UNIVERSITE PAUL SABATIER SCIENCES
TOULOUSE

U.F.R. MATHEMATIQUES INFORMATIQUE GESTION

Année Universitaire 2008 – 2009

PRESENTATION DES ENSEIGNEMENTS

Syllabus

MASTER SCIENCES-TECHNOLOGIES-SANTE

Mention Mathématiques et Applications

Spécialité : Mathématiques Fondamentales

1ère année

M1 – MATHEMATIQUES ET APPLICATIONS

CONDITIONS D'ACCES

Peuvent s'inscrire en M1 – Mathématiques et Applications :

- De droit : Les étudiants titulaires d'une Licence de Mathématiques.
- Sur dossier : Les étudiants issus d'une autre formation à dominante mathématiques.

OBJECTIFS DE LA FORMATION

Le M1 – Mathématiques et Applications est destiné aux étudiant(e)s qui souhaitent :

- Elargir et approfondir leur culture mathématique,
- Acquérir une formation préalable de base, cohérente et ouverte, en vue d'une deuxième année de master de recherche (Mathématiques Pures ou Mathématiques Appliquées, admission sur dossier, puis préparation d'une thèse,
- Accéder à une deuxième année de master professionnel en Mathématiques Appliquées ou à fort contenu mathématique (Finance, Economie, …),
- Acquérir une formation générale cohérente en vue de la préparation au concours de l'Agrégation de Mathématiques et / ou d'autres concours du niveau BAC +~4,
- Poser une candidature à une admission sur titre en deuxième année dans un grand nombre d'Ecoles d'Ingénieurs.

ORGANISATION DES ENSEIGNEMENTS

L'enseignement est organisé en modules d'enseignement semestriel capitalisables. Chaque enseignement est divisé en un cours magistral et des travaux dirigés.

Premier semestre

Six modules sont proposés aux étudiant(e)s dont quatre modules d'enseignement de base en mathématiques, un d'anglais, un dit « d'ouverture ».

Ces quatre modules de base sont destinés à compléter la formation délivrée en Licence de Mathématiques et à donner les éléments indispensables pour une orientation plus spécialisée au second semestre.

Chaque module d'enseignement de base comporte 66 heures d'enseignements dont au moins 30 heures de cours, réparties sur au moins 12 semaines.

Second semestre

Chaque étudiant(e) choisit trois modules dans une liste de 9.
Les modules d'enseignement du second semestre offrent aux étudiant(e)s une formation plus spécialisée vers un grand nombre de branches des Mathématiques. Chacun comporte 90 heures d'enseignement, dont 36 heures de cours, réparties sur 12 semaines.

S'y ajoute le module **Projet** qui correspond soit à un travail d'initiation à la recherche, soit à un stage en entreprise ou dans un laboratoire de recherche d'une autre discipline. Il donne lieu à la rédaction d'un mémoire et à une soutenance devant un jury. Chaque projet est dirigé par un enseignant de l'U.F.R. M.I.G., co-dirigé dans le cas d'un stage, après accord du responsable de la 1ère année du master.

CONTROLE DES CONNAISSANCES ET OBTENTION DU DIPLOME

Chaque module d'enseignement est capitalisable et donne lieu à un jury dans lequel participe la totalité des enseignants du module délivrant le nombre correspondant d'ECTS.

Les quatre modules de base du premier semestre comportent un examen partiel noté sur 20 et un examen terminal noté sur 40. Le module est acquis si le total des deux notes est supérieur ou égal à 30. La note de l'examen terminal pourra être modifiée par le Jury, qui peut éventuellement soumettre l'étudiant(e) à un examen oral.
Chaque module validé correspond à 6 ECTS.

Le module d'Anglais validé et celui d' « Ouverture » donnent chacun 3 ECTS.

Le second semestre est constitué des trois modules spécialisés et du module Projet .

Chaque module spécialisé comporte un examen terminal noté sur 20 et un ou plusieurs problèmes, donnés en cours de semestre. Leur note peut modifier la note d'examen. Le module est acquis si la note de l'examen est supérieure ou égale à 10. La note du problème sera une donnée indicative importante dans la délibération du Jury qui pourra modifier la note de l'examen et éventuellement soumettre l'étudiant(e) à un examen oral.
Chaque module validé correspond à 9 ECTS.

