^{(d)}(v-d)\otimes_{\mathcal{O}_Z}\omega_Z \simeq \mathcal{A}^{(d)}(v-d-2)\otimes_{\mathcal{O}_Z}\rho^*\big(\omega_S\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{L}\big)$, nous allons utiliser la description de Z comme réunion des deux ouverts Z^+ et Z^- (2.5).

Comme l'idéal d'adjonction $\mathcal{A}_X$ est égal à $\mathcal{O}_Z$ en dehors du diviseur H la restriction de $\mathcal{A}^{(d)}(u)$ à l'ouvert Z^+ est isomorphe à $\bigoplus_{p\geq 0}\mathcal{L}^{\otimes p}$, et d'après l'égalité (2.17) sa restriction à l'ouvert Z^- est isomorphe à $\bigoplus_{q\leq 0}\mathcal{I}_F^{(-q+d)}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{L}^{\otimes q+u}$.

Nous en déduisons l'image directe du faisceau $\mathcal{A}^{(d)}(u)$ par le morphisme ρ:

$$\rho_*\big(\mathcal{A}^{(d)}(u)\big)=\bigoplus_{p=0}^{u}\mathcal{I}_F^{(p+d)}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{L}^{\otimes u-p}\quad \text{pour}\quad u\geq 0,$$
$$\rho_*\big(\mathcal{A}^{(d)}(u)\big)=0\quad\text{pour}\quad u<0.$$

La section h de $\mathcal{O}_Z(1)$ définit une application de $\mathcal{A}^{(d+1)}(u-1)$ dans $\mathcal{A}^{(d)}(u)$, qui est une bijection sur l'ouvert Z^+ et qui correspond sur l'ouvert Z^- à l'inclusion naturelle de $\bigoplus_{p\geq 0}\mathcal{I}_F^{(p+1+d)}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{L}^{\otimes u-p-1}$ dans $\bigoplus_{p\geq 0}\mathcal{I}_F^{(p+d)}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{L}^{\otimes u-p}$.

Par image directe nous en déduisons pour tout entier $u\geq 0$ une suite exacte scindée:

$$0\longrightarrow \rho_*\big(\mathcal{A}^{(d+1)}(u-1)\big)\longrightarrow \rho_*\big(\mathcal{A}^{(d)}(u)\big)\longrightarrow \mathcal{I}_F^{(d)}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{L}^{\otimes u}\longrightarrow 0,$$

et un isomorphisme entre les faisceaux $\mathrm{R}^1\rho_*\big(\mathcal{A}^{(d+1)}(u-1)\big)$ et $\mathrm{R}^1\rho_*\big(\mathcal{A}^{(d)}(u)\big)$.

Nous trouvons alors que pour tout entier $d\leq n-2$ le faisceau $\mathrm{R}^1\rho_*\big(\mathcal{A}^{(d)}(n-d-2)\big)$ est isomorphe au faisceau image directe $\mathrm{R}^1\rho_*\big(\mathcal{A}^{(n-1)}(-1)\big)$ qui est nul car $\mathcal{A}^{(n-1)}$ est égal à $\mathcal{O}_Z$, d'où:

$$\mathrm{R}^1\rho_*\big(\mathcal{A}^{(d)}(n-d-2)\big)=0\qquad \forall d,\ 0\leq d\leq n-1.$$

Nous déduisons de ce qui précède la suite exacte:

$$\begin{aligned}0\longrightarrow \mathrm{H}^j\big(Z,\mathcal{A}^{(d+1)}(n-d-1)\otimes_{\mathcal{O}_Z}\omega_Z\big)\longrightarrow \mathrm{H}^j\big(Z,\mathcal{A}^{(d)}(n-d)\otimes_{\mathcal{O}_Z}\omega_Z\big)\\ \longrightarrow \mathrm{H}^j\big(S,\mathcal{I}_F^{(d)}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{L}^{\otimes n-d-1}\otimes_{\mathcal{O}_S}\omega_S\big)\longrightarrow 0,\end{aligned}$$

pour tout entier $j\geq 0$ et pour tout d vérifiant $0\leq d\leq n-2$.

