Analyse Complexe L
Contrôle terminal, 9.11.2018

Solution

1 a) • $\cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, $\sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$.

• $\cos(\frac{\pi}{2} - z) = \frac{1}{2}(e^{i\frac{\pi}{2} - iz} + e^{-i\frac{\pi}{2} + iz}) = \frac{1}{2}(ie^{-iz} - ie^{iz})$

$= -\frac{i}{2}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \sin z$.

• La fonction $f(z) = \cos(\frac{\pi}{2} - z) - \sin z$ est analytique sur $\mathbb{C}$, qui est connexe. Elle s'annule sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, qui est un ensemble dont les points ne sont pas isolés, donc d'après le Théorème de Prolongement Analytique, $f \equiv 0$.

b) • $f(z) = \sin z$ est analytique sur $\mathbb{C}$ et vérifie $f(n\pi) = \sin(n\pi) = 0 = \sin(-n\pi)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, et $f \not\equiv 0$ bien entendu.

• Considérons $g(z) = f(z) - f(-z)$, alors g est analytique sur $\mathbb{C}$, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $g(\frac{\pi}{n}) = 0$. De plus $g(0) = 0$ et $0 = \lim_{n \to \infty} \frac{\pi}{n}$ n'est pas un point isolé de l'ensemble $\{0\} \cup \{\frac{\pi}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Donc g admet un zéro non isolé, donc d'après le Thm. du Prolongement Analytique, $g \equiv 0$ sur $\mathbb{C}$, càd. $f(z) = f(-z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$: f est paire.

2 a) Soit Ω un ouvert connexe et f analytique sur Ω.
Si $|f|$ admet un maximum local en $a \in \Omega$, alors f est constante.
Corollaire : si Ω est borné ~~(connexe)~~ et f continue sur $\overline{\Omega}$, ana. sur Ω, alors $\max_{\overline{\Omega}} |f| = \max_{\partial\Omega} |f|$.

b) Supposons que $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \overline{\Omega}$.
Alors $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ définit une fonction analytique sur Ω, continue sur $\overline{\Omega}$, donc

$$\max_{z\in\overline{\Omega}} |g(z)| = \max_{\zeta\in\partial\Omega} |g(\zeta)| \Rightarrow \frac{1}{\min_{z\in\overline{\Omega}} |f(z)|} = \frac{1}{\min_{\zeta\in\partial\Omega} |f(\zeta)|},$$

donc $\min_{\overline{\Omega}} |f| = \min_{\partial\Omega} |f|$.

c) Si $|z| = 2$, $\left|f(z)\right| \geq |z|^7 - \left|-z^3 + 2z^2 - \frac{z}{2} + 1\right|$

$$\geq |z|^7 - |z|^3 - 2|z|^2 - \frac{1}{2}|z| - 1 \geq 128 - 8 - 8 - 1 - 1 = 110 > 100.$$

Or $|f(0)| = 1 < 100 < |f(z)|$, $\forall z \in \partial D(0,2)$,
donc $\min_{\overline{\Omega}} |f| < \min_{\partial\Omega} |f|$: le résultat du b) n'étant pas valide, il faut que f s'annule quelque part dans $D(0,2)$.

3 a) $f(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)\sqrt{t}}$ présente une singularité en 0, au voisinage de laquelle $f(t) > 0$ et $f(t) \sim \dfrac{1}{\sqrt{t}} = \dfrac{1}{t^{1/2}}$

Or $1/2 < 1$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^{1/2}}$ converge et donc $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ converge.