Le module « Projet » donne lieu à une note sur 20 portant d'une part sur les capacités de compréhension et d'initiative de l'étudiant, ainsi que son aptitude à répondre aux questions lors de la soutenance. Ce module « Projet » validé correspond à 3 ECTS.
La qualité du document écrit ainsi que celle de la présentation orale sont particulièrement prises en compte dans la note d'évaluation.

La première année du master Mathématiques et Applications » est acquise si l'étudiant capitalise 60 ECTS, soit 30 par semestre.

Le jury se réunit à la fin de chaque semestre et peut accorder des modules au titre de la compensation des notes (moyenne semestrielle supérieure ou égale à 10/20 et note du module compensé supérieure ou égale à 06/20).

Modules d'enseignement		Coefficients	Cours	TD
Premier semestre (6 modules)				
1M70MFM	Analyse	6	30	36
1M71MFM	Algèbre et Géométrie	6	30	36
1M72MFM	Probabilités et Statistique	6	30	36
1M73MFM	Distributions et Applications	6	30	36
1M7LMFM	Anglais	3		24
1M7OMFM	Ouverture (Communication)	3	14	10
Second Semestre (3 modules à choisir, 1 module obligatoire)				
1M81MFM	Algèbre	9	36	54
1M82MFM	Topologie	9	36	54
1M83MFM	Géométrie	9	36	54
1M84MFM	Surfaces de Riemann (module non ouvert en 2008-2009)	9	36	54
1M85MFM	Introduction à la Géométrie Algébrique	9	36	54
1M86MFM	Introduction à l'Analyse Complexe en plusieurs Variables (module non ouvert en 2008-2009)	9	36	54
1M87MFM	Processus Stochastiques et Modélisation	9	36	54
1M88MFM	Statistique	9	36	54
1M89MFM	Equations aux Dérivées Partielles	9	36	54
1M8AMFM	Optimisation	9	36	54
1M8BMFM	Calcul Formel, Calcul Numérique	9	36	54
1M80MFM	Module Projet (obligatoire)	3		200

RESPONSABLE ADMINISTRATIF : Monsieur Patrick CATTIAUX
Bâtiment 1R1 (LSP) – Bureau 215
Téléphone : 05 61 55 86 47
E-mail : cattiaux@math.univ-toulouse.fr

SECRETARIAT : Mme Monique FOERSTER
Bât. 1TP1 – Bureau 10
Téléphone : 05 61 55 67 78
Email : foerster@adm.ups-tlse.fr

MODULES

DU

PREMIER SEMESTRE

1M70MFM – ANALYSE

Responsable : F. BERTELOOT

(30 heures de cours, 36 heures de T.D., 6 ECTS)

I. Espaces localement convexes

1. Topologie définie par une famille de semi-normes, exemples : topologie de la convergence simple, de la convergence compacte, topologie C^k.
2. Application linéaire continue.
3. Critère de métrisabilité, espace de Fréchet, exemples : espaces $C^k(\Omega)$, $D_K(\Omega)$, $H(\Omega)$.
4. Partie bornée, partie compacte, le théorème d'Ascoli, la propriété de Montel.

II. Les théorèmes de Banach

1. Le théorème de Baire.
2. Les théorèmes de l'application ouverte, du graphe fermé et de Banach-Steinhaus.

III. Séries de Fourier

1. Le théorème de Stone-Weierstrass.
2. Bases hilbertiennes.
3. Séries de Fourier, théorèmes de convergence, théorème de Fejér.

IV. Dualité

1. Les théorèmes de Hahn-Banach (analytique et géométrique).
2. Topologies faibles associées à une dualité.
3. Dualité des espaces de Banach : théorème d'Alaoglu, espaces réflexifs (compacité faible séquentielle), fonctionnelle convexe s.c.i.

1M71MFM – ALGEBRE ET GEOMETRIE

Responsable : Z. NGUYEN TIEN

(30 heures de cours, 36 heures de T.D., 6 ECTS)

1 – Classification des matrices sur k, Z et k[X] . Application aux invariants de similitude et aux groupes abéliens finis.