Nous appelons s_d^j la dimension du groupe de cohomologie $\mathrm{H}^j\big(\mathcal{A}^{(d)}(n-d)\otimes_{\mathcal{O}_Z}\omega_Z\big)$, c'est à dire:

$$s_d^j=\mathrm{h}^j\big(Z,\mathcal{A}^{(d)}(n-d)\otimes_{\mathcal{O}_Z}\omega_Z\big).$$

Avec les notations précédentes nous avons $r_d=\displaystyle\sum_{j=0}^{\dim(Z)}(-1)^j s_d^j$ et $s_d=s_d^0$.

Grâce au lemme II.4 nous avons pour tout j et pour tout d, $0\leq d\leq n-2$, l'égalité $s_d^j-s_{d+1}^j=\mathrm{h}^j\big(S,\mathcal{I}_F^{(d)}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{L}^{\otimes n-d-1}\otimes_{\mathcal{O}_S}\omega_S\big)$, d'où pour tout entier m, $1\leq m\leq n-1$:

$$s_0^j-s_m^j=\sum_{d=0}^{m-1}\mathrm{h}^j\big(S,\mathcal{I}_F^{(d)}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{L}^{\otimes n-d-1}\otimes_{\mathcal{O}_S}\omega_S\big).$$

Par définition le nombre s_0^j est égal à $\mathrm{h}^j\big(Z,\mathcal{A}_X\otimes_{\mathcal{O}_Z}\omega_Z(X)\big)$, et le nombre s_{n-1}^j est nul (2.22). Nous déduisons alors de l'égalité précédente pour $m=n-1$:

$$\mathrm{h}^j\big(Z,\mathcal{A}_X\otimes_{\mathcal{O}_Z}\omega_Z(X)\big)=\sum_{d=0}^{n-2}\mathrm{h}^j\big(S,\mathcal{I}_F^{(d)}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{L}^{\otimes n-d-1}\otimes_{\mathcal{O}_S}\omega_S\big).$$

Grâce au lemme II.3, en ajoutant $\mathrm{h}^j(S,\omega_S)$ au deux termes de l'égalité précédente nous trouvons:

$$\mathrm{h}^j(\tilde{X},\omega_{\tilde{X}}) = \sum_{d=0}^{n-1} \mathrm{h}^j\big(S,\mathcal{I}_F^{(d)} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}^{\otimes n-d-1} \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S\big),$$

d'où la proposition suivante.

Proposition II.7:

$$\dim \mathrm{H}^j(\tilde{X},\omega_{\tilde{X}}) = \sum_{p=0}^{n-1} \mathrm{h}^j\big(S,\mathcal{A}_\alpha \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}^{\otimes\lceil\frac{pm}{n}\rceil} \otimes_{\mathcal{O}_S} \omega_S\big), \quad \textit{avec} \quad \alpha = \frac{p}{n} - 1.$$

Nous voulons maintenant obtenir une généralisation du théorème d'annulation de Zariski (fin du paragraphe III.7, page 503 de [Za.3]), c'est à dire démontrer les propositions I.2 et I.3 dans le cas où la variété S est le plan projectif complexe $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ en utilisant la méthode de Zariski.

Dans la suite nous supposons que S est le plan projectif $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ et que C est une courbe irréductible de degré m sur $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$.

Nous pouvons alors utiliser le résultat d'annulation suivant:

Théorème: ([Za.2])

Soit C une courbe irréductible du plan projectif complexe $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ et soit X le revêtement cyclique de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ ramifié au dessus de la courbe C et de la droite à l'infini L.

Si le degré n du revêtement est de la forme $n = r^\alpha$, avec r un nombre premier, l'irrégularité q du revêtement est nulle.

Remarque II.6:

Pour démontrer les propositions I.2 et I.3, nous avons utilisé la théorie de Hodge et un théorème d'annulation pour les groupes de cohomologie singulière $\mathrm{H}^j(U,\mathbf{C})$ *si* U *est un ouvert affine complexe de dimension* $d < j$.