De même pour $t \to \infty$, $f(t) > 0$ et $f(t) \sim \dfrac{1}{t^{5/2}}$ et $\dfrac{5}{2} > 1$, donc $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{5/2}}$ converge, donc $\displaystyle\int_1^{\infty} f(t)\,dt$ converge.

b) • $S(z)^2 = \left(\exp\left(\tfrac{1}{2}\operatorname{Log} z\right)\right)^2 = \exp\left(2 \times \tfrac{1}{2}\operatorname{Log} z\right)$

$= \exp(\operatorname{Log} z) = e^{\ln|z|}\left(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)\right)$

$= |z| \cdot \left(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)\right) = z.$

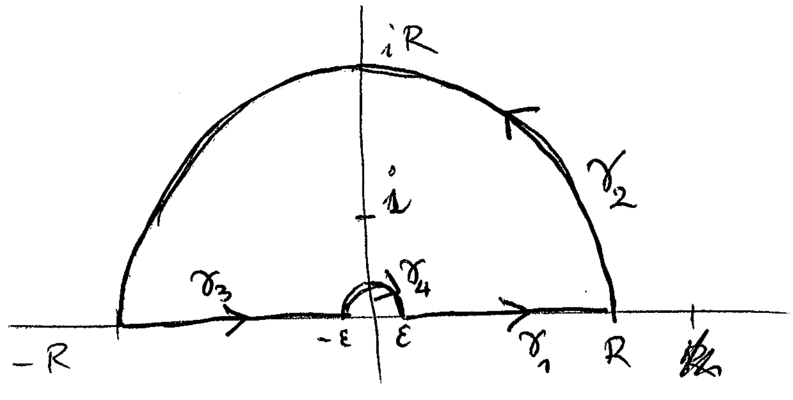
• S est continue car $\arg$ est continue sur $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_-$, $z \mapsto |z|$ est continue sur $\mathbb{C}$, ~~et~~ $x \mapsto \ln x$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et $w \mapsto e^w$ est continue sur $\mathbb{C}$.

• Calculons $\dfrac{1}{h}\left(S(z+h) - S(z)\right) = \dfrac{1}{h}\,\dfrac{S(z+h)^2 - S(z)^2}{S(z+h) + S(z)}$

$= \dfrac{1}{h}\,\dfrac{(z+h) - z}{S(z+h) + S(z)} = \dfrac{1}{S(z+h) + S(z)}.$

Comme S est continue, $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{1}{S(z+h) + S(z)} = \frac{1}{2S(z)}$, car $z \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_- \implies S(z) \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_-$.

c)



f est analytique sur $\left(\mathbb{C} \setminus (i\mathbb{R}_-)\right) \setminus \{i\}$

car $z^2+1 = 0 \iff z \in \{+i, -i\}$ et $-i \in i\mathbb{R}_-$.

f admet un pôle en i car $f(z) = \dfrac{1}{(z-i)\,(z+i)\,z^{1/2}}$

et $(i+i)\,i^{1/2} = 2i\, e^{(i\frac{\pi}{2})\cdot\frac{1}{2}} \neq 0$.

De plus, le résidu de f au point i est donné par

$$\frac{1}{2i\, e^{i\frac{\pi}{4}}} \left(= \frac{1}{2i\, \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)} = \frac{1}{\sqrt{2}\,(i-1)} \right)$$

Donc le théorème des Résidus donne, comme γ est une courbe de Jordan parcourue une fois dans le sens trigonométique,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f; i) = 2\pi i \frac{1}{2i\, e^{i\frac{\pi}{4}}}$$
$$= \pi e^{-i\frac{\pi}{4}} = \pi \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

d) $$\left| \int_{\gamma_4} f(\zeta)\,d\zeta \right| \leq \ell(\gamma_4) \max_{\gamma_4} |f|,$$

or pour $\varepsilon < 1$, $z \in \gamma_4$, alors

$$|f(z)| \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\,(1-\varepsilon^2)}$$

D'autre part, $\ell(\gamma_4) = \pi\varepsilon$.

Donc $\ell(\gamma_4) \max_{\gamma_4} |f| \leq \dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{1-\varepsilon^2} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$.

e) $$\left| \int_{\gamma_2} f(\zeta)\,d\zeta \right| \leq \ell(\gamma_2) \max_{\gamma_2} |f| \leq \pi R \cdot \frac{1}{R^{1/2}(R^2-1)}$$
$$= \frac{\pi R^{1/2}}{R^2-1} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0.$$

f) Pour $z = t < 0$, $z = |t|\, e^{+i\pi}$ avec notre choix d'argument dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$.