2 – Théorie des corps. Extensions algébriques. Corps de rupture et corps de décomposition. Corps algébriquement clos et théorème de Steinitz. Corps finis.

3 – Groupes classiques (GL, SL, O, U). Générateurs, compacité, connexité.

4 – Géométrie affine et euclidienne. Convexité, séparation, version géométrique de Hahn-Banach. Isométries. Sous-groupes finis de $SO_3(R)$, polyèdres réguliers.

5 – Géométrie projective. Coordonnées homogènes et cartes affines dans un espace projectif. Notion de dualité projective, exemples. Transformations projectives et homographies. Birapport. Coniques projectives.

1M72MFM – PROBABILITES ET STATISTIQUE

Responsable : F. BARTHE

(30 heures de cours, 36 heures de T.D., 6 ECTS)

Ce cours de 30 heures a pour objectif de poser les fondements mathématiques du calcul des probabilités et d'initier à la statistique mathématique. Les deux parties s'enrichissent mutuellement, par applications successives l'une de l'autre. Les étudiants concernés par les aspects plus théoriques du calcul des probabilités suivront au second semestre le module « Processus Stochastiques et Modélisation ». Les fondements de la statistique mathématique sont développés au second semestre dans le module « Statistique ».

Ce cours s'adresse donc aussi bien aux étudiants désirant poursuivre en master de recherche mathématiques appliquées, dans un master professionnel à composante forte en probabilités-statistique, ou à ceux se destinant à l'enseignement (rappelons que l'enseignement de la statistique est maintenant introduit dans les lycées).

Programme :

- Rappels du cours de probabilités de licence (espace de probabilité, variables aléatoires, lois, indépendance)
- Théorèmes des classes monotones
- Espérances et lois conditionnelles
- Vecteurs gaussiens
- Convergences de suites de mesures bornées, de variables et vecteurs aléatoires
- Théorèmes limites
- Modèles statistiques, exemples
- Estimation : méthodes des moments, maximum de vraisemblance dans un modèle dominé, modèles exponentiels, estimateurs sans biais, exhaustivité, complétude, estimateur de Rao-Blackwell
- Tests : introduction aux tests, exemples, test de Neyman-Pearson, tests optimaux uni et bi-latères dans le cas de vraisemblance monotone. On n'introduira pas les tests randomisés
- Intervalle de confiance : construction pour des exemples classiques.

1M73MFM – DISTRIBUTIONS ET APPLICATIONS

Responsable : P. RAPHAEL

(30 heures de cours, 36 heures de T.D., 6 ECTS)

- Notions préliminaires : fonctions indéfiniment dérivables à support compact, lemme de partition de l'unité, formules d'intégration par parties.

- Exemples d'équations aux dérivées partielles : équations d'ordre 1 (transport), d'ordre 2 (équations de Poisson, de la chaleur, des ondes). Interprétation physique. Présentation des problèmes aux limites associés.

- Distributions : définition, ordre, support. Exemples : mesures, dipôles, valeurs principales, parties finies. Dérivation et convergence au sens des distributions. Formule des sauts en dimension quelconque.

- Equations de transport d'ordre 1 : méthode des caractéristiques, solutions faibles.

- Convolution de distributions : définition et conditions d'existence ; régularisation. Solutions élémentaires d'équations aux dérivées partielles à coefficients constants.

- Application à l'équation de Poisson : solution élémentaire, propriétés qualitatives.

- Transformation de Fourier : transformée de Fourier dans L^2 (rappels sans démonstration). Distributions tempérées et leur transformée de Fourier. Transformée de Fourier partielle.

- Application à l'équation de la chaleur et à l'équation des ondes : solution élémentaire via la transformée de Fourier, propriétés qualitatives.

- Introduction à l'analyse numérique des EDP: discrétisation par différences finies de l'équation de transport d'ordre 1 en dimension 1 d'espace. Etude de convergence d'un schéma explicite. Mise en œuvre informatique.

- Espace de Sobolev H1 : définition, propriétés élémentaires. Application : formulation variationnelle du problème de Dirichlet pour le Laplacien.

1M7LMFM – LANGUES

Responsable : C. PLANTE-JOURDAIN

(24 heures de T.D. d'Anglais Scientifique, 3 ECTS)

Entraînement à la compréhension orale et écrite de documents scientifiques (articles et vidéos) et à l'expression orale dans un contexte scientifique, avec consolidation grammaticale et lexicale.

