Corrigé de l'épreuve d'Analyse —Deuxième Session, 31 août 2009

Exercice 1 (5 points) :

a) Soit $x > 0$. Montrer qu'il existe un nombre θ, $0 < \theta < x$, tel que :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}\cos(\theta).$$

D'après la formule de Taylor-Lagrange appliquée sur l'intervalle $[0, x]$, pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^3$, alors il existe $\theta \in]0, x[$ tel que

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f^{(3)}(\theta)\frac{x^3}{6}.$$

Pour $f(x) = \sin x$, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc a fortiori $\mathcal{C}^3$ sur tout $\mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f^{(3)}(x) = -\cos x,$$

donc

$$\sin x = 0 + 1 \cdot x - 0 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \cdot \cos\theta,$$

c.q.f.d.

b) Montrer que si $0 < x < \pi/2$, alors θ est uniquement déterminé par x. On le note θ_x.

$\sin x = x - \frac{x^3}{6}\cos(\theta) \iff \cos(\theta) = \frac{6}{x^3}(x - \sin x)$. La fonction cos est injective (car monotone décroissante) sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, donc il n'y a qu'une valeur possible pour θ (et la question (a) montre qu'il y en a bien une).

c) Donner le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\sin x$ et en déduire qu'il existe une fonction $\varepsilon(x)$ telle que $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$ et

$$\cos(\theta_x) = 1 - \frac{x^2}{20} + x^2\varepsilon(x).$$

D'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 5,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\alpha(x) = x - \frac{x^3}{6}\left(1 - \frac{x^2}{20} + 6x^2\alpha(x)\right),$$

avec $\lim_{x\to 0}\alpha(x) = 0$. Donc $\cos(\theta_x) = 1 - \frac{x^2}{20} + 6x^2\alpha(x)$ et on peut poser $\varepsilon(x) = 6\alpha(x)$.

d) Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\cos t$ et en déduire que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\theta_x}{x} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon_1(t)$, donc

$$\cos(\theta_x) = 1 - \frac{\theta_x^2}{2}\left(1 - 2\varepsilon_1(\theta_x)\right) = 1 - \frac{\theta_x^2}{2}\left(1 - 2\varepsilon_2(x)\right).$$

En comparant avec le résultat de la question (c), il vient

$$\theta_x^2\left(1 - 2\varepsilon_2(x)\right) = \frac{x^2}{10}\left(1 - 20\varepsilon(x)\right),$$

donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\theta_x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{10}\frac{1-20\varepsilon(x)}{1-2\varepsilon_2(x)}\right) = \frac{1}{10},$$

d'où le résultat en prenant la racine carrée et en remarquant que $x > 0$ et $\theta_x > 0$.

Exercice 2 (3 points) :

a) Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{x+2}{(x+1)(x^2+1)}$ et calculer

$$\int_0^1 \frac{x+2}{(x+1)(x^2+1)}dx$$

On sait d'après le cours qu'il existe des réels a, b et c tels que

$$f(x) = \frac{x+2}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

En multipliant cette identité par $x+1$, en simplifiant, puis en prenant $x = -1$, il vient

$$a + \frac{(bx+c)(x+1)}{x^2+1} = \frac{x+2}{x^2+1}, \text{ donc } a + 0 = \frac{-1+2}{(-1)^2+1} = \frac{1}{2}.$$

En multipliant la même identité par x^2+1, en simplifiant, puis en prenant $x = i$, il vient

$$bi + c = \frac{i+2}{i+1} = \frac{(i+2)(-i+1)}{1-i^2} = \frac{3-i}{2},$$

donc $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{3}{2}$.

Finalement

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x+3}{x^2+1}\right).$$

On obtient une primitive de f en remarquant que $(x^2+1)' = 2x$, et que $f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4}\frac{-2x}{x^2+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{x^2+1}$, donc une primitive de f est donnée par

$$\frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{3}{2}\arctan x + C.$$

Donc

$$\int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{3}{2}\arctan x\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{3}{2}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{3\pi}{8}.$$

b) *(hors barème)*
Pour $n > 0$, on pose

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2n^2 + kn}{(k+n)(k^2+n^2)}$$

Déduire de la question précédente $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

En divisant par n^2 au numérateur et au dénominateur, on obtient

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{2+\frac{k}{n}}{(\frac{k}{n}+1)(\frac{k^2}{n^2}+1)} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}),$$

c'est donc une somme de Riemann pour f et la subdivision de $[0,1]$ donnée par $a_k := \frac{k}{n}$, $0 \leq k \leq n$. La fonction f est continue sur $[0,1]$, on a donc

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{3\pi}{8}.$$

Exercice 3 (6 points) :
a) Donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\frac{1}{\cosh^3 t}$.

D'après le cours,

$$\cosh t = 1 + \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon_1(t).$$

D'autre part, $(1+u)^{-3} = 1 - 3u + u\varepsilon_2(u)$. Donc, en prenant $u := t^2\left(\frac{1}{2}+\varepsilon_1(t)\right)$, on trouve

$$\begin{aligned}(\cosh t)^{-3} &= 1 - 3t^2\left(\frac{1}{2}+\varepsilon_1(t)\right) + t^2\left(\frac{1}{2}+\varepsilon_1(t)\right)\varepsilon_2\left(t^2\left(\frac{1}{2}+\varepsilon_1(t)\right)\right)\\ &= 1 - \frac{3}{2}t^2 + t^2\left(-3\varepsilon_1(t) + (\frac{1}{2}+\varepsilon_1(t))\varepsilon_2\left(t^2(\frac{1}{2}+\varepsilon_1(t))\right)\right) =: 1 - \frac{3}{2}t^2 + t^2\varepsilon_3(t).\end{aligned}$$

On vérifie facilement que $\lim_{t\to 0}\varepsilon_3(t) = 0$.

b) En déduire un développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\int_0^x \frac{1}{\cosh^3 t}dt$.