Donc $z^{1/2} = \sqrt{|t|}\, e^{i\frac{\pi}{2}} = i\sqrt{|t|}$.

D'où
$$\int_{\gamma_3} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{dt}{i\sqrt{|t|}\,(1+t^2)} =$$
en posant $t' = -t$
$$= \int_R^{\varepsilon} \frac{-dt'}{i\sqrt{t'}\,(1+t'^2)} = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{dt'}{i\sqrt{t'}\,(1+t'^2)}$$
$$= -i\int_{\varepsilon}^{R} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t^2)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0,\, R\to\infty]{} -i\int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}\,(1+t^2)}.$$
(car l'intégrale converge)

g) Au total, $\displaystyle\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to+\infty}} \int_{\gamma} f(\zeta)\, d\zeta = (1-i)\int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}\,(1+t^2)}$.

d'après c) $\displaystyle = \pi\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

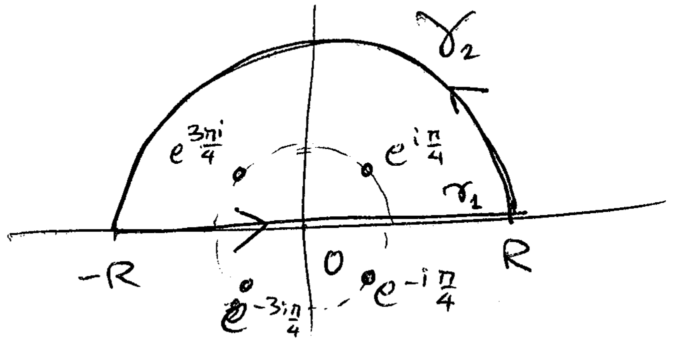
En simplifiant par $(1-i)$, on obtient
$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}\,(1+t^2)} = \pi\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4 a) $u = \sqrt{t} \Rightarrow du = \frac{1}{2}\frac{dt}{\sqrt{t}}$, donc
$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{t}} = \int_0^{\infty} \frac{2\, du}{1+u^4}.$$

b) Si $a^4+1 = 0$, alors $z^4+1 = (z-a)\,P(z)$ pour un certain P polynôme, donc $\frac{d}{dz}(z^4+1) = P(z) + (z-a)P'(z)$ et la valeur de cette dérivée en a $= 4a^3 = P(a) \neq 0$ car $a \neq 0$ puisque $0^4+1\neq 0$.

donc $\displaystyle\frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{(z-a)\,P(z)}$ avec $\displaystyle\lim_{z\to a}\frac{1}{P(z)} = \frac{1}{P(a)} = \frac{1}{4a^3}$.

c)



$$z^4+1=0 \iff z^4=-1=e^{i\pi} \iff z=e^{i\pi/4+\frac{k}{4}2\pi i},\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\iff z\in\left\{e^{i\pi/4},\ e^{3i\pi/4},\ e^{-i\pi/4},\ e^{-3i\frac{\pi}{4}}\right\}.$$

D'après le théorème des Résidus, avec $f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$,

$$\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = 2\pi i\left(\operatorname{Res}(f;e^{i\frac{\pi}{4}})+\operatorname{Res}(f;e^{\frac{3i\pi}{4}})\right)$$

$$=2\pi i\left(\frac{1}{4e^{3i\frac{\pi}{4}}}+\frac{1}{4e^{9i\frac{\pi}{4}}}\right)=\frac{2\pi i}{4}\left(e^{-3i\frac{\pi}{4}}+e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$=\frac{\pi i}{2}\left(-i\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{2}\right)=\pi\frac{\sqrt2}{2}.$$

D'autre part, $\displaystyle\left|\int_{\gamma_2} f(\zeta)\,d\zeta\right| \le \ell(\gamma_2)\max_{\gamma_2}|f|$

$$\le \pi R\cdot\frac{1}{R^4-1}\xrightarrow[R\to\infty]{} 0,$$

et $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 2\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^4)}$

Mais alors $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt t} = 2\int_0^\infty \frac{du}{1+u^4} = \pi\frac{\sqrt2}{2}.$