L'objectif étant, pour l'étudiant, d'atteindre la plus grande autonomie en toutes circonstances.

1M7OMFM – OUVERTURE

Responsable : X. BUFF

(14 heures de cours, 10 heures de TD, 3 ECTS)

- Ouverture thématique : sous la responsabilité d'un enseignant, les étudiants devront suivre un cycle de conférences réparties sur le semestre et faire une présentation orale (environ 20 minutes) à partir de l'une des conférences de leur choix. La présence aux conférences est obligatoire, elle est attestée par la signature d'une feuille d'émargement au début de chaque conférence.

- Techniques de communication : ces enseignements seront regroupés sur la dernière semaine du semestre.

- Outre la présentation orale, cette unité est validée par un Q.C.M. portant sur l'ensemble des conférences du semestre.

MODULES

DU

DEUXIEME SEMESTRE

1M81MFM – ALGEBRE

Responsable : V. SCHECHTMANN

(36 heures de cours, 54 heures de T.D., 9 ECTS)

Corps finis. La loi de réciprocité quadratique de Gauss. Sommes de Gauss.

Corps quadratiques. Corps cyclotomiques. Sommes de Jacobi. Fonctions Gamma et Beta.

Théorème de Fermat pour les exposants n = 3 et n = 4.

Corps de nombres algébriques. Groupe des classes des idéaux.

Fonctions elliptiques et leurs applications à l'étude de l'anneau de nombres gaussiens.

1M82MFM – TOPOLOGIE

Responsable : T. FIEDLER

(36 heures de cours, 54 heures de T.D., 9 ECTS)

1 - Variétés

- Atlas
- Sous variétés
- Variétés quotients
- Espace tangent.

2 - Théorie de Morse

- Homotopie, type d'homotopie
- Notions sur les espaces cellulaires
- Fonction de Morse
- Points critiques et attachement de cellules
- Classification des surfaces (orientables).

3 - Revêtements et groupe fondamental

- Groupe fondamental
- Théorème de Van Kampen
- Revêtements, revêtements galoisiens
- Suite exacte des revêtements
- Revêtement universel
- Exemple : groupes fondamentaux et revêtements des surfaces.

4 - Homologie

- Simplexes, homologie simpliciale
- Homologie d'un complexe.
- Homologie singulière
- Invariance par homotopie
- Suite exacte relative
- Excision
- Suite exacte de Mayer-Vietoris
- Homologie cellulaire
- Dualité de Poincaré.

1M83MFM – GEOMETRIE

Responsable : M. BOILEAU

(36 heures de cours, 54 heures de T.D., 9 ECTS)

- Courbes dans le plan et dans l'espace : courbure, degré, indice, nombre d'enroulement des courbes dans le plan. Formules de Serre-Frénet, théorème de Fenchel.

- Surfaces dans $\mathbf{R}^3$: équations de Codazzi et Gauss, théorème Egregium.

- Les surfaces pour elles-mêmes : surfaces, champs de vecteurs, métriques, structures conformes, connexions, courbure, géodésiques.

- Le théorème de Gauss-Bonnet : triangulations, caractéristique d'Euler, Poincaré-Hopf, Gauss-Bonnet.

- Géométrie de quelques surfaces : la sphère, les tores plats, le plan hyperbolique.

1M85MFM – INTRODUCTION
A LA GEOMETRIE ALGEBRIQUE

Responsable : J. TAPIA

(36 heures de cours, 54 heures de T.D., 9 ECTS)

1 – Compléments d'algèbre commutative. Extensions entières, prolongement des idéaux premiers. Anneaux de fractions, localisation. Lemme de normalisation de Noether, théorème des zéros de Hilbert.

2 – Géométrie algébrique affine. Le spectre maximal d'une algèbre de type fini sur un corps, topologie de Zariski. Notion de faisceau, construction du faisceau structural d'une variété algébrique affine.

3 – Eléments de géométrie algébrique projective. Variété projective associée à une algèbre graduée de type fini sur un corps.