Dans ce paragraphe, pour avoir des résultats d'annulation analogues, nous utilisons le théorème précédent qui est de nature topologique.

Nous reprenons les notations précédentes, pour tout nombre α, $-1 \leq \alpha \leq 0$, nous appelons $\mathcal{A}_\alpha$ le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_S$ défini par:

$$\mathcal{A}_\alpha = \big\{\varphi \;/\; \forall x \in \mathrm{Sing}(C) \quad \beta_{C,x}(\varphi) > \alpha\big\}.$$

Les faisceaux $\mathcal{A}_\alpha$ vérifient les propriétés suivantes:

i) $\alpha \geq \beta \Longrightarrow \mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{A}_\beta$, en particulier pour tout nombre α, $-1 \leq \alpha \leq 0$, nous avons $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{A}_{-1}$, où le faisceau $\mathcal{A}_0$ est l'idéal d'adjonction $\mathcal{A}_C$ de la courbe C dans S et où le faisceau $\mathcal{A}_{-1}$ est égal à $\mathcal{O}_S$.

ii) pour $\alpha > \beta$, les faisceaux $\mathcal{A}_\alpha$ et $\mathcal{A}_\beta$ sont différents si et seulement si il existe un point x de $\mathrm{Sing}(C)$ et un germe φ de $\mathcal{O}_{S,x}$ vérifiant $\alpha \geq \beta_{C,x}(\varphi) > \beta$, c'est à dire si et seulement si $Sp(C) \bigcap [\alpha,\beta[\neq \emptyset$, où $Sp(C)$ le spectre singulier de la courbe C.

Dans la suite nous appelons (α_j) les éléments de $Sp(C)$ compris entre -1 et 0, plus précisément nous posons $-1 = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{r-1} < \alpha_r = 0$, où $\alpha_r = 0$ appartient à $Sp(C)$ si et seulement si au moins une des singularités de C n'est pas irréductible.

Les exposants α_j sont des nombres rationnels et pour tout j, $0 \leq j \leq r$, nous posons $\alpha_j = \dfrac{p_j}{q_j} - 1$, avec $p_j \geq 0$, $q_j > 0$ et p_j et q_j premiers entre eux.

Nous déduisons de la propriété (ii) des faisceaux $\mathcal{A}_\alpha$ la relation suivante:

$$\alpha_{j-1} \leq \alpha < \alpha_j \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A}_{\alpha_{j-1}}.$$

Alors, d'après la proposition II.6, l'irrégularité q du revêtement cyclique X de degré n de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ ramifié au dessus de C, est égale à:

$$q = \sum_{j=1}^{r} \Bigg(\sum_{p_{j-1} \leq p < p_j} \mathrm{h}^1 \Big(\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}, \mathcal{A}_{\alpha_{j-1}} \big(\Big\lceil \frac{pm}{n} \Big\rceil - 3 \big) \Big) \Bigg) \quad \text{avec} \quad p_j = n(\alpha_j + 1). \tag{2.24}$$

Lemme II.5:

Soit C une courbe plane projective complexe irréductible de degré m, et soit α un nombre compris entre -1 et 0, alors il existe un entier v vérifiant la propriété suivante:

$$\mathrm{H}^1 \big(\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}, \mathcal{A}_\alpha (m - 3 - k) \big) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad k \geq v.$$

De plus l'entier v est strictement positif.

Démonstration:

Pour tout entier u, nous avons une inclusion du faisceau $\mathcal{A}_\alpha(u)$ dans $\mathcal{A}_\alpha(u+1)$ telle que le support du conoyau soit de dimension nulle, d'où la relation:

$$\mathrm{H}^1 \big(\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}, \mathcal{A}_\alpha(u) \big) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{H}^1 \big(\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}, \mathcal{A}_\alpha(u+1) \big) = 0,$$

ce qui donne l'existence de l'entier v.