Posons $F(x) := \int_0^x \frac{1}{\cosh^3 t}dt$. Comme $F(0) = 0$, d'après le théorème sur le développement limité d'une primitive,

$$F(x) = x - \frac{1}{2}x^3 + x^3\varepsilon_4(x).$$

c) En faisant une intégration par parties de $\int \frac{1}{1+x^2}dx$ (poser $u'(x) = 1$, ...) déterminer une primitive de $\frac{1}{(1+x^2)^2}$.

On intègre par parties en prenant $u'(x) = 1$, $u(x) = x$, $v(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $v'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, d'où

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{x}{1+x^2} + \int \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}dx = \frac{x}{1+x^2} + \int\left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{(1+x^2)^2}\right)dx,$$

donc
$$2\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \frac{x}{1+x^2} + \int \frac{1}{1+x^2}dx$$
et par conséquent
$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\ arctanx + C.$$

d) Calculer $\int_0^x \frac{1}{\cosh^3 t}dt$ en utilisant le changement de variable $u = \sinh t$.

Comme $u = \sinh t$, on a $du = \cosh t\, dt$. D'autre part, $\cosh^2 t = 1 + \sinh^2 t = 1 + u^2$. Donc
$$\int_0^x \frac{1}{\cosh^3 t}dt = \int_0^x \frac{\cosh t}{\cosh^4 t}dt = \int_0^{\sinh x} \frac{du}{(1+u^2)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\sinh x}{1+\sinh^2 x} + \frac{1}{2}\arctan(\sinh x),$$
d'après la question c).

e) En déduire à nouveau le DL de la question b).

Soit $G(x) = \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\ arctanx$. On sait que $arctanx = x - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$ (on peut retrouver ce résultat en prenant la primitive de la dérivée d'arctan, $(1+x^2)^{-1}$). D'autre part
$$\frac{x}{1+x^2} = x(1+x^2)^{-1} = x\left(1 - x^2 + x^2\varepsilon_1(x)\right) = x - x^3 + x^3\varepsilon_1(x).$$
En faisant la somme, on trouve
$$G(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon_2(x).$$
On sait d'après le cours que $\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_3(x)$.

L'intégrale de la question a) est donc égale à
$$G(\sinh x) = x + \frac{x^3}{6} - \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon_4(x) = x - \frac{1}{2}x^3 + x^3\varepsilon_4(x).$$
(D'autres solutions sont possibles).

Exercice 4 (6 points) :

On considère l'équation différentielle :
$$(E) \qquad xy' + 2y = \ \varphi(x),$$
où $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\varphi(0) = 1$.

a) Donner les solutions de l'équation homogène associée à (E) sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

L'équation homogène associée à (E) est $xy' + 2y = 0$, et sur les intervalles où $x \neq 0$, les solutions sont données par
$$y = Ce^{-\int \frac{2}{x}dx} = Ce^{-2\ln|x|} = \frac{C}{x^2},$$

avec une constante C qui dépend de l'intervalle ($]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$).

b) Donner les solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

On applique la méthode de variation de la constante : on pose $y(x) = \frac{z(x)}{x^2}$, avec une fonction z définie soit sur $]-\infty, 0[$, soit sur $]0, +\infty[$. Alors $y'(x) = \frac{z'(x)}{x^2} - 2\frac{z(x)}{x^3}$ et (E) devient

$$\frac{z'(x)}{x} = \frac{\sin x}{x}.$$

On en déduit $z(x) = -\cos x + C$, d'où les solutions

$$\begin{aligned} y_-(x) &= \frac{C_1 - \cos x}{x^2} \text{ sur }]-\infty, 0[, \\ y_+(x) &= \frac{C_2 - \cos x}{x^2} \text{ sur }]0, +\infty[. \end{aligned}$$

c) Déterminer la solution y_0 sur $]0, +\infty[$ qui vérifie $y_0(\frac{\pi}{2}) = 0$.

On doit avoir

$$\frac{C_2 - \cos(\frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{2})^2} = 0, \text{ donc } C_2 = 0.$$

d) Montrer qu'il existe une solution y_1 de (E) sur $\mathbb{R}$, et la calculer. Que vaut $y_1(0)$?

On doit avoir $\lim_{x\to 0, x<0} \frac{C_1 - \cos x}{x^2} \in \mathbb{R}$ (il faut que la limite existe et ne soit pas infinie), donc il faut que $C_1 = 1$ et comme $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)$, il s'en suit que si $C_1 = 1$, la limite existe et vaut $\frac{1}{2}$.

De même, on doit avoir $\lim_{x\to 0, x>0} \frac{C_2 - \cos x}{x^2} \in \mathbb{R}$, donc il faut que $C_2 = 1$ et la limite existe et vaut $\frac{1}{2}$. On a donc une fonction continue sur $\mathbb{R}$ définie par

$$y_1(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}, x \neq 0, \quad y(0) = \frac{1}{2},$$

qui vérifie l'équation (E) sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Il faut encore voir que y est dérivable en 0. Or

$$\lim_{x\to 0} \frac{y_1(x) - y_1(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1 - \cos x}{x^2} - \frac{1}{2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x - \frac{x^2}{2}}{x^3} = 0,$$

d'après le DL de $\cos x$ déjà donné. Donc $y_1'(0)$ existe et vaut 0, et $0 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 = \varphi(0)$, donc la fonction y_1 vérifie bien l'équation (E) aussi pour $x = 0$.