4 – Dimension, régularité. Dimension de Krull et dimension des variétés algébriques. Points réguliers, anneaux réguliers, anneaux réguliers de dimension 1 (anneaux de valuations discrètes).

1M87MFM – PROCESSUS STOCHASTIQUES ET MODELISATION

Responsable : P. CATTIAUX

(36 heures de cours, 54 heures de T.D., 9 ECTS)

Description

Le but de ce cours est d’introduire les grandes classes de modèles stochastiques et les principales techniques pour les étudier.

- Théorie des martingales à temps discret : théorème d’arrêt, théorèmes de convergence, applications aux sommes de variables aléatoires indépendantes.

- Chaînes de Markov à temps discret sur un ensemble fini ou dénombrable. Fonctions excessives et invariantes. Transience et récurrence, critères de transience. Mesure invariante, classes de récurrence, périodes, convergence vers la mesure invariante, théorème ergodique. Exemple des marches aléatoires.

- Processus de Poisson et processus de Markov à temps continu sur un espace fini ou dénombrable. Applications aux problèmes de files d’attente et de fiabilité.

1M88MFM – STATISTIQUE

Responsable : P. BERTHET

(36 heures de cours, 54 heures de T.D., 9 ECTS)

- Modèle linéaire et analyse de la variance. Intervalles et régions de confiance.

- Théorie des tests, familles à rapport de vraisemblance monotone, tests UPP.

- Tests usuels : comparaison de moyennes, test de Student, tests sur une proportion, tests du xhi2.

- Tests non paramétriques : tests de Kolmogorov-Smirnov, tests fondés sur les rangs et les signes.

Les thèmes abordés pendant le cours seront illustrés sur machine en MATLAB à partir de simulations de variables aléatoires et de l'utilisation de données.

1M89MFM – EQUATIONS
AUX DERIVEES PARTIELLES

Responsables : N. BEN ABDALLAH et J.-M. ROQUEJOFFRE

(36 heures de cours, 54 heures de T.D., 9 ECTS)

Approfondissement en Distributions (6h cours et T.D.)

- Espaces de Sobolev en dimension supérieure.
- Injections de Sobolev, inégalité de Poincaré, Poincaré Wirtinger … .
- Traces.

Problèmes stationnaires (12h cours et T.D.)

- Problèmes variationnels en dimension supérieure, conditions de Dirichlet, Neumann, Robin.
- Lien avec la minimisation d'une fonctionnelle.
- Problèmes non coercifs et alternative de Fredholm, problèmes aux valeurs propres.
- Problèmes elliptiques d'ordre 2m, Inégalité de Garding.

Problèmes d'évolution (18h cours et de T.D.)

- Théorème de Hille Yosida et équation de la chaleur.
- Systèmes de Friedrichs.
- Equation de Schrödinger.

1M8AMFM – OPTIMISATION

Théorie, algorithmes, applications

Responsable : P. MARECHAL

(36 heures de cours, 54 heures de T.D., 9 ECTS)

L'Optimisation intervient dans la modélisation et, pour partie, dans le processus de résolution de problèmes de mathématiques appliquées, en ingénierie ainsi que dans l'étude qualitative de certains problèmes de décision. Les objectifs de ce module sont de donner aux étudiants la possibilité de s'ouvrir à ce type d'activités et de leur illustrer les champs possibles d'applications.

Contenu : Trois tiers de programme, dont un tiers en rotation ; le corpus commun étant constitué des deux premiers tiers.

Programme

- Exemples de situations dont la modélisation conduit à des problèmes variationnels et d'optimisation.

Premier tiers : Bases mathématiques

- Eléments d'analyse convexe.
- Conditions d'optimalité (du 1er ordre) avec contraintes définies par des données différentiables.
- Dualité : ce qu'est le dual d'un problème d'optimisation, ce qu'il apporte dans la résolution du problème originel.

Deuxième tiers : Algorithmes

- Algorithmes pour les problèmes d'optimisation sans contraintes : du type gradient, Newton (*les incontournables*).
- Algorithmes pour les problèmes avec contraintes : on en étudiera un en détail (exemples : lagrangien augmenté, points intérieurs, SQP).
- Illustration des applications par : problèmes de moindres carrés (sous contraintes d'égalités), problèmes inverses, identification, problèmes de statistique, etc. Liée au troisième tiers du programme.