Comme l'idéal d'adjonction $\mathcal{A}_C$ C est inclus dans le faisceau $\mathcal{A}_\alpha$, avec un conoyau inclus dans $\mathrm{Sing}(C)$, nous déduisons du théorème de régularité de l'adjointe, c'est à dire de la nullité de $\mathrm{H}^1 \big(\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}, \mathcal{A}_C(m-3) \big)$, la nullité du groupe $\mathrm{H}^1 \big(\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}, \mathcal{A}_\alpha(m-3) \big)$.

Nous en déduisons que l'entier v est strictement positif.

Pour tout exposant α_j appartenant à $Sp(C)$, avec $-1 \leq \alpha_j \leq 0$, nous appelons v_j l'entier défini grâce au lemme II.5, c'est à dire l'entier vérifiant:

$$\mathrm{H}^1 \big(\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}, \mathcal{A}_{\alpha_j} (m - 3 - k) \big) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad k \geq v_j. \tag{2.25}$$

Comme $\mathcal{A}_{\alpha_j}$ est inclus $\mathcal{A}_{\alpha_{j-1}}$, nous avons pour tout u l'implication suivante:

$$\mathrm{H}^1 \big(\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}, \mathcal{A}_{\alpha_j}(u) \big) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{H}^1 \big(\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}, \mathcal{A}_{\alpha_{j-1}}(u) \big) = 0,$$

d'où l'inégalité: $v_{j-1} \geq v_j$.

Nous déduisons de l'égalité (2.24) que l'irrégularité q du revêtement cyclique est non nulle si et seulement si il existe un exposant α_j et un entier p, $0 \leq p \leq n-1$, vérifiant:

$$\alpha_j \leq \frac{p}{n} - 1 < \alpha_{j+1} \quad \text{et} \quad \Big\lceil \frac{pm}{n} \Big\rceil \leq m - v_j.$$

Proposition II.8:

Pour tout exposant α_j appartenant au spectre singulier de la courbe C, l'entier v_j défini précédemment vérifie l'inégalité:

$$-m\alpha_j \leq v_j. \tag{2.26}$$

Démonstration:

Supposons qu'il existe un exposant α_j tel que $-m\alpha_j > v_j$. Nous pouvons alors trouver un nombre premier n et un entier p, $0 \leq p \leq n-1$, qui vérifient les inégalités:

$$\alpha_j \leq \frac{p}{n} - 1 < \alpha_{j+1} \quad \text{et} \quad v_j < -m\Big(\frac{p}{n} - 1\Big).$$

De la première relation nous déduisons que les faisceaux $\mathcal{A}_\alpha$ et $\mathcal{A}_{\alpha_j}$ sont égaux pour $\alpha = \dfrac{p}{n} - 1$. De la deuxième relation nous déduisons l'inégalité $\left\lceil \dfrac{pm}{n} \right\rceil \leq m - v_j$, donc d'après (2.25) que le groupe $\mathrm{H}^1\Big(\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}, \mathcal{A}_\alpha\big(\left\lceil \dfrac{pm}{n} \right\rceil\big)\Big)$ est non nul.

L'irrégularité q du revêtement cyclique de degré n de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ est alors non nulle, ce qui est impossible pour n premier d'après le théorème d'annulation de Zariski.

Nous allons maintenant montrer comment retrouver les propositions I.2 et I.3 dans le cas d'une courbe complexe irréductible C de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ et pour $r = 1$.

Proposition II.9:
L'irrégularité q du revêtement cyclique X de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ ramifié au dessus de la courbe C et de la droite à l'infini L est non nulle si et seulement si il existe un exposant α_j, $\alpha_j = \dfrac{p_j}{q_j} - 1$ avec p_j et q_j premiers entre eux, appartenant au spectre singulier $Sp(C)$ qui vérifie les deux propriétés suivantes:
1) $-m\alpha_j = v_j$, en particulier le dénominateur q_j doit diviser le degré m de C;
2) le dénominateur q_j divise le degré n du revêtement cyclique X.

Démonstration:
L'irrégularité q du revêtement est non nulle si et seulement si il existe un exposant α_j et un entier p, $0 \leq p \leq n-1$, tels que le groupe $\mathrm{H}^1\Big(\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}, \mathcal{A}_{\alpha_j}\big(\left\lceil \dfrac{pm}{n} \right\rceil - 3\big)\Big)$ soit non nul.