Troisième tiers (en rotation) : Applications

Trois possibilités :

- Commande optimale : conditions d'optimalité pour les problèmes de commande optimale gouvernés par des équations différentielles ; PMP (principe du minimum de PONTRIAGUINE). Exemples d'utilisation du PMP pour la détermination de commandes optimales.
- Optimisation à données linéaires (programmation linéaire) : problématique spécifique à ce domaine, gestion des grandes tailles, algorithmes modernes de résolution de ces problèmes ; illustration avec des problèmes issus de la Recherche opérationnelle.
- Signaux et images : méthodes variationnelles en imagerie, reconstruction d'images via les techniques d'optimisation, problèmes inverses mal posés (exemple de l'imagerie médicale) ; filtrage adaptatif des signaux, synthèse et design de circuits.

Des T.D. sur machine (en Matlab) permettront d'illustrer les second et/ou troisième tiers.

1M8MBMF - Méthodes de calcul numérique et formel

Responsable : J.-C. YAKOUBSOHN

(36 heures de cours, 54 heures de T.D., 9 ECTS)

Partie I -Calcul numérique

Le but de cette partie est d'introduire les outils numériques de base pour résoudre les problèmes d'évolution. Les modèles décrivant la dynamique des populations serviront de fil conducteur pour illustrer cette partie.

Equations différentielles ordinaires

Quelques modèles simples de la dynamique des populations.
Schémas numériques pour la résolution d'équations différentielles ordinaires (schémas d'Euler et de Runge-Kutta, schémas implicites).
Illustrations avec le modèle de Lotka-Volterra.

Modèles spatio-temporels

Quelques modèles d'évolution avec exemples tirés de la dynamique des populations (modèles de Fisher, Dunbar, Yamagutti, ...)
Schémas numériques : consistance, stabilité et phénomènes de dispersion et de dissipation numérique, convergence, traitement des non linéarités.
Illustrations numériques.

Partie II -Calcul formel

Il s'agit d'enseigner quelques outils fondamentaux du calcul formel et de les illustrer sur des applications classiques: robotique, chimie (configurations moléculaires), courbes algébriques, calcul exact des schémas numériques, compression d'images.

Algorithmique générale

- Rappels d'algorithmique: description, terminaison, correction d'un algorithme. Rudiments de complexité : classes de complexité, calcul de la complexité.

Algorithmes du pivot

- Rappels sur l'algorithme classique de Gauss (sur un corps). Algorithme du pivot sur un anneau euclidien. Application aux systèmes d'équations linéaires `a coefficients entiers.

Polynômes à une indéterminée

- L'algorithme d'Euclide pour le pgcd. Le résultant. Application aux intersections de courbes algébriques planes.

Systèmes polynomiaux

Polynômes symétriques. Division dans $K[X1 ,...,X_n]$. Bases de Grobner et algorithme de Buchberger.
Applications a la robotique, a la géométrie et au calcul exact de schémas numériques.

Multiplication rapide

- Algorithme de Karatsuba. Transformation de Fourier discrète (DFT), transformation de Fourier rapide (FFT) dans Z et dans C. Application a la compression d'images. `

1M80MFM – PROJET

Responsable : P. CATTIAUX

(3 ECTS)

Le projet se déroule au cours du second semestre. Il s'effectue sous la responsabilité d'un enseignant du Département de Mathématiques, en général en binômes.

Les sujets proposés seront disponibles avant la fin du 1er semestre et pourront être consultés par les étudiants au secrétariat du Master 1 de Mathématiques. L'attribution des projets se fera au début du 2ème semestre.

Cette unité comporte également l'obligation d'assister à un cycle de conférences, validée par un émargement en début de séance et un QCM portant sur l'ensemble du cycle de conférences.

Le projet donne lieu à la rédaction d'un mémoire dont la soutenance se fait à la fin du second semestre, devant un jury de plusieurs enseignants. Son évaluation porte sur les capacités de compréhension et d'initiative de l'étudiant, ainsi que son aptitude à répondre aux questions lors de la soutenance. La qualité du document écrit ainsi que celle de la présentation orale sont particulièrement prises en compte dans la note d'évaluation.