Par définition de l'entier v_j, ce groupe est non nul si et seulement si nous avons l'inégalité $\left\lceil \dfrac{pm}{n} \right\rceil \leq m - v_j$. Nous avons alors les relations:

$$(\alpha_j + 1)m \leq \frac{pm}{n} \leq \left\lceil \frac{pm}{n} \right\rceil \leq m - v_j.$$

Nous déduisons de la propositions II.8 que toutes ces inégalités sont en fait des égalités, d'où $v_j = -m\alpha_j$ et $\alpha_j = \dfrac{p}{n} - 1$.

III Polynôme d'Alexander:

Pour déduire des résultats précédents sur l'irrégularité q des revêtements cycliques de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$, des informations sur le groupe fondamental $\pi_1(\bar{Y})$ du complémentaire de la courbe C dans $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$, nous devons introduire le polynôme d'Alexander $\Delta_C(t)$.

Nous renvoyons aux articles de Libgober ([Li.1] et [Li.2]) et de Loeser et l'auteur ([Lo.-Va.]) pour la définition du polynôme d'Alexander d'une courbe plane C.

Rappelons le théorème 4.1 de [Lo.-Va.] qui donne le polynôme d'Alexander $\Delta_C(t)$ d'une courbe C en fonction de la dimension des groupes de cohomologie des faisceaux $\mathcal{A}_\alpha(\mu)$.

Soit C une courbe de degré m du plan projectif $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$, ayant r composantes irréductibles, et soit A_C la partie du spectre singulier de la courbe C comprise entre -1 et 0 et incluse dans $(1/m)\mathbf{Z}$, c'est à dire $A_C = \big\{\alpha \in Sp(C) / -1 < \alpha < 0 \text{ et } m\alpha \in \mathbf{Z}\big\}$, nous avons alors:

$$\Delta_C(t) = (t-1)^{r-1} \prod_{\alpha \in A_C} \big(\Delta_\alpha(t)\big)^{l_\alpha},$$

où les polynômes Δ_α et les entiers l_α sont définis par les formules suivantes:

$$\Delta_\alpha(t) = \big(t - \exp(2\pi i\alpha)\big)\big(t - \exp(-2\pi i\alpha)\big) \quad \text{et} \quad l_\alpha = \dim \mathrm{H}^1\Big(\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}, \mathcal{A}_\alpha\big(m(\alpha+1) - 3\big)\Big).$$

Le polynôme d'Alexander Δ_C détermine l'irrégularité de tout revêtement cyclique X de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ ramifié au dessus de $C \bigcup L$.

Proposition III.1:

L'irrégularité q du revêtement cyclique X de degré n du plan projectif $\mathbf{P}^2$, ramifié au dessus de la courbe C et de la droite à l'infini L est égale à:

$$q = \sum_{\alpha \in A_C(n)} l_\alpha,$$

avec $A_C(n) = \{\alpha \in Sp(C) / -1 < \alpha < 0 \text{ , } m\alpha \in \mathbf{Z} \text{ et } n\alpha \in \mathbf{Z}\} = A_C \bigcap \frac{1}{n}\mathbf{Z}.$

Démonstration:

D'après les propositions I.2 et I.3, ou la proposition II.8 dans le cas où la courbe C est irréductible, nous savons que le groupe $\mathrm{H}^1\big(\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}, \mathcal{A}_\alpha(\lceil m(\alpha+1)\rceil - 3)\big)$ est nul si le nombre α n'appartient pas au spectre singulier $Sp(C)$ de C ou si α ne vérifie pas $m\alpha \in \mathbf{Z}$ et $n\alpha \in \mathbf{Z}$.

Par conséquent les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^1\Big(\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}, \mathcal{A}_\alpha\big(\lceil m(\alpha+1)\rceil - 3\big)\Big)$ sont nuls pour $\alpha \notin A_C(n)$, et nous déduisons la proposition III.1 de la proposition II.6.

Nous pouvons maintenant montrer le résultat annoncé à la fin de l'introduction, et qui généralise au cas d'une courbe non irréductible un théorème de Zariski (fin du paragraphe IV.9, page 509 de [Za.3]).

Proposition III.2:

Si le groupe fondamental du complémentaire de la courbe C dans $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ est commutatif, l'irrégularité de tout revêtement cyclique de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}$ ramifié au dessus de C et d'une droite à l'infini L transverse à C, est nulle.

Démonstration:

Si le groupe fondamental $\pi_1\big(\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}} \setminus C\big)$ est commutatif alors le polynôme d'Alexander $\Delta_C(t)$ de la courbe C est égal à $(t-1)^{r-1}$ (Remarque (3), page 165 de [Lo.-Va.]).

D'après le théorème 4.1 de [Lo.-Va.] nous en déduisons que pour tout α appartenant à A_C nous avons: $\mathrm{H}^1\big(\mathbf{P}^2_{\mathbf{C}}, \mathcal{A}_\alpha(m(\alpha+1) - 3)\big) = 0$, d'où le résultat.

Bibliographie:

[De.]: P. Deligne, Théorie de Hodge, II et III, Publ. Math. I.H.E.S. 40 (1971), 5-58 et 44 (1975), 5-77.

[Dm.]: M. Demazure, Anneaux gradués normaux, Introduction à la théorie des singularités I, Méthodes algébriques et géométriques, Travaux en cours 37 (1988), 35-69.

[En.]: F. Enriques, Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili posse- denti una data curva di diramazione, Ann. di mat. pura ed appl. 4 (1923), 185-198.

[Es.]: H. Esnault, Fibre de Milnor d'un cône sur une courbe plane singulière, Invent. Math. 68 (1982), 477-496.

[Es.-Vi.1]: H. Esnault et E. Viehweg, Revêtements cycliques, Algebraic threefolds, Proceedings Varenna 1981, Lect. Notes Math. 947 (1982), 241-250.

[Es.-Vi.2]: H. Esnault et E. Viehweg, Logarithmic De Rham complexes and vanishing theorems, Invent. Math. 86 (1986), 161-194.

[Li.1]: A. Libgober, Alexander polynomial of plane algebraic curves and cyclic multiple planes, Duke Math. J. 49 (1982), 833-851.

[Li.2]: A. Libgober, Alexander invariants of plane algebraic curves, Proc. Symp. Pure Math. 40 (1983), Part 2, 135-143.

[Lo.-Va.]: F. Loeser et M. Vaquié, Le polynôme d'Alexander d'une courbe plane projective, Topology 29 (1990), 163-173.

[Me.Te.]: M. Merle et B. Teissier,Condition d'adjonction, d'après Duval, Séminaire sur les Singularités des Surfaces, Lect. Notes Math. 777 (1980), 229-245.

[Va.]: M. Vaquié, Irrégularité des revêtements cycliques des surfaces projectives non singulières, Am. J. Math. 114 (1992), 1187-1199.

[Vr.1]: A. Varchenko, The asymptotics of holomorphic forms determine a mixed Hodge structure, Soviet Math. Dokl. 22 (1980), 772-775.

[Vr.2]: A. Varchenko, Asymptotic Hodge structure in the vanishing cohomology, Math. U.S.S.R. Izv. 18 (1982), 469-512.

[Vi.1]: E. Viehweg, Rational singularities of higher dimensional schemes, Proc. Am. Math. Soc. 63 (1977), 6-8.

[Vi.2]: E. Viehweg, Vanishing theorems, J. Reine Angew. Math. 335 (1982), 1-8.

[Za.1]: O. Zariski, On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve, Am. J. Math. 51 (1929), 305-328.

[Za.2]: O. Zariski, On the linear connection index of the algebraic surfaces $z^n = f(x, y)$, Proc. Nat. Sc. 15 (1929), 494-501.

[Za.3]: O. Zariski, On the irregularity of cyclic multiple planes, Ann. Math. 32 (1931), 485